УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ
январь–февраль 2015 Том 15 № 1 ISSN 2226-1494 http://ntv.ifmo.ru/
SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL OF INFORMATION TECHNOLOGIES, MECHANICS AND OPTICS
January–February 2015 Vol. 15 No 1 ISSN 2226-1494 http://ntv.ifmo.ru/en

УДК 531.011,531.36,531.394,531.391.3

ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ К НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Г.И. Мельников[a], С.Е. Иванов[a], В.Г. Мельников[a], К.С. Малых[a]

[a] Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация
Адрес для переписки: melnikov@mail.ifmo.ru

Информация о статье
Поступила в редакцию 19.11.14, принята к печати 18.12.14
doi: 10.17586/2226-1494-2015-15-1-149-154
Язык статьи – русский
Ссылка для цитирования: Мельников Г.И., Иванов С.Е., Мельников В.Г., Малых К.С. Применение модифицированного метода преобразований к нелинейной динамической системе // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2015. Том 15. № 1. С. 149–154

Аннотация. Рассматривается математическая модель динамической системы с одной степенью свободы, представленная в виде обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейными частями в форме многочленов с постоянными и периодическими коэффициентами. Представлен модифицированный метод для исследования автоколебаний нелинейных механических систем. Авторами разработан уточненный метод преобразования и интегрирования уравнения, основанный на методе нормализации Пуанкаре–Дюлака. Уточнение метода заключается в учете нелинейных членов высших порядков методом экономизации Чебышева, что улучшает точность результатов вычислений. Выполняется аппроксимация остаточных членов высших порядков однородными формами меньших порядков, в рассмотренном случае кубическими формами. В качестве примера рассмотрено применение модифицированного метода для уравнения Ван-дер-Поля и получены выражения для амплитуды и фазы автоколебаний в аналитическом виде. Выполнено сравнение решения уравнения Ван-дер-Поля, найденного разработанным методом, с точным решением численным методом Рунге–Кутта. Погрешность решения модифицированным методом в два раза меньше и составляет 1%, что показывает применимость разработанного метода для исследования автоколебаний нелинейных динамических систем с постоянными и периодическими параметрами.
Ключевые слова: автоколебания, нелинейные системы, экономизация Чебышева, метод Пуанкаре-Дюлака.

APPLICATION OF MODIFIED CONVERSION METHOD TO A NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEM

G.I. Melnikov[a], S.E. Ivanov[a], V. G. Melnikov[a], K.S. Malykh[a]

[a] ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation
Corresponding author: melnikov@mail.ifmo.ru

Article info
Received 19.11.14, accepted 18.12.14
doi: 10.17586/2226-1494-2015-15-1-149-154
Article in Russian
Reference for citation: Melnikov G.I., Ivanov S.E., Melnikov V. G., Malykh K.S. Application of modified conversion method to a nonlinear dynamical system. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2015, vol. 15, no. 1, pp. 149–154 (in Russian)

Abstract. The paper deals with a mathematical model of dynamical system with single degree of freedom, presented in the form of ordinary differential equations with nonlinear parts in the form of polynomials with constant and periodic coefficients. A modified method for the study of self-oscillations of nonlinear mechanical systems is presented. A refined method of transformation and integration of the equation, based on Poincare-Dulac normalization method has been developed. Refinement of the method lies in consideration of higher order nonlinear terms by Chebyshev economization technique that improves the accuracy of the calculations. Approximation of the higher order remainder terms by homogeneous forms of lower orders is performed; in the present case, it is done by cubic forms. An application of the modified method for the Van-der-Pol equation is considered as an example; the expressions for the amplitude and the phase of the oscillations are obtained in an analytical form. The comparison of the solution of the Van-der-Pol equation obtained by the developed method and the exact solution is performed. The error of the solution obtained by the modified method equals to 1%, which shows applicability of the developed method for analysis of self-oscillations of nonlinear dynamic systems with constant and periodic parameters.
Keywords: oscillations, nonlinear systems, Chebyshev economization, method of Poincare-Dulac.

Введение

Математической моделью многих механических систем является система нелинейных динамических уравнений полиномиальной структуры [1]. Исследование нелинейных систем представляет собой сложную актуальную задачу по сравнению с исследованием линейных систем. В современной теории нелинейных динамических систем применяется метод малого параметра [2], метод Ван-дер-Поля, метод усреднения [3], метод гармонического баланса [4], метод возмущений, представленный в работах Пуанкаре и являющийся вариантом метода малого параметра. Метод решения нелинейных задач Крылова–Боголюбова [5] позволяет строить высшие приближения на основании метода усреднения. В методе многочленных преобразований, предложенном в работе Г.И. Мельникова [6], в качестве порождающего решения выбрано решение преобразованных уравнений, которое связано многочленным преобразованием с исходными дифференциальными уравнениями.

