



УДК 532.529

РЕШЕНИЕ ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ОДНОМЕРНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ ПРИ ПОМОЩИ WENO-СХЕМ

П.В. Булат^a, К.Н. Волков^{a,b}^a Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация^b Университет Кингстона, Лондон, SW15 3DW, Великобритания

Адрес для переписки: pavelbulat@mail.ru

Информация о статье

Поступила в редакцию 12.10.15, принята к печати 17.11.15

doi:10.17586/2226-1494-2016-16-1-174-180

Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Булат П.В., Волков К.Н. Решение тестовых задач нестационарной одномерной газовой динамики при помощи WENO-схем // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2016. Т. 16. № 1. С. 174–180.

Аннотация

Построение тестовых решений представляет собой необходимый элемент в общем контексте конструирования численных методов, предназначенных для интегрирования уравнений Эйлера. Рассматривается численное решение уравнений Эйлера, описывающих течения невязкого сжимаемого газа и допускающих гладкие и разрывные решения. Дискретизация уравнений Эйлера проводится при помощи метода конечных объемов и разностных схем WENO-типа. Полученные численные решения сравниваются с точными решениями задачи о распаде разрыва. Монотонизирующая коррекция производных предотвращает образование новых экстремумов и обеспечивает монотонность численного решения в окрестности разрыва, но приводит к сглаживанию существующих минимумов и максимумов и к потере точности. Расчеты с использованием схем WENO позволяют получить точное и монотонное решение задачи как при наличии слабых, так и сильных газодинамических разрывов.

Ключевые слова

газовая динамика, разностная схема, ударная волна, волна разрежения, контактный разрыв, задача Римана

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение № 14.575.21.0057).

WENO SCHEMES FOR SOLUTION OF UNSTEADY ONE-DIMENSIONAL GAS DYNAMICS TEST PROBLEMS

P.V. Bulat^a, K.N. Volkov^b^a ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation^b Kingston University, London, SW15 3DW, UK

Corresponding author: pavelbulat@mail.ru

Article info

Received 12.10.15, accepted 17.11.15

doi:10.17586/2226-1494-2016-16-1-174-180

Article in Russian

For citation: Bulat P.V., Volkov K.N. WENO schemes for solution of unsteady one-dimensional gas dynamics test problems. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2016, vol. 16, no. 1, pp. 174–180.

Abstract

Creation of test solutions is an essential element in the general design contents for numerical methods aimed at integration of Euler equations. We consider numerical solution of Euler equations describing flows of inviscid compressible gas and allowing continuous and discontinuous solutions. Discretization of Euler equations is based on finite volume method and WENO finite difference schemes. The numerical solutions computed are compared with the exact solutions of Riemann problem. Monotonic correction of derivatives makes it possible to avoid new extremes and ensures monotonicity of the numerical solution near the discontinuity, but it leads to the smoothness of the existing minimums and maximums and to the loss of accuracy. Calculations with the use of WENO schemes allow obtaining accurate and monotonic solution with the presence of both weak and strong gas dynamical discontinuities.

Keywords

gas dynamics, finite difference scheme, shock wave, rarefaction wave, contact discontinuity, Riemann problem

Acknowledgements

The study has been carried out under financial support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (agreement No.14.575.21.0057).

Введение

Для моделирования сверхзвуковых течений с разрывами искомым параметрам в газовой динамике широкое применение находят методы расщепления вектора потока (Flux Vector Splitting, FVS) и методы расщепления разности потока (Flux Difference Splitting, FDS) [1–3].

В методах FVS расщепление вектора потока на две компоненты производится в зависимости от локального направления потока. Методы FVS оказываются эффективными при расчете стационарных разрывов, представленных скачками уплотнения. При моделировании контактных разрывов методы FVS оказываются слишком диссипативными и дают некорректный уровень диффузии [1]. Для приложений, связанных с горением и воспламенением газотопливных смесей, ошибки в предсказании параметров потока на контактном разрыве приводят к нежелательным следствиям. В частности, на контактной поверхности терпят разрыв температура и внутренняя энергия, что затрудняет точный расчет критерия воспламенения смеси.

