

УДК 532.529

МНОГОСЕТОЧНЫЙ МЕТОД УСКОРЕНИЯ СХОДИМОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ
ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХК.Н. Волков^{a, b}^a Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия^b Университет Кингстона, Лондон, Великобритания, k.volkov@kingston.ac.uk

Аннотация. Разработан подход к эффективной реализации численных методов и вычислительных алгоритмов, предназначенных для моделирования течений невязкого и вязкого сжимаемого газа в областях сложной геометрической конфигурации. Развивается метод ускорения сходимости итерационного процесса, основанный на использовании многосеточных технологий решения систем разностных уравнений большой размерности. Уравнения Эйлера и Навье–Стокса дискретизируются на структурированных и неструктурированных сетках при помощи схем высокой разрешающей способности по времени и по пространству. Многосеточный метод реализуется на основе стандартного C/F разбиения переменных и метода стандартной интерполяции. Предложен подход, позволяющий преодолеть проблемы, связанные с хранением коэффициентов матрицы разных знаков. Возможности разработанных средств численного моделирования демонстрируются на примере задачи обтекания профиля. Приведены результаты расчетов течений невязкого и вязкого газа на структурированных и неструктурированных сетках при использовании различных составных компонентов многосеточной технологии. Сравнение скорости вычислений и факторов сходимости на структурированных и неструктурированных сетках показало экономичность разработанного подхода, а также слабую зависимость показателей качества от числа узлов сетки. Выбор оптимального числа внутренних итераций позволил сократить время счета на 10%. Результаты работы могут быть использованы при разработке вычислительных пакетов, предназначенных для решения задач газовой динамики в областях сложной формы.

Ключевые слова: вычислительная газовая динамика, неструктурированная сетка, многосеточный метод, сходимость, ускорение.

MULTI-GRID METHOD OF CONVERGENCE SPEEDING-UP FOR THE SOLUTION
OF GAS DYNAMICS PROBLEMS ON UNSTRUCTURED MESHESK.N. Volkov^{a, b}^a ITMO University, Saint Petersburg, Russia^b Kingston University, London, United Kingdom, k.volkov@kingston.ac.uk

Abstract. An approach for effective implementation of numerical methods and computational algorithms is developed to simulate flows of non-viscous and viscous compressible gas in the complex domains. The convergence speeding-up method of iterative process is discussed based on the usage of multi-grid technologies to the solution of large systems of finite difference equations. Euler and Navier-Stokes equations are quantized on structured and unstructured meshes with high-resolution schemes in time and space. Multi-grid method is implemented on the basis of standard C/F splitting of variables and standard interpolation method. A specific approach is proposed to overcome the problems related to storing the matrix coefficients of different signs. A problem of flow around an airfoil is used to demonstrate the possibilities of computational tools developed. The results computed for non-viscous and viscous gas on structured and unstructured meshes are presented with the usage of various components of multi-grid technology. Comparison of computation speed and convergence factors on structured and unstructured meshes showed the economy of the developed approach and weak dependence of quality characteristics on the number of mesh points. The choice of optimal inner iterations number made it possible to decrease computation time for 10%. Obtained results can be applied while software creation for fluid dynamics problems in the complex configuration domains.

Keywords: computational fluid dynamics, unstructured mesh, multi-grid method, convergence, speeding-up.

Введение

Для расчетов течений жидкости и газа в областях сложной формы, характерных для современных технических устройств и технологических приложений, широкое применение находит метод конечных объемов на неструктурированных сетках. Расчеты течений жидкости и газа на неструктурированных сетках сталкиваются с рядом проблем, связанных с медленной скоростью сходимости итерационного процесса и существенными затратами процессорного времени, необходимого для получения сеточно-независимого и сходящегося решения.

Дискретизация уравнений Эйлера или Навье–Стокса порождает систему разностных уравнений с разреженной матрицей большого размера, которая решается тем или иным методом. При дискретизации уравнений на неструктурированных сетках матрица коэффициентов является несимметричной и не имеет диагонального преобладания. В этом случае классические итерационные методы либо перестают работать, либо приводят к медленной скорости сходимости [1, 2]. Проблемы, возникающие при численном

решении уравнений Эйлера и Навье–Стокса и приводящие к медленной сходимости, показаны на рис. 1. (символы E и NS соответствуют уравнениям Эйлера и уравнениям Навье–Стокса). При решении уравнений Эйлера дискретная жесткость является следствием использования скалярного шага по времени. Основным источником трудностей решения уравнений Навье–Стокса состоит в использовании сеток с растянутыми и скошенными ячейками в пограничном слое [3]. Дополнительные трудности возникают при моделировании турбулентных течений. Для улучшения сходимости используется матричный шаг по времени и метод направленного округления сетки [4, 5].