В отличие от метода многочленных преобразований [6, 7], в методах Ван-дер-Поля и усреднения рассматривается укороченное уравнение и находится приближенное решение, не учитывающее все слагаемые нелинейного полинома высокой степени. В методе гармонического баланса приближенное решение учитывает только составляющие основной частоты. В методе возмущений и малого параметра приближенное решение ищется в виде степенного ряда с малым параметром, если ряд сходится, и точность существенно зависит от количества поправок к нулевому приближению.

В настоящей работе предложен уточненный метод многочленных преобразований для исследования автоколебаний нелинейных механических систем с одной степенью свободы. Рассматриваемые динамические системы представлены в виде обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейными частями в форме многочленов с постоянными и периодическими коэффициентами. Авторами разработан уточненный метод многочленных преобразований, основанный на методе нормализации Пуанкаре–Дюлака [8]. Уточнение метода заключается в учете нелинейных членов высших порядков методом экономизации Чебышева [9], что улучшает точность результатов вычислений. Выполняется аппроксимация остаточных членов высших порядков однородными кубическими формами. Приведем основные этапы модифицированного метода многочленных преобразований и применим метод для уравнения Ван-дер-Поля.

Модифицированный метод многочленных преобразований

Рассмотрим дифференциальное уравнение движения нелинейной автономной механической системы, содержащее однородную кубическую форму [10]:

$$\ddot{q}+2\alpha\dot{q}+\gamma q=\varepsilon P(\dot{q},q);\, P(\dot{q},q)=\sum_{\nu=0}^{3}p_\nu \dot{q}^\nu q^{3-\nu}\ , \tag{1}$$

где α,ε – малые положительные константы.

Уравнение приведем к безразмерному виду в квадратной области фазовой плоскости, причем используем отображение прямоугольной области на квадратную область посредством линейного масштабного преобразования независимой переменной:

$$\overline{G}=\{(\dot{q},q):|\dot{q}|\le r,|q|\le r\}\ .$$

Предполагаем, что корни характеристического уравнения линейной части системы – комплексные с малыми вещественными частями:

$$\lambda=-\alpha+i\beta,\ \overline{\lambda}=-\alpha-i\beta;\ \beta=\sqrt{\gamma-\alpha^2}\ .$$

Применяя оператор дифференцирования $D=\dfrac{d}{dt}$, запишем левую часть уравнения (1) в форме

$$(D-\lambda)(D-\overline{\lambda})q=(D-\lambda)x=(D-\overline{\lambda})\overline{x}\ ,$$

где введены комплексные переменные

$$x=\dot{q}-\overline{\lambda}q,\overline{x}=\dot{q}-\lambda q\ ,$$

или

$$\dot{q}=-i\mu(\lambda x-\overline{\lambda}\overline{x}),\ q=-i\mu(x-\overline{x});\ \mu=1/2\beta\ .$$

Новые переменные удовлетворяют дифференциальным уравнениям с одинаковыми кубическими формами:

$$\dot{x}=\lambda x+\varepsilon f(x,\overline{x}),\dot{\overline{x}}=\overline{\lambda}\overline{x}+\varepsilon f(x,\overline{x})\ .$$

Отметим, что функция выражена в форме

$$Q=x\overline{x}=\dot{q}^2+2\alpha\dot{q}q+\gamma q^2$$

и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{Q}+2\alpha Q=2\varepsilon(\dot{q}+\alpha q)P(\dot{q},q);\ \dot{Q}+2\alpha Q=2\varepsilon\sum_{\nu=0}^{4}(p_{\nu-1}+\alpha p_\nu)\dot{q}^\nu q^{4-\nu}\ .$$

Согласно методу Пуанкаре–Дюлака, для уравнения (1) выполняется замена переменных:

$$y = x + \varepsilon\sum_{\nu=0}^{3} a'_\nu x^\nu \overline{x}^{3-\nu},\ \overline{y} = \overline{x} + \varepsilon\sum_{\nu=0}^{3} \overline{a}'_\nu x^{3-\nu}\overline{x}^\nu .$$