В методах FDS для расчета потока через грани контрольного объема используется приближенное решение задачи о распаде произвольного разрыва. При подходящем выборе метода решения локальной задачи Римана возможно разрешение как ударных волн, так и контактных разрывов. К наиболее популярным методам решения задачи Римана относятся метод Рое (Roe method), метод HLL (Harten, Lax, van Leer), метод HLLC (HLL with Contact) и ряд других. Метод Рое, основанный на решении линеаризованных уравнений Эйлера, допускает точное разрешение одиночных контактных разрывов без численной диссипации, но в ряде случаев приводит к формированию нефизической волны разрежения (entropy glitch). Для преодоления проблем указанного типа находит применение энтропийная коррекция. Метод HLLC имеет хорошие разрешающие способности при моделировании течений с контактными разрывами. При моделировании медленно движущихся ударных волн метод HLLC приводит к возникновению нефизических низкочастотных осцилляций параметров потока за фронтом ударной волны, а также других ошибок в численном решении.

Появление ENO (Essentially Non-Oscillatory) и WENO (Weighted ENO) разностных схем привело к значительному улучшению качества численных решений по сравнению с классическими разностными методами фиксированного порядка точности [4]. Практическое использование ENO- и WENO-схем высокого порядка точности и их внедрение в существующие программные коды сопряжено с определенными сложностями. Реализация ENO- и WENO-схем требует значительных вычислительных затрат, что обусловлено перебором шаблонов и выбором наиболее гладкого из них. Поскольку условие невозрастания вариации решения строго не соблюдается, в решении зачастую возникают нефизические эффекты.

Подробное изложение основных проблем использования TVD-подхода (Total Variation Diminishing) для построения разностных схем газовой динамики дается в работах [2, 3], а ENO- и WENO-схем – в работе [4]. Несмотря на многочисленные примеры использования ENO- и WENO-схем, вопросы их практического использования и тестирования на модельных задачах газовой динамики остаются недостаточно освещенными [5, 6].

При использовании некоторых приближенных методов решения задачи Римана, например, схемы Рое, возникают проблемы вычислительного плана, связанные, в частности, с появлением отрицательных значений плотности и энергии в волнах разрежения. Проблемы подобного плана обычно преодолеваются введением энтропийной коррекции [7] (ее введения оказывается недостаточно в случае достаточно сильных волн разрежения). Другие проблемы, возникающие при моделировании сверхзвукового обтекания затупленного тела, связаны с появлением грибовидного распределения плотности в окрестности точки торможения за фронтом головной ударной волны (carbuncle phenomenon) [8–10]. Методы, основанные на расщеплении вектора потока, не имеют указанной особенности. Важное значение, в частности, при использовании точных методов решения задачи Римана, имеют различного рода неустойчивости (odd-even instability) [11].

В работе [12] приводятся решения 10 одномерных задач газовой динамики при помощи различных разностных схем (всего рассматривается 8 разностных схем). Представленные результаты достаточно полно представляют возможности конечно-объемных методов к решению уравнений Эйлера. Решение задачи Римана на основе модифицированного метода HLL (сделанные модификации делают возможным расчет контактных разрывов) обсуждается в работе [13]. Результаты расчетов сравниваются с другими подходами к расчету потоков через грани контрольного объема. Возможности численного алгоритма, основанного на квазигазодинамической системе уравнений, проверяются в работе [14]. Для расчетов используются тестовые задачи газовой динамики из работы [12].

В работе [15] решаются уравнения Эйлера, записанные в неконсервативной форме, и проверяются свойства WENO-схем с подсеточным разрешением. Основные сложности при работе с гиперболическими уравнениями, которые не допускают представления в консервативной форме, возникают тогда, когда решение содержит разрывы, и классические условия Рэнкина–Гюгоньо на разрывах оказываются неприменимыми. Для расчета потоков используется метод Рое. Решается широкий круг задач, описывающих взаимодействие сред с различными свойствами.