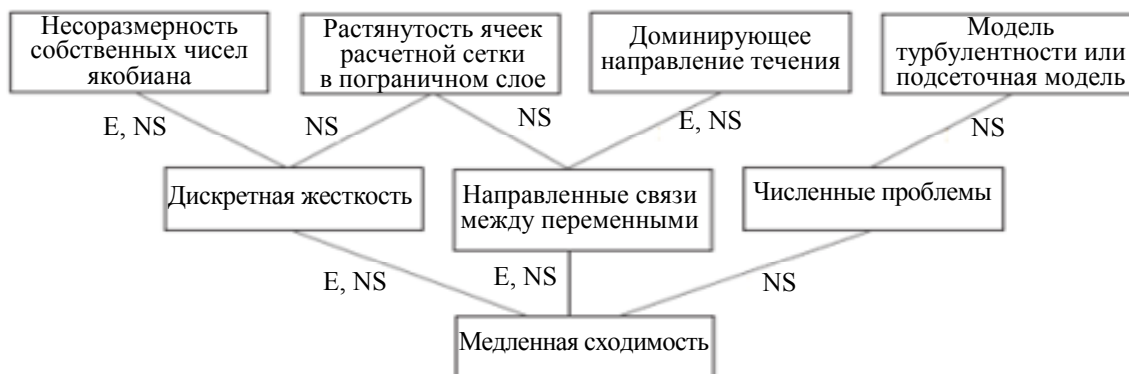


Рис. 1. Причины медленной сходимости итерационного процесса

Имеются два подхода к ускорению газодинамических расчетов, один из которых связан с ускорением сходимости [6, 7] (применение многосеточных технологий, методов предобуславливания и стабилизации численного решения), а другой – с использованием средств, предоставляемых современными параллельными системами обработки данных, включая графические процессоры общего назначения [8].

В настоящей работе обсуждается реализация и применение алгебраического многосеточного метода для решения задач газовой динамики, описываемых уравнениями Эйлера и Навье–Стокса. В отличие от геометрического подхода [5], реализация алгебраического многосеточного метода не требует информации о геометрии решаемой задачи, используя лишь структуру матрицы коэффициентов системы разностных уравнений.

В многосеточном методе обычный итерационный процесс комбинируется с коррекцией решения на последовательности грубых сеток. Одна итерация многосеточного метода (многосеточный цикл) включает в себя предварительное сглаживание (pre-smoothing); расчет невязки на текущем уровне сетки; ограничение и коррекцию невязки на грубой сетке; продолжение и интерполяцию ошибки на подробную сетку; коррекцию решения на подробной сетке с использованием поправки, интерполируемой с грубой сетки; заключительное сглаживание для погашения высокочастотных компонент погрешности, появляющихся после интерполяции на подробную сетку.

Многосеточный метод устанавливает лишь структуру вычислительного алгоритма, эффективность которого зависит от адаптации его отдельных компонентов к решаемой задаче [9]. Многообразие имеющихся подходов связывается с поиском компромисса между общей эффективностью алгоритма и объемом требуемой вычислительной работы. Имеющиеся реализации многосеточных методов различаются способом построения операторов ограничения и продолжения, выбором сглаживающей процедуры, реализацией многосеточного цикла, способом построения последовательности сеток. В отличие от имеющихся реализаций, в разработанном подходе используется метод, позволяющий преодолеть проблемы, связанные с наличием как положительных, так и отрицательных связей между переменными. Возможности подхода демонстрируются на примере расчета обтекания профиля на структурированных и неструктурированных сетках.

Реализация многосеточного метода

Конечно-объемная дискретизация уравнений Эйлера или Навье–Стокса на фиксированном сеточном уровне приводит к решению системы разностных уравнений

$$\mathbf{A}_h \mathbf{u}^h = \mathbf{f}^h. \quad (1)$$

Матрица \mathbf{A} размером $n \times n$ состоит из коэффициентов a_{ij} ($i, j=1, \dots, n$), связанных с дискретизацией. Вектор \mathbf{u} длиной n состоит из неизвестных узловых значений искомой функции. Вектор \mathbf{f} длиной n составлен из коэффициентов, обусловленных дискретизацией, а также из известных значений вектора решения, задаваемых граничными условиями.