Затем можно выполнить нелинейную замену кубических переменных с коэффициентами a'_ν, назначенными из условия упрощений дифференциальных уравнений, с тем, чтобы в преобразованном уравнении остался только один неустранимый кубический моном и малая невязка δ':

$$\dot{y} = \lambda y + \varepsilon a' y^2 \overline{y} + \delta',\ \dot{\overline{y}} = \overline{\lambda}\overline{y} + \varepsilon\overline{a}' y \overline{y}^2 + \overline{\delta}' .$$

Перейдем к показательной форме [11], полагая

$$y = \rho\exp(i\theta), u = \rho^2 .$$

В силу уравнения (1) получаем систему

$$\dot{y}e^{-i\theta} = \dot{\rho} + \rho i\theta = (-\alpha + i\beta)\rho - \varepsilon(a^* + ib^*)\rho^3 ,$$

$$\dot{\rho} = -\alpha\rho - \varepsilon a^*\rho^3, \dot{\theta} = \beta - \varepsilon b^*\rho^2 .$$

Получим дифференциальные уравнения для амплитуды $u = \rho^2$ и фазы θ

$$\dot{u} = -2\alpha u - 2\varepsilon a u^2 , \tag{2}$$

$$\dot{\theta} = \beta - \varepsilon b u . \tag{3}$$

В рамках преобразования вещественных переменных получим уравнение (2) и (3) новым способом. Введем вещественную переменную, составленную из однородной квадратичной формы и однородной формы четвертой степени с неопределенными коэффициентами:

$$u = Q + \varepsilon V; V = \sum_{\nu=0}^{4} a_\nu \dot{q}^\nu q^{4-\nu}, \qquad Q = \dot{q}^2 + 2\alpha\dot{q}q + \gamma q^2 .$$

Для краткости записи в дальнейшем будем опускать знаки суммирования.

Предварительно приведем подобные члены в выражении посредством сдвига в отсчете нелинейных индексов:

$$\dot{V} = (4-\nu')a_{\nu'}\dot{q}^{\nu'+1}q^{3-\nu'} - 2\alpha\nu a_\nu \dot{q}^\nu q^{4-\nu} - \gamma\nu' a_{\nu'}\dot{q}^{\nu'-1}q^{5-\nu'} + \varepsilon R,$$

$$\dot{V} = U + \varepsilon R; U = [(5-\nu)a_{\nu-1} - 2\alpha\nu a_\nu - \gamma(\nu+1)a_{\nu+1}]\dot{q}^\nu q^{4-\nu},$$

$$R = \nu a_\nu \dot{q}^{\nu-1}q^{4-\nu}P = \nu a_\nu p_{\nu'}\dot{q}^{\nu'+\nu-1}q^{7-\nu'-\nu} = \nu a_\nu p_{k+1-\nu}\dot{q}^k q^{6-k} ,$$

$$R = \sum_{k=0}^{6} R_k \dot{q}^k q^{6-k};\ R_k = a_1 p_k + 2a_2 p_{k-1} + 3a_3 p_{k-2} + 4a_4 p_{k-3} ,$$

$$QV = a_\nu \dot{q}^{\nu+2}q^{4-\nu} + 2\alpha a_\nu \dot{q}^{\nu+1}q^{5-\nu} + \gamma a_\nu \dot{q}^\nu q^{6-\nu} = (a_{k-2} + 2\alpha a_{k-1} + \gamma a_k)\dot{q}^k q^{6-k},$$

$$QV = \sum_{k=0}^{6} R'_k \dot{q}^k q^{6-k};\ R'_k = a_{k-2} + 2\alpha a_{k-1} + \gamma a_k . \tag{4}$$

Найдем выражение невязки, учитывая (4), и пренебрегая величинами третьего порядка малости:

$$U = Q + \varepsilon V, \tag{5}$$

$$\dot{u} \approx -2\alpha u - 2\varepsilon a u^2 ,\ \ \delta = \dot{u} + 2\alpha u + 2\varepsilon a u^2 . \tag{6}$$

Нелинейную степенную форму экономизируем по методу Чебышева [12].