В работе [16] предлагается задача (blast wave), в которой моделируется сложное нестационарное взаимодействие двух взрывающихся слоев. Задача не имеет точного решения. Для определения численных погрешностей в качестве эталона используется численное решение, полученное на подробной сетке (порядка нескольких тысяч узлов). Приводятся результаты расчетов на сходимость для нескольких разностных схем и оценки скорости сходимости на их основе [16]. При наличии нестационарных ударных волн скорость сходимости намного меньше единицы и достигает единицы, например, при использовании метода кусочно-параболической реконструкции. Это подтверждается результатами работы [17], в которой рассматривается распространение ударной волны в среде с синусоидальным возмущением плотности (задача на качественном уровне моделирует взаимодействие ударной волны с турбулентным течением). Разностные схемы типа ENO третьего и четвертого порядков аппроксимации дают значения нормы погрешности плотности, которые всего в два раза меньше, чем в разностной схеме MUSCL второго порядка аппроксимации.

Для иллюстрации качества численного решения широкое применение находят тестовые задачи типа распада разрыва, в которых присутствуют стационарные (бегущие с постоянной скоростью) ударные волны (одна или две) и центрированная волна разрежения. Существенно нестационарные ударные волны, например, замедляющиеся ударные волны с быстро уменьшающимся давлением за фронтом ударной волны (такowymi являются расходящиеся ударные волны, возникающие при взрыве в воздухе), плохо описываются численными методами, отработанными на тестовых задачах типа распада разрыва.

Уравнения Эйлера дискретизируются при помощи метода конечных объемов. Для расчетов невязких потоков используется схема WENO-3 с расщеплением потоков по Рое. Интегрирование по времени осуществляется при помощи трехшагового метода Рунге–Кутты. Рассматриваемые задачи имеют аналитические решения и являются стандартными тестами, которым подвергается любой новый численный метод. Для проекционно-эволюционных методов, к которым принадлежат методы WENO-типа, такой выбор тестовых задач позволяет осуществить полное тестирование численного метода (шаг реконструкции, шаг эволюции).

Обзор задач

Для тестирования программных средств, предназначенных для моделирования течений с нестационарными ударными волнами, широкое применение находят задачи, сформулированные в работах [16, 18].

Задача Вудворда–Колелла (тест 1, Woodward–Collela problem), или задача о взаимодействии двух разрывов (blast wave problem), сформулированная в работе [16], представляет собой задачу о взаимодействии двух волн, образующихся в результате распада двух разрывов типа Римана. Для этой задачи не существует точного решения. В качестве эталонного принимается решение [12], полученное при помощи метода кусочно-параболической реконструкции на сетке, содержащей 2000 ячеек. В работе [19] задача используется в качестве теста для алгоритмов решения уравнений Эйлера на сетках, динамически адаптирующихся к решению.

Задача Шу–Ошера (тест 2, Shu–Osher problem), или задача о взаимодействии ударной волны и волны энтропии (shock entropy wave interaction problem), сформулированная в работе [18], используется для исследования поведения вычислительной процедуры при описании взаимодействия гладкого решения с ударной волной (взаимодействие ударной волны, движущейся с числом Маха, равным 3, с малым возмущением энтропии). Задача не имеет точного решения. В качестве эталонного принимается решение [12], полученное при помощи метода WENO на сетке, содержащей 2000 ячеек. В работе [20] задача применяется для демонстрации возможностей разностных схем повышенного порядка точности. В ряде работ на этом же примере демонстрируются свойства схем, предназначенных для расчетов турбулентных течений в рамках метода моделирования крупных вихрей.

Задача Вудворда–Колелла

Задача Вудварда–Колелла описывает взаимодействие двух ударных волн, движущихся навстречу друг другу, возникших в результате распада двух произвольных разрывов.

Численное решение задачи ищется на интервале $[0, 1]$. Во всей расчетной области задается плотность, равная 1, и скорость, равная 0. В начальный момент имеются разрывы давления в точках $x_1=0,1$ и $x_2=0,9$. Начальные значения давления в трех соответствующих областях (левой L , средней M и правой R) равняются $(p_L, p_M, p_R)=(10^3, 10^{-2}, 10^2)$. В качестве граничных условий используются условия отражения. Интегрирование проводится на сетке, содержащей 1000 ячеек, до момента времени 0,038. В этой задаче чувствительными характеристиками являются распределения плотности, температуры и внутренней энергии. Схему распада произвольных разрывов в начальный момент времени показывает рис. 1 (приводятся схематические распределения давления p и температуры T). Стрелки указывают направления движения фронтов ударных волн, волн разрежения и контактных разрывов. В результате решения задачи о распаде произвольного разрыва в точках разрывов появятся волны разрежения, контактные разрывы и ударные волны.