Построение сеточных уровней. Вместо матрично-векторной терминологии используются термины, связанные с последовательностью фиктивных сеток, под узлами которых понимаются узлы направ-

ленного графа, соответствующего данной матрице. Узел сетки $i \in \Omega^h$ (имеет смысл переменной u_i^h) связан с переменной $j \in \Omega^h$, если $a_{ij}^h \neq 0$. Множество переменных, соседних с переменной i , имеет вид

$$N_i^h = \{j \in \Omega^h : j \neq i, a_{ij}^h \neq 0\} \quad (i \in \Omega^h).$$

Используя сеточную терминологию, уравнение $\mathbf{A}_h \mathbf{u}^h = \mathbf{f}^h$ можно рассматривать как фиктивное сеточное уравнение на подробной сетке Ω^h , а уравнение $\mathbf{A}_H \mathbf{u}^H = \mathbf{f}^H$ – как фиктивное сеточное уравнение на грубой сетке $\Omega^H \subset \Omega^h$. Под $\Omega^h = \{1, 2, \dots, n\}$ понимается множество индексов неизвестных. Множество Ω^H имеет меньшее число элементов и соответствует грубой сетке.

Переменные на грубом сеточном уровне строятся как некоторое подмножество переменных, принадлежащих подробной сетке [10–12]. Множество переменных подробной сетки разделяется на два несвязанных подмножества $\Omega^h = C^h \cup F^h$, где C^h – множество переменных, которые принадлежат грубой сетке (C -переменные), F^h – множество переменных, которые принадлежат подробной сетке (F -переменные).

Сеточному уровню Ω^k ($k = 1, 2, \dots, M-1$) соответствуют подмножества C^k и F^k . Каждому сеточному уровню соответствуют сеточные операторы $\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{A}^M$ (при этом $\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}$), а также операторы интерполяции $\mathbf{P}^k = \mathbf{I}_{k+1}^k$ и ограничения $\mathbf{R}^k = \mathbf{I}_k^{k+1}$, где $k = 1, 2, \dots, M-1$. Оператор ограничения представляет собой транспонированный оператор интерполяции $\mathbf{R}^k = (\mathbf{P}^k)'$ (под ' понимается операция транспонирования). Для построения матрицы системы на грубом сеточном уровне вычисляется произведение Галеркина $\mathbf{R}^k \mathbf{A}^k \mathbf{P}^k$. Сглаживание погрешности на каждом сеточном уровне производится при помощи сглаживающего оператора \mathbf{S}^k ($k = 1, 2, \dots, M-1$). Процесс огрубления повторяется до тех пор, пока размер системы не уменьшается до уровня, когда становится эффективным прямой метод ее решения (например, метод исключения Гаусса).

Для выбора матричных коэффициентов, используемых для построения грубого сеточного уровня, вводятся понятия сильного влияния переменных и сильной зависимости между переменными [11, 12]. Переменная i сильно зависит от переменной j , а переменная j имеет сильное влияние на переменную i , если матричный коэффициент a_{ij} по величине превосходит все внедиагональные коэффициенты матрицы (standard coarsening)

$$-a_{ij} > \theta \max_{k \neq i} (-a_{ik}). \quad (2)$$

Параметр $0 < \theta < 1$ в соотношении (2) контролирует число сильных связей между переменными (обычно $\theta = 0,25$). Множество S_i представляет собой множество всех переменных j , имеющих сильные связи с переменной i (множество переменных, от которых переменная i сильно зависит):

$$S_i = \left\{ j : j \neq i, -a_{ij} > \theta \max_{k \neq i} (-a_{ik}) \right\}.$$

Имеющиеся теоретические подходы относятся к решению скалярных эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных [13], дискретизация которых приводит к системе разностных уравнений с M -матрицей (в этом случае скорость сходимости метода не зависит от размера задачи). При наличии как отрицательных, так и положительных коэффициентов, стоящих вне главной диагонали, используются следующие определения:

$$a_{ij}^- = \begin{cases} a_{ij}, & \text{if } a_{ij} < 0, \\ 0, & \text{if } a_{ij} \geq 0, \end{cases} \quad a_{ij}^+ = \begin{cases} 0, & \text{if } a_{ij} \leq 0, \\ a_{ij}, & \text{if } a_{ij} > 0. \end{cases}$$

При этом имеется два несвязанных подмножества переменных

$$N_i^- = \{j \in N_i : a_{ij}^- < 0\}, \quad N_i^+ = \{j \in N_i : a_{ij}^+ > 0\}.$$

Наличие связей между переменными различного знака в уравнении (1) усложняет реализацию метода и приводит к замедлению сходимости.