Подставим выражение (6) в формулу (5):

$$\delta = \dot{Q} + 2\alpha Q + \varepsilon[\dot{V} + 2\alpha V + 2aQ^2] + 4\varepsilon^2 aQV + 2\varepsilon^3 aV^2 .$$

Выделим элементы второго порядка малости:

$$\delta = \varepsilon[2(p_{\nu-1} + 2p_\nu)\dot{q}^\nu q^{4-\nu} + \nu a_\nu(-2\alpha\dot{q} - \gamma q)\dot{q}^{\nu-1}q^{4-\nu} + 2\alpha V + 2qQ^2] + \varepsilon^2 W_6 , \tag{7}$$

$$W_6 = 4aQV + \nu a_\nu \dot{q}^{\nu-1}q^{4-\nu}p = 4a(\dot{q}^2 + 2\alpha\dot{q}q + \gamma q^2)a_{\nu'}\dot{q}^{\nu'}q^{4-\nu'} + \nu a_\nu p\dot{q}^{\nu'+\nu-1}q^{7-\nu'-\nu} ,$$

$$W_6 = 4a(a_{k-2} + 2\alpha a_{k-1} + \gamma a_k)\dot{q}^k q^{6-k} + \nu a_\nu p_{k+1-\nu}\dot{q}^k q^{6-k} . \tag{8}$$

Представим выражение (8) как

$$W_6 = \sum_{k=0}^{6} A_k \dot{q}^k q^{6-k} ,\quad A_k = \sum_{\nu=0}^{3} \nu a_\nu p_{k+1-\nu} + 4a(\gamma a_k + 2\alpha a_{k-1} + a_{k-2}) .$$

Применим экономизацию по Чебышеву [13] в области $\overline{G} = \{(\dot{q}, q) : |\dot{q}| \le r, |q| \le r\}$ для формы W_6 :

$$\dot{q}^3 \approx h\dot{q}, q^3 \approx hq; (\dot{q}, q) \in \overline{G} ,\ h = \frac{3}{4}r^2 .$$

Выполним аппроксимацию формы W_6:

$$W_6 \approx W_4 = h\left(A_0 q^4 + A_1 \dot{q} q^3 + A_2 \dot{q}^2 q^2 + \frac{1}{2} A_3 (\dot{q}^3 q + \dot{q} q^3) + A_4 \dot{q}^2 q^2 + A_5 \dot{q}^3 q + A_6 \dot{q}^4 \right),$$

$$W_6 \approx W_4 = \sum_{\nu=0}^{4} B_\nu \dot{q}^\nu q^{4-\nu};\ B_0 = A_0;\ B_1 = A_1 + \frac{1}{2} A_3;\ B_2 = A_2 + A_4;\ B_3 = A_5 + \frac{1}{2} A_3;\ B_4 = A_6\,. \tag{9}$$

Сделаем подстановку выражения (9) в формулу (7):

$$\delta = \varepsilon\{[2(\alpha p_\nu + p_{\nu-1}) - 2\alpha\nu a_\nu - \gamma(\nu+1)a_{\nu+1} + 2\alpha a_\nu + \varepsilon h B_\nu]\dot{q}^\nu q^{4-\nu} + 2aQ^2\}, \tag{10}$$

$$Q^2 \equiv \sum_{\nu=0}^{4} c_\nu \dot{q}^\nu q^{4-\nu};\ c_0 = \gamma^2;\ c_1 = 4\alpha\gamma;\ c_2 = 4\alpha^2 + 2\gamma;\ c_3 = 4\alpha;\ c_4 = 1.$$

В соответствии с методом Пуанкаре–Дюлака [14] приравняем выражение в формуле (10) к нулю:

$$\begin{gathered} 2(\alpha p_\nu + p_{\nu-1}) - \gamma(\nu+1)a_{\nu+1} - 2\alpha(\nu-1)a_\nu + 2ac_\nu + \varepsilon h B_\nu = 0 \\ (\nu = 0,...,4) \end{gathered}\ . \tag{11}$$

Найдено решение системы уравнений (11). Искомые коэффициенты представлены в следующей форме:

$$\begin{aligned} a = (&-24\alpha^2\gamma^3\varepsilon h p_2 p_3 - 24\alpha^2\gamma^3\varepsilon h p_3 p_4 - 96\alpha^2\gamma^2\varepsilon h p_0 p_3 - 72\alpha^2\gamma^2\varepsilon h p_2 p_3 + 48\alpha^2\gamma\varepsilon h p_0 p_1 + \\ &24\alpha^2\gamma\varepsilon h p_1 p_2 - 24\alpha^2\gamma\varepsilon h p_0 p_3 - 51\alpha\gamma^4\varepsilon h p_3^2 - 12\alpha\gamma^3\varepsilon h p_3^2 + 30\alpha\gamma^3\varepsilon h p_1 p_3 - 9\alpha\gamma^2\varepsilon h p_1^2 - 9\alpha\gamma^2\varepsilon h p_0 p_2 + \\ &6\alpha\gamma^2\varepsilon h p_1 p_3 - 18\alpha\gamma^2\varepsilon h p_0 p_4 - 24\gamma^4\varepsilon h p_3 p_4 - 12\gamma^3\varepsilon h p_2 p_3 + 12\gamma^3\varepsilon h p_1 p_4 - 24\alpha^4\gamma p_1 + 24\alpha^3\gamma^2 p_2 - \\ &24\alpha^3\gamma p_0 - 18\alpha^2\gamma^3 p_3 + 24\alpha^2\gamma^2 p_1 + 12\alpha\gamma^4 p_4 - 18\alpha\gamma^3 p_2 + 12\gamma^4 p_3) / (12\gamma^3(2\alpha^2 - \gamma))\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 = (&24\alpha^2\gamma^3\varepsilon h p_2 p_3 + 24\alpha^2\gamma^3\varepsilon h p_3 p_4 + 120\alpha^2\gamma^2\varepsilon h p_0 p_3 + 72\alpha^2\gamma^2\varepsilon h p_2 p_3 - 48\alpha^2\gamma\varepsilon h p_0 p_1 - \\ &24\alpha^2\gamma\varepsilon h p_1 p_2 + 24\alpha^2\gamma\varepsilon h p_0 p_3 + 51\alpha\gamma^4\varepsilon h p_3^2 + 12\alpha\gamma^3\varepsilon h p_3^2 - 30\alpha\gamma^3\varepsilon h p_1 p_3 + 9\alpha\gamma^2\varepsilon h p_1^2 + 9\alpha\gamma^2\varepsilon h p_0 p_2 - \\ &6\alpha\gamma^2\varepsilon h p_1 p_3 + 18\alpha\gamma^2\varepsilon h p_0 p_4 + 24\gamma^4\varepsilon h p_3 p_4 - 12\gamma^3\varepsilon h p_0 p_3 + 12\gamma^3\varepsilon h p_2 p_3 - 12\gamma^3\varepsilon h p_1 p_4 + 24\alpha^4\gamma p_1 - \\ &24\alpha^3\gamma^2 p_2 + 18\alpha^2\gamma^3 p_3 - 24\alpha^2\gamma^2 p_1 - 12\alpha\gamma^4 p_4 + 18\alpha\gamma^3 p_2 + 12\alpha\gamma^2 p_0 - 12\gamma^4 p_3) / (6\gamma^2(\gamma - 2\alpha^2))\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 = (&-12\alpha^2\gamma^2 p_0 + 6\gamma^3 p_0 - 12\alpha^2\gamma\varepsilon h p_0^2 + 6\gamma^2\varepsilon h p_0^2 - 60\alpha^3\gamma^2 p_1 + 6\alpha\gamma^3 p_1 - \\ &6\alpha^2\gamma\varepsilon h p_1^2 + 3\gamma^2\varepsilon h p_1^2 + 18\alpha^2\gamma^2\varepsilon h p_1^2 + 36\alpha^2\gamma^3 p_2 - 6\alpha^2\gamma\varepsilon h p_0 p_2 + 3\gamma^2\varepsilon h p_0 p_2 + \\ &18\alpha^2\gamma^2\varepsilon h p_0 p_2 + 36\alpha^3\gamma^3 p_3 - 24\alpha\gamma^4 p_3 + 8\alpha^2\gamma^2\varepsilon h p_1 p_3 - 10\gamma^3\varepsilon h p_1 p_3 - 48\alpha^2\gamma^3\varepsilon h p_1 p_3 - \\ &6\gamma^4\varepsilon h p_1 p_3 + 24\alpha\gamma^3\varepsilon h p_2 p_3 - 10\alpha^2\gamma^3\varepsilon h p_3^2 + 