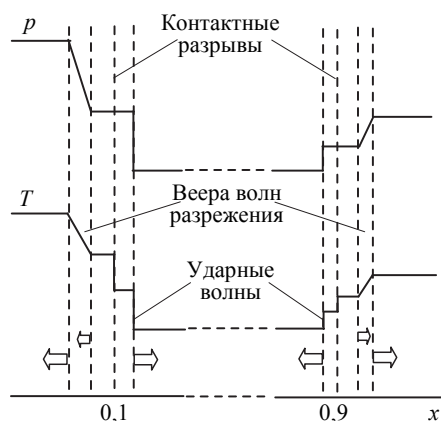
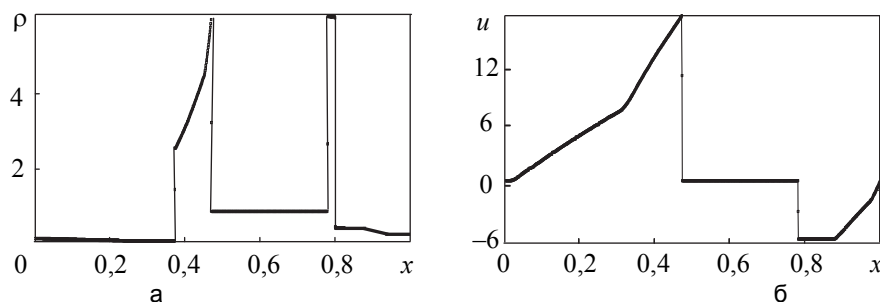