Интерполяция на подробную сетку. Интерполяция погрешности решения $\mathbf{e}^h = \mathbf{I}_H^h \mathbf{e}^H$ определяется в виде

$$\mathbf{e}_i^h = \left(\mathbf{I}_H^h \mathbf{e}^H \right)_i = \begin{cases} e_i^H, & \text{if } i \in C^h, \\ \sum_{k \in P_i^h} w_{ik}^h e_k^H, & \text{if } i \in F^h, \end{cases} \quad (3)$$

где $P_i^h \subset C^h$ представляет собой множество переменных, участвующих в интерполяции. При интерполяции с грубой на подробную сетку погрешность решения e_i^h полагается равной e_i^H , если переменная i является C -переменной, и взвешенной сумме переменных из множества P_i^h , если переменная i принадлежит подмножеству F . Множество P_i^h является малым подмножеством множества C -переменных, находящихся в некоторой близости от переменной i , что гарантирует разреженность матрицы \mathbf{A}_H . С другой

стороны, множество P_i^h содержит достаточное число переменных, с которыми переменная i является сильно связанной.

Для простоты верхний индекс h опускается, а вместо (3) используется соотношение

$$e_i = \sum_{k \in P_i} w_{ik} e_k \quad (i \in F). \quad (4)$$

Локальное приближение для алгебраически гладкой погрешности решения имеет вид

$$e_i = -\frac{1}{a_{ii}} \sum_{j \in N_i} a_{ij} e_j \quad (i \in \Omega). \quad (5)$$

Реализация метода заключается в построении подходящего C/F разбиения, а также в определении множества интерполяционных переменных $P_i \subset C$ ($i \in F$) и весовых множителей w_{ik} таких, что соотношение (4) дает приемлемое приближение для любой алгебраически гладкой погрешности.

Точная процедура интерполяции дается соотношением (5), полагая $P_i = N_i$ и $w_{ik} = -a_{ik}/a_{ii}$. Подход требует построения такого C/F разбиения, что для каждой переменной $i \in F$ все переменные, соседние с переменной i , содержались бы в подмножестве C , и приводит к построению прямого метода решения системы разностных уравнений [11, 12]. Для построения эффективной вычислительной процедуры требуется построение малых подмножеств P_i , чтобы обеспечить разреженность оператора Галеркина и достичь высокой скорости сходимости.

Для прямой интерполяции (direct interpolation) $P_i \subset N_i$, а оператор интерполяции строится из соотношения (5) при известном подмножестве переменных, не участвующих в интерполяции (часть суммы, соответствующая алгебраически гладкой ошибке, для которой $j \in N_i \setminus P_i$).

Для матриц общего вида используются коэффициенты a_{ij}^+ и a_{ij}^- и подмножества N_i^+ и N_i^- , а положительные коэффициенты добавляются к коэффициентам, стоящим на главной диагонали. Процедура интерполяции определяется соотношением

$$\tilde{a}_{ii} e_i + \alpha_i \sum_{k \in P_i} a_{ik}^- e_k = 0, \quad (6)$$

где

$$\tilde{a}_{ii} = a_{ii} + \sum_{j \in N_i} a_{ij}^+, \quad \alpha_i = \frac{\sum_{j \in N_i} a_{ij}^-}{\sum_{k \in P_i} a_{ik}^-}.$$

Такой подход приводит к положительным весовым коэффициентам

$$w_{ik} = -\alpha_i \frac{a_{ik}^-}{\tilde{a}_{ii}} \quad (i \in F, k \in P_i).$$

В общем случае при построении процедуры интерполяции учет положительных связей в соотношении (6) оказывается более важным, чем учет отрицательных связей [11, 12] (для положительных связей погрешность решения изменяется наиболее медленно). Для некоторой переменной $i \in F$, имеющей как отрицательные, так и положительные связи, предполагается, что $N_i^- \neq \emptyset$ и $N_i^+ \neq \emptyset$, а C/F разбиение является таким, что как минимум одна связь любого знака принадлежит подмножеству C . Выбираются два множества интерполяционных переменных таких, что $\emptyset = P_i^- \subset C \cap N_i^-$ и $\emptyset = P_i^+ \subset C \cap N_i^+$.

Для улучшения процедуры интерполяции предполагается, что имеется такое C/F разбиение, при котором для каждой переменной $i \in F$ множество интерполяционных переменных $P_i \subset N_i \cap N_i^+$ является данным. Вместо непосредственного приближения неинтерполяционной части уравнения для переменной i в соотношении (5), производится исключение погрешностей решения e_j для всех переменных $j \notin P_i$, имеющих сильные связи с переменной i в уравнении j . Стандартная интерполяция (standard interpolation) приводит к расширению множества интерполяционных переменных (уменьшение разреженности оператора Галеркина), но оказывается достаточно эффективной на практике.