54\alpha^2\gamma^4\varepsilon h p_3^2 + 36\alpha^2\gamma^2\varepsilon h p_0 p_4 + \\ &48\alpha\gamma^4\varepsilon h p_3 p_4 - 24\alpha\gamma^3\varepsilon h p_1 p_4 + 24\gamma^5\varepsilon h p_3^2 + 17\gamma^4\varepsilon h p_3^2 - 24\alpha^2\gamma^4 p_4) / (6\gamma^3(\gamma - 2\alpha^2))\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 = (&-36\alpha^3\gamma p_0 + 6\alpha\gamma^2 p_0 + 6\alpha\gamma\varepsilon h p_0^2 + 42\alpha^2\gamma^2 p_1 - 6\gamma^3 p_1 + 72\alpha^2\gamma\varepsilon h p_0 p_1 - 12\gamma^2\varepsilon h p_0 p_1 + \\ &3\alpha\gamma\varepsilon h p_1^2 - 9\alpha\gamma^2\varepsilon h p_1^2 + 36\alpha^3\gamma^2 p_2 - 24\alpha\gamma^3 p_2 + 3\alpha\gamma\varepsilon h p_0 p_2 - 9\alpha\gamma^2\varepsilon h p_0 p_2 + 36\alpha^2\gamma\varepsilon h p_1 p_2 - \\ &6\gamma^2\varepsilon h p_1 p_2 - 18\alpha^2\gamma^3 p_3 + 12\gamma^4 p_3 - 36\alpha^2\gamma\varepsilon h p_0 p_3 + 6\gamma^2\varepsilon h p_0 p_3 + 36\alpha^3\gamma^2\varepsilon h p_1 p_3 - \\ &36\alpha^2\gamma^3\varepsilon h p_2 p_3 - 36\alpha^2\gamma^3\varepsilon h p_3 p_4 + 144\alpha^2\gamma^2\varepsilon h p_0 p_3 - 108\alpha^2\gamma^2\varepsilon h p_2 p_3 - 27\alpha\gamma^4\varepsilon h p_3^2 + 5\alpha\gamma^3\varepsilon h p_3^2 + \\ &24\alpha\gamma^3\varepsilon h p_1 p_3 - 4\alpha\gamma^2\varepsilon h p_1 p_3 - 18\alpha\gamma^2\varepsilon h p_0 p_4 + 6\gamma^4\varepsilon h p_2 p_3 - 18\gamma^4\varepsilon h p_3 p_4 + 24\gamma^3\varepsilon h p_0 p_3 + \\ &6\gamma^3\varepsilon h p_2 p_3 + 12\gamma^3\varepsilon h p_1 p_4 + 12\alpha\gamma^4 p_4) / (9\gamma^3(2\alpha^2 - \gamma))\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 = (&-96\alpha^2\gamma^3\varepsilon h p_3^2 - 68\alpha^2\gamma^2\varepsilon h p_3^2 + 24\alpha^2\gamma^2\varepsilon h p_1 p_3 + 40\alpha^2\gamma\varepsilon h p_1 p_3 - 24\alpha^2\varepsilon h p_0^2 - 12\alpha^2\varepsilon h p_1^2 - \\ &12\alpha^2\varepsilon h p_0 p_2 - 24\alpha\gamma^3\varepsilon h p_2 p_3 - 72\alpha\gamma^3\varepsilon h p_3 p_4 - 96\alpha\gamma^2\varepsilon h p_0 p_3 - 96\alpha\gamma^2\varepsilon h p_2 p_3 + 24\alpha\gamma^2\varepsilon h p_1 p_4 + \\ &48\alpha\gamma\varepsilon h p_0 p_1 + 24\alpha\gamma\varepsilon h p_1 p_2 - 24\alpha\gamma\varepsilon h p_0 p_3 - 51\gamma^4\varepsilon h p_3^2 - 12\gamma^3\varepsilon h p_3^2 + 30\gamma^3\varepsilon h p_1 p_3 - 9\gamma^2\varepsilon h p_1^2 - \\ &9\gamma^2\varepsilon h p_0 p_2 + 6\gamma^2\varepsilon h p_1 p_3 - 18\gamma^2\varepsilon h p_0 p_4 - 24\alpha^3\gamma p_1 + 24\alpha^2\gamma^3 p_4 + 24\alpha^2\gamma^2 p_2 - 24\alpha^2\gamma p_0 + 6\alpha\gamma^3 p_3 + \\ &24\alpha\gamma^2 p_1 - 18\gamma^3 p_2) / (36(2\alpha^2 - \gamma)\gamma^3)\,. \end{aligned}$$