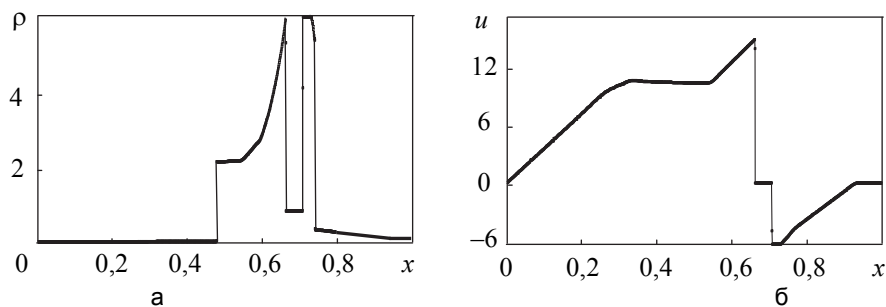
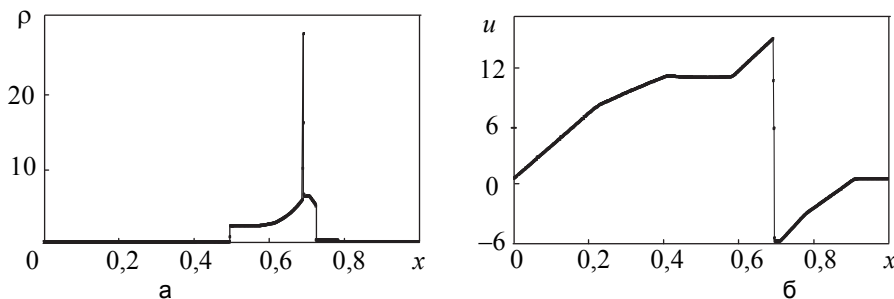
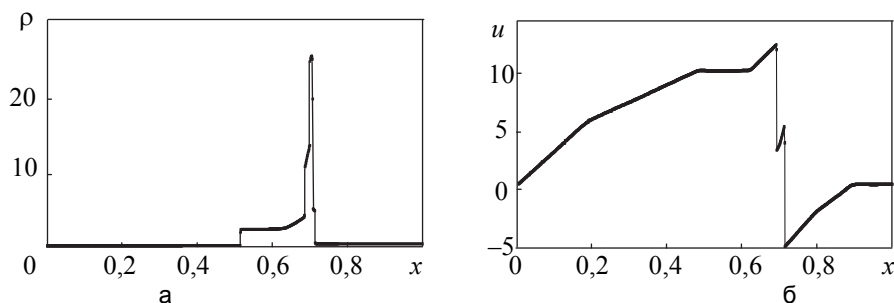
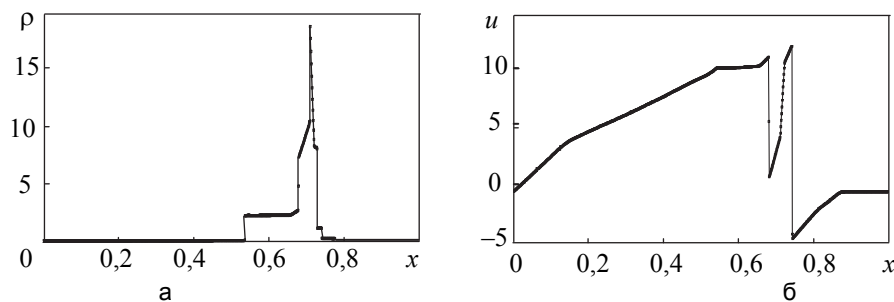
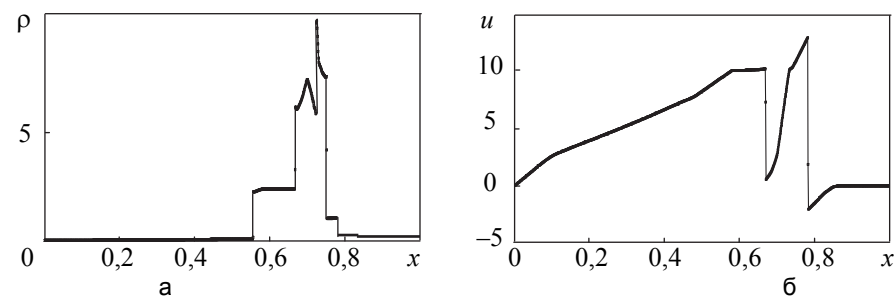
Рис. 1. Тест 1. Схема распада произвольных разрывов

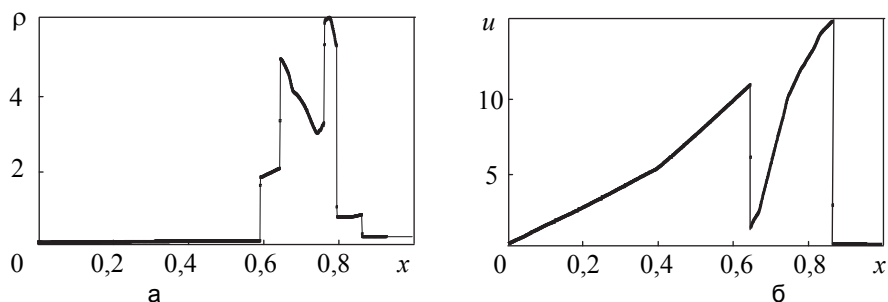
Распад произвольного разрыва приводит к формированию сложной ударно-волновой картины течения, в эволюции которой выделяются следующие стадии. На стадии 1 происходит распад двух произвольных разрывов неподалеку от внешних границ расчетной области и возникновение на местах распадов контактных разрывов, от которых по направлению к внешним границам отходят волны разрежения, а навстречу друг другу распространяются две ударные волны различной интенсивности. На стадии 2 наблюдается столкновение ударных волн, в результате чего образуется контактный разрыв с отходящими от него ударными волнами. На стадии 3 имеет место прохождение одной из ударных волн контактного разрыва, вследствие чего в сторону (противоположную направлению распространения ударной волны) от контактной границы отходит волна разрежения.