Сглаживание. Применение сглаживающей процедуры общего вида дает

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{S} \mathbf{u}_n + (\mathbf{I} - \mathbf{S}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{f}. \quad (7)$$

В качестве сглаживающего оператора выбирается матрица $\mathbf{S} = \mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}$, где \mathbf{Q} – нижняя треугольная часть матрицы \mathbf{A} . В качестве сглаживающей процедуры в соотношении (7) широкое применение находит метод Гаусса–Зейделя.

Показатели эффективности. Сходимость многосеточного метода зависит от изменения нормы погрешности решения

$$\|\mathbf{e}^k\|_{A_h} = (\mathbf{A}_h \mathbf{e}^k, \mathbf{e}^k)^{1/2}.$$

Скорость сходимости характеризуется уменьшением нормы невязки на двух соседних циклах $\rho = \|\mathbf{r}^{k+1}\|/\|\mathbf{r}^k\|$. Фактор сходимости получается при помощи осреднения скорости сходимости по всем многосеточным циклам (при достижении заданного уровня невязки) или при помощи осреднения по заданному числу циклов, если заданный уровень невязки в расчетах не достигается. Фактор асимптотической сходимости рассчитывается по отношению к норме невязки на первом многосеточном цикле.

Фактор сложности выражается в виде числа операций, которые необходимо выполнить на одной итерации, и требуемой для этого памяти. Операторная сложность (operator complexity) служит индикатором памяти, требуемой для реализации многосеточного метода

$$C_o = \sum_k \frac{|\mathbf{A}^{(k)}|}{|\mathbf{A}^{(1)}|},$$

где $|\mathbf{A}^{(k)}|$ – число ненулевых коэффициентов на уровне k .

Фактор сложности сетки (grid complexity) показывает, насколько быстро производится огрубление сетки:

$$C_G = \sum_k \frac{n_k}{n_1},$$

где n_k – число переменных (узлов сетки) на уровне k .

Сложность многосеточного цикла (cycle complexity) характеризуется параметром

$$C_c = \sum_k \frac{|\mathbf{A}^{(k)}|}{|\mathbf{A}^{(1)}|} \mu_k \gamma^k,$$

где $\mu_k = \mu_1 + \mu_2$. Параметр γ соответствует типу многосеточного цикла ($\gamma = 1$ для V-цикла и $\gamma = 2$ для W-цикла). Объединение фактора сходимости и сложности многосеточного цикла дает объем вычислительной работы, приходящейся на единицу точности, $C_w = -C_c/\log \rho$.

Результаты расчетов

Рассмотрим невязкое и вязкое обтекание профиля NACA0012 при числе Маха невозмущенного потока $M_\infty = 0,8$ и при различных углах атаки ($\alpha = 0^\circ$ и $\alpha = 1,25^\circ$). Расчетная область приводится на рис. 2. На входной границе задаются условия невозмущенного течения, а на выходной границе – условия свободного вытекания. На верхней и нижней границах расчетной области используются условия скольжения. При этом $R = 10C$, $H = 10C$ и $L = 30C$, где C – хорда профиля.

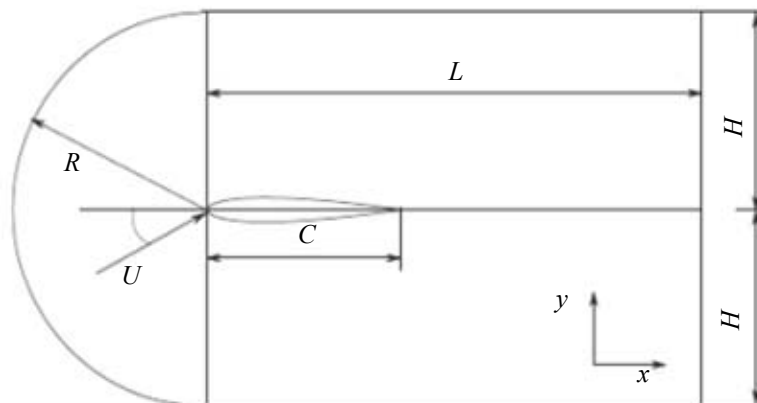


Рис. 2. Расчетная область

Многосеточная процедура реализуется в рамках V-цикла ($\mu_1 = 2$ и $\mu_2 = 1$). Для интегрирования по времени используется трех- (RK3) и пятишаговый (RK5) метод Рунге–Кутты, а для дискретизации невязких и вязких потоков – схема MUSCL и центрированная разностная схема. Детали конечно-объемной дискретизации обсуждаются в работе [14]. Для построения C/F разбиения применяется метод стандартного огрубления. В качестве интерполяции используется метод стандартной интерполяции, а для сглаживания – метод Гаусса–Зейделя. Для вычисления произведения Галеркина, хранения разреженных матриц и реализации операций матричной алгебры используется формат ELLPACK.