В работе объектом рассмотрения является математическая модель динамической системы в виде обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейными частями в форме многочленов с постоянными и периодическими коэффициентами.

Найдены искомые коэффициенты преобразования и получено решение уравнений (2) и (3):

$$u = \alpha / \left(e^{2\alpha t} \left(\varepsilon\alpha + \alpha / u_0 \right) - \varepsilon\alpha \right),$$

$$\varepsilon = (\alpha b / a + \beta)t - b\log\left(e^{2\alpha t} (a\varepsilon u_0 + \alpha) - a\varepsilon u_0 \right) / 2a + \varepsilon_0 .$$

Применение модифицированного метода многочленных преобразований.

В качестве примера рассмотрим применение модифицированного метода для уравнения Ван-дер-Поля, представленного в форме (1) $\ddot{q} + 2\alpha\dot{q} + \gamma q = \varepsilon\dot{q}q^2$.

Для уравнения Ван-дер-Поля получены искомые коэффициенты:

$$a = \alpha\left(-8\alpha^3\gamma + 8\alpha\gamma^2 + 4\alpha^2\varepsilon h + 3\gamma^2\varepsilon h\right)/4\gamma^3\left(2\alpha^2 - \gamma\right),$$

$$a_1 = \alpha\left(-8\alpha^3\gamma + 8\alpha\gamma^2 + 4\alpha^2\varepsilon h + 3\gamma^2\varepsilon h\right)/2\gamma^2\left(2\alpha^2 - \gamma\right),$$

$$a_2 = (-16\alpha^5\gamma + 20\alpha^3\gamma^2 - 2\alpha\gamma^3 + 8\alpha^4\varepsilon h + 2\alpha^2(3\gamma - 1)\gamma\varepsilon h + \gamma^2\varepsilon h)/2\gamma^3\left(\gamma - 2\alpha^2\right),$$

$$a_3 = (-12\alpha^4\gamma + 14\alpha^2\gamma^2 - 2\gamma^3 + 6\alpha^3\varepsilon h - \alpha\gamma(1 - 3\gamma)\varepsilon h)/3\gamma^3\left(2\alpha^2 - \gamma\right),$$

$$a_4 = (8\alpha^3\gamma - 8\alpha\gamma^2 - 4\alpha^2\varepsilon h - 3\gamma^2\varepsilon h)/(24\alpha^2\gamma^3 - 12\gamma^4).$$

Для уравнения Ван-дер-Поля применен модифицированный метод преобразований и получены выражения для амплитуды и фазы автоколебаний в аналитическом виде:

$$\rho^2 = \left(\gamma^3\rho_0^2\left(0{,}5\gamma - \alpha^2\right)\right)/\left(\gamma^3\left(0{,}5\gamma - \alpha^2\right)e^{2\alpha t} + \varepsilon\rho_0^2 e^{\alpha t}\left(2\alpha^3\gamma + 0{,}75\alpha^2\varepsilon - 2\alpha\gamma^2 + 0{,}5625\gamma^2\varepsilon\right)\sinh(\alpha t)\right),$$

$$\theta = (\alpha b/a + \beta)t - b\log\left(a\varepsilon\rho_0^2\left(e^{2\alpha t} - 1\right) + \alpha e^{2\alpha t}\right)/2a + \theta_0\ .$$

При значениях параметров $\varepsilon = 0{,}6,\ \alpha = -0{,}3,\ \gamma = 1$ для уравнения Ван-дер-Поля найдены значения амплитуды и фазы колебаний:

$$\rho^2 = \frac{3{,}90625}{1 - 0{,}0234375e^{-0{,}6t}},\ \theta = 0{,}1765t + \theta_0.$$

Выполнено сравнение решения уравнения Ван-дер-Поля, найденного модифицированным методом с точным решением численным методом Рунге-Кутта.

Для уравнения Ван-дер-Поля легко получить оценку погрешности, например, для амплитуды погрешность составляет 1,1788%:

$$\delta = \frac{2 - \sqrt{3{,}90625}}{2} \times 100\% = 1{,}1788\%.$$

Погрешность решения модифицированным методом составляет 1%, что показывает применимость предложенного метода для исследования автоколебаний нелинейных механических систем. Оценка погрешности обычного метода многочленных преобразований составляет 2%, что показывает целесообразность модификации метода с применением экономизации Чебышева.

Заключение

В работе рассматривается математическая модель динамической системы с одной степенью свободы, представленная в виде обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейными частями в форме многочленов с постоянными и периодическими коэффициентами. В работе представлен модифицированный метод для исследования автоколебаний нелинейных механических систем. Авторами разработан уточненный метод преобразования и интегрирования уравнения, основанный на методе нормализации Пуанкаре–Дюлака. Уточнение метода заключается в учете нелинейных членов высших порядков методом экономизации Чебышева. Выполняется аппроксимация остаточных членов высших порядков однородными формами меньших порядков, в рассмотренном случае – кубическими формами. В качестве примера рассмотрено применение модифицированного метода для уравнения Ван-дер-Поля и получены выражения для амплитуды и фазы автоколебаний в аналитическом виде. Выполнено сравнение решения уравнения Ван-дер-Поля, найденного разработанным методом, с точным решением численным методом Рунге–Кутта. Погрешность решения модифицированным методом составляет 1%, что показывает применимость разработанного метода для исследования автоколебаний нелинейных динамических систем с постоянными и периодическими параметрами.