Решения задачи приводятся на рис. 2–8 в различные моменты времени. Тонкие линии показывают эталонное решение задачи на подробной сетке [16], а утолщенные линии – численное решение задачи при помощи разработанной вычислительной процедуры. Момент времени $t=0,016$ соответствует моменту времени, когда левая волна разрежения отражается от внешней границы и подходит к левой ударной волне, в то время как правая волна разрежения лишь подходит к противоположной внешней границе. Дальнейшее распространение ударных волн навстречу друг другу приводит к еще большему разрежению в областях между ударными волнами и внешними границами. Момент времени $t=0,026$ соответствует состоянию потока непосредственно перед столкновением ударных волн, а момент времени $t=0,032$ – сразу после столкновения. Момент времени $t=0,038$ соответствует моменту прохождения правой ударной волной правой контактной границы, когда формируются две ударные волны и три контактных разрыва.

Начальный разрыв давления порождает два контактных разрыва и две ударные волны, позади которых формируются волны разрежения, распространяющиеся по направлению к границам расчетного интервала (рис. 2). Волны разрежения отражаются от границ расчетной области, движутся по направлению к центру и взаимодействуют между собой (рис. 3). Взаимодействие ударных волн происходит в момент времени $t=0,028$ (рис. 4). Ударная волна, движущаяся вправо, является более слабой, поэтому отражение волны разрежения от правой границы происходит в более поздний момент времени. Взаимодействие ударных волн приводит к формированию узкой области с резким градиентом плотности (рис. 5). Скачки плотности имеют место при $x=0,59$ и $x=0,80$. Отражение ударных волн от границ расчетной области приводит к формированию сложной серии контактных разрывов и волн разрежения. Контактный разрыв образуется при $x=0,69$. В момент времени $t=0,032$ (рис. 6) ударная волна, отраженная от правой границы, встречается с начальным контактным разрывом, приводя к образованию волны разрежения, которая достигает центрального контактного разрыва в момент времени $t=0,034$. Между моментами времени $t=0,034$ (рис. 7) и $t=0,038$ (рис. 8) происходит изменение наклона скачка плотности в левой ударной волне, поскольку ударная волна перемещается в область постоянной энтропии, находящейся вблизи левого контактного разрыва.

Рис. 2. Тест 1. Решение задачи в момент времени $t=0,016$: плотность (а); скорость (б)

Рис. 3. Тест 1. Решение задачи в момент времени $t=0,026$: плотность (а); скорость (б)Рис. 4. Тест 1. Решение задачи в момент времени $t=0,028$: плотность (а); скорость (б)Рис. 5. Тест 1. Решение задачи в момент времени $t=0,030$: плотность (а); скорость (б)Рис. 6. Тест 1. Решение задачи в момент времени $t=0,032$: плотность (а); скорость (б)Рис. 7. Тест 1. Решение задачи в момент времени $t=0,034$: плотность (а); скорость (б)

Рис. 8. Тест 1. Решение задачи в момент времени $t=0,038$: плотность (а); скорость (б)

Задача Шу–Ошера

Задача Шу–Ошера (взаимодействие движущейся ударной волны с малым возмущением энтропии) решается в области $[-5, 5]$. Разрыв располагается в точке $x_0 = -4$. Начальные условия близки к условиям для задачи Римана. Ударная волна распространяется в покоящейся среде с синусоидальным распределением плотности. Значения плотности, скорости и давления на левом интервале составляют $(3,857143, 2,629369, 10,33333)$. На правом интервале задаются распределение плотности и постоянные значения скорости и давления $(1+0,2\sin(5x), 0, 1)$. Время окончания расчета составляет 1,8. Расчеты проводятся на сетке, содержащей 800 ячеек.

Решение задачи приводится на рис. 9. Имеет место взаимодействие ударной волны, движущейся вправо с числом Маха, равным 3, с синусоидальной энтропийной волной. При движении ударной волны возникают осцилляции плотности большей частоты, чем исходные. За фронтом ударной волны (слева) имеется область, куда успевает пройти только возникшая в результате взаимодействия акустическая волна. Ближе к фронту располагается зона, в которой акустическая волна и прошедшая энтропийная волна накладываются друг на друга. Используемый численный метод