Расчеты проводятся как на структурированной сетке (вариант 1, сетка типа O), так и на неструктурированной сетке с треугольными ячейками (вариант 2) различной разрешающей способности. Расчетные сетки приводятся на рис. 3 (показана часть расчетной области). При решении вязкой задачи узлы сетки сгущаются около поверхности профиля для надлежащего разрешения пограничного слоя. Максимальное отношение сторон ячеек сетки составляет 500.

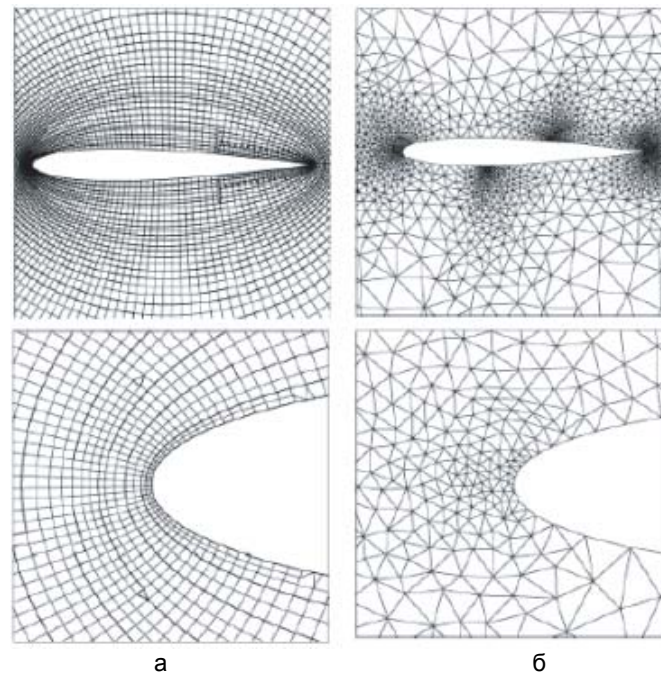


Рис. 3. Структурированная (а, вариант 1) и неструктурированная (б, вариант 2) сетки

Для невязкой задачи распределения коэффициента давления по поверхности профиля показаны на рис. 4 и имеют практически одинаковый вид как на структурированной, так и на неструктурированной сетках. Решение дает сильный скачок на верхней поверхности профиля (при $x/L = 0,68$) и слабый скачок на его нижней поверхности (при $x/L = 0,32$). Для условий задачи интегрирование давления по поверхности профиля дает коэффициенты трения и подъемной силы ($C_x = 0,0227$ и $C_y = 0,3527$), хорошо согласующиеся с данными [15].

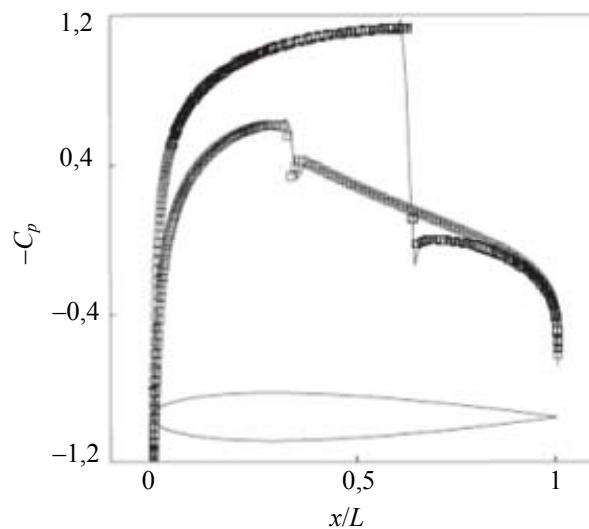


Рис. 4. Распределения коэффициента давления по поверхности профиля, полученные на структурированной (сплошная линия) и неструктурированной (значки \square) сетках

История сходимости на структурированной и неструктурированной сетках показана на рис. 5. В отличие от осциллирующей сходимости на структурированной сетке, решение задачи на неструктурированной сетке дает гладкое изменение невязки. Уровень сходимости (минимальный уровень невязки) примерно одинаковый в обоих случаях.

Информация о сходимости многосеточной процедуры приводится в табл. 1. Качество огрубления сетки характеризуется параметрами, представляющими собой общее число ячеек и узлов сеток различной разрешающей способности (параметры C_{Gv} и C_{Gc}). Зависимость скорости сходимости от разрешения сетки относительно слаба.