References

1. Blanchard P., Devaney R.L., Hall G.R. *Differential Equations*. 2nd ed. Brooks Cole, 2011, 864 p.
2. Warminski J., Lenci S., Cartmell M.P., Rega G., Wiercigroch M. *Nonlinear Dynamic Phenomena in Mechanics*. Berlin, Springer-Verlag, 2012, 276 p.
3. Teschl G. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. American Mathematical Society, 2012, vol. 140, 356 p.
4. Demidovich B.P., Maron I.A., Shuvalova E.Z. *Chislennye Metody Analiza. Priblizhenie Funktsii, Differentsial'nye i Integral'nye Uravneniya* [Numerical Methods of Analysis. Functions Approximation, Differential and Integral Equations]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2010, 400 p.

5. Gesztesy F., Holden H., Michor J., Gerald T. *Soliton Equations and their Algebro-Geometric Solutions*. Cambridge University Press, 2008, vol. 2, 438 p.
6. Melnikov G.I. *Dinamika Nelineinykh Mekhanicheskikh i Elektromekhanicheskikh Sistem* [Nonlinear Dynamics of Mechanical and Electromechanical Systems]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1975, 198 p.
7. Ivanov S.E., Melnikov G.I. Avtonomizatsiya nelineinykh dinamicheskikh system [Off-line interaction of the nonlinear dynamic systems]. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics,* 2012, no. 1 (89), pp. 151–156.
8. Bibikov Yu.N. *Kurs Obyknovennykh Differentsial'nykh Uravnenii* [Course of Ordinary Differential Equations]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2011, 304 p.
9. Melnikov V.G. Chebyshev economization in transformations of nonlinear systems with polynomial structure. *Proc. 14th WSEAS Int. Conf. on Systems*. Corfu Island, Greece, 2010, vol. 1, pp. 301–303.
10. Melnikov V.G. Mnogochlennye preobrazovaniya nelineinykh sistem upravleniya [Polynomial transformations of non-linear control systems]. *Izv. vuzov. Priborostroenie*, 2007, vol. 50, no. 5, pp. 20–25.
11. Melnikov V.G., Melnikov G.I., Ivanov S.E. *Komp'yuternye Tekhnologii v Mekhanike Pribornykh System* [Computer Technologies in Mechanics of Instrument Systems]. St. Petersburg, SPbSU ITMO Publ., 2006, 127 p.
12. Ivanov S.E. Algoritmicheskaya realizatsiya metoda issledovaniya nelineinykh dinamicheskikh sistem [Algorithmic realization for research method of the nonlinear dynamic systems] *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics,* 2012, no. 4 (80), pp. 90–92.
13. Melnikov V.G. Preobrazovanie dinamicheskikh mnogochlennykh sistem s primeneniem approksimatsii Chebysheva [Transformation of dynamic polynomial systems by Chebyshev approximation]. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2012, no. 4 (80), pp. 85–90.
14. Melnikov V.G. Chebyshev economization in Poincare-Dulac transformations of nonlinear systems. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 2005, vol. 63, no. 5–7, pp. e1351–e1355. doi: 10.1016/j.na.2005.01.080

Мельников Геннадий Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, melnikov@mail.ifmo.ru

Иванов Сергей Евгеньевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, sivanov@mail.ifmo.ru

Мельников Виталий Геннадьевич – доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, melnikov@mail.ifmo.ru

Малых Константин Сергеевич – аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, malykh-konstantin@yandex.ru

Gennady I. Melnikov – D.Sc., Professor, Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, melnikov@mail.ifmo.ru

Sergei E. Ivanov – PhD, Associate professor, Associate professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, sivanov@mail.ifmo.ru

Vitaly G. Melnikov – D.Sc., Associate professor, Head of Department, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, melnikov@mail.ifmo.ru

Konstantin S. Malykh – postgraduate, ITMO University, Saint Petersburg, Russian Federation, 197101, malykh-konstantin@yandex.ru