Моделирование вязкого обтекания профиля проводится при числе Рейнольдса $Re=500$ (число Рейнольдса рассчитывается по хорде профиля). Решение вязкой задачи дает распределение коэффициента давления по поверхности профиля, слабо отличающееся от решения, показанного на рис. 4. Коэффициенты

сопротивления и подъемной силы принимают значения $C_x = 0,0225$ и $C_y = 0,3536$. Относительное различие результатов решения невязкой и вязкой задачи составляет 0,88% для коэффициента сопротивления и 0,26% для коэффициента подъемной силы. Информация о сходимости многосеточной процедуры приводится в табл. 2. Скорость сходимости при нулевом угле атаки оказывается лучше, чем при угле атаки $\alpha = 1,25^\circ$.

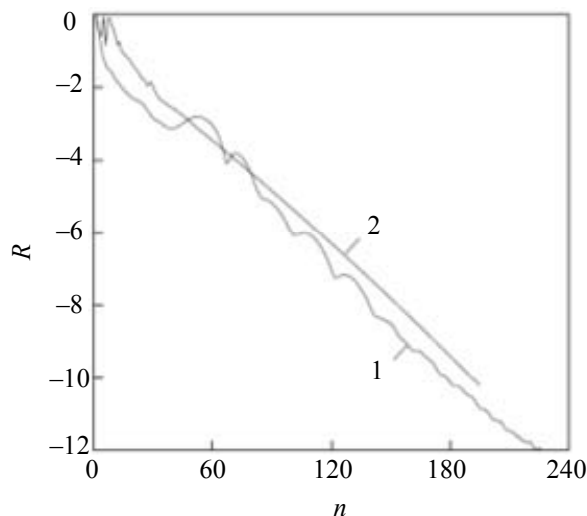


Рис. 5. Изменение невязки в зависимости от числа многосеточных циклов на структурированной (линия 1) и на неструктурированной (линия 2) сетках

Размер	Число уровней	C_{Gv}	C_{Gc}	ρ при $\alpha=0^\circ$		ρ при $\alpha=1,25^\circ$	
				RK3	RK5	RK3	RK5
2607	2	1,58	1,34	0,24	0,18	0,28	0,18
5258	3	1,64	1,36	0,34	0,24	0,25	0,17
10273	4	1,67	1,36	0,25	0,24	0,24	0,17
20621	5	1,64	1,36	0,34	0,21	0,23	0,21

Таблица 1. Фактор сходимости при решении уравнений Эйлера

Размер	Число уровней	C_{Gv}	C_{Gc}	ρ при $\alpha = 0^\circ$		ρ при $\alpha = 1,25^\circ$	
				RK3	RK5	RK3	RK5
8872	2	1,64	1,37	0,42	0,37	0,26	0,21
18416	3	1,88	1,44	0,43	0,37	0,61	0,57
36388	4	1,67	1,37	0,41	0,35	0,52	0,45

Таблица 2. Фактор сходимости при решении уравнений Навье–Стокса

На подробной сетке применение алгебраического многосеточного метода дает фактор сходимости, равный 0,55 для уравнений Эйлера и 0,81 для уравнений Навье–Стокса. Для геометрического многосеточного метода, реализованного в работе [5], асимптотический фактор сходимости составляет 0,80 для уравнений Эйлера и 0,91 для уравнений Навье–Стокса.

В большинстве реализаций полагается, что $\theta = 0,25$, а числу уровней сетки присваивается максимальное возможное значение [10, 16]. На практике коэффициент θ изменяется в достаточно широких пределах (обычно от 0,2 до 0,4). Значение $\theta = 0,25$ соответствует интерполяции по четырем точкам на подробной сетке (в геометрическом методе этому значению соответствует увеличение шага сетки в два раза при переходе от подробной сетки к грубой). Изменение параметра θ от 0,2 до 0,4 дает максимальное увеличение времени счета на 7,5% на структурированной сетке. Оптимальным значением на неструктурированной сетке является 0,0625. Выбор оптимального числа внутренних итераций позволяет сократить время счета на 10% в зависимости от граничных условий задачи.

Заключение

Предложен подход к эффективной реализации многосеточной процедуры на неструктурированных сетках. К особенностям реализации относятся подход, связанный с хранением положительных и отрицательных связей между переменными, а также реализация операций с разреженными матрицами в формате ELLPACK. Полученные результаты показывают, что применительно к решению задач механики жидкости алгебраический многосеточный метод позволяет ускорить сходимость итерационного процесса, требуя сравнительно небольших модификаций программного кода. Алгебраический многосеточный метод

оказывается чувствительным к изменению сетки и ее разрешению на самом грубом сеточном уровне. Оценки показывают, что выбор параметров в алгебраическом многосеточном методе позволяет сократить общее время счета на 10%. Подходящий выбор операторов продолжения и ограничения позволяет сгладить высокочастотные моды погрешности решения при переходе к более грубому сеточному уровню. Учет сильных связей между переменными в процедуре интерполяции приводит к ускорению сходимости, в то время как слабые связи оказывают негативное влияние на сходимость, увеличивая объем вычислительной работы. Зависимость подхода от свойств сглаживающей процедуры сравнительно слаба.

В отличие от геометрического подхода, алгебраический метод допускает сравнительно простую программную реализацию в рамках существующего программного кода. Дополнительной реализации и модификации требуют структуры данных, предназначенные для хранения разреженных матриц, а также реализация операций матричной алгебры с разреженными матрицами. Вместе с тем, метод построения последовательности сеток и его адаптация к решаемой задаче (невязкая/вязкая, ламинарная/турбулентная) во многом определяют успех применения многосеточной технологии ускорения сходимости.

Литература

1. Brandt A. Guide to multigrid development // *Lecture Notes in Mathematics*. 1982. V. 960. P. 220–312.
2. Wesseling P. An introduction to multigrid methods. Chichester: John Wiley & Sons, 1992. 152 p.
3. Pierce N.A., Giles M.B., Jameson A., Martinelli L. Accelerating three-dimensional Navier-Stokes calculations // *Proc. 13th Computational Fluid Dynamics Conference*. 1997. P. 676–698.
4. Волков К.Н. Блочное предобуславливание уравнений Эйлера и Навье-Стокса при моделировании низкоскоростных течений на неструктурированных сетках // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2009. Т. 49. № 10. С. 1868–1884.
5. Волков К.Н. Многосеточные технологии для решения задач газовой динамики на неструктурированных сетках // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2010. Т. 50. № 11. С. 1938–1952.
6. Cagnone J.S., Sermeus K., Nadarajah S.K., Laurendeau E. Implicit multigrid schemes for challenging aerodynamic simulations on block-structured grids // *Computers and Fluids*. 2011. V. 44. N 1. P. 314–327.
7. Colin Y., Deniau H., Boussuge J.-F. A robust low speed preconditioning formulation for viscous flow computations // *Computers and Fluids*. 2011. V. 47. N 1. P. 1–15.
8. Brodtkorb A.R., Hagen T.R., Satra M.L. Graphics processing unit (GPU) programming strategies and trends in GPU computing // *Journal of Parallel and Distributed Computing*. 2013. V. 73. N 1. P. 4–13.
9. Cleary A.J., Falgout R.D., Henson V.E., Jones J.E., Manteuffel T.A., McCormick S.F., Miranda G.N., Ruge J.W. Robustness and scalability of algebraic multigrid // *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2000. V. 21. N 5. P. 1886–1908.
10. Ruge J., Stuben K. Algebraic multigrid (AMG) / In: *Multigrid Methods (Frontiers in Applied Mathematics)* / Ed. S.F. McCormick. Philadelphia: SIAM, 1987. V. 3. P. 73–130.
11. Stuben K. A review of algebraic multigrid // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2001. V. 128. N 1–2. P. 281–309.
12. Stuben K. An introduction to algebraic multigrid. In: *Multigrid* / Ed. U. Trottenberg, C. Oosterlee, A. Schuller. London: Academic Press, 2001. P. 413–532.
13. Yang U.M. Parallel algebraic multigrid methods – high performance preconditioners // *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. 2006. V. 51. P. 209–236.
14. Волков К.Н. Дискретизация уравнений Навье-Стокса на неструктурированной сетке при помощи метода контрольного объема и разностных схем повышенной разрешающей способности // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2008. Т. 48. № 7. С. 1250–1273.
15. AGARD-AR-211: Test cases for inviscid flow field methods // *Advisory Reports*. 1986.
16. Suero R., Pinto M.A.V., Marchi C.H., Araki L.K., Alves A.C. Analysis of algebraic multigrid parameters for two-dimensional steady-state heat diffusion equations // *Applied Mathematical Modelling*. 2012. V. 36. N 7. P. 2996–3006.

- Волков Константин Николаевич** – доктор физико-математических наук, научный сотрудник, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия; старший лектор, Университет Кингстона, Лондон, Великобритания, k.volkov@kingston.ac.uk
- Konstantin N. Volkov** – D.Sc, scientific researcher, ITMO University, Saint Petersburg, Russia; Senior Lecturer, Kingston University, London, United Kingdom, k.volkov@kingston.ac.uk

Принято к печати 15.05.14
Accepted 15.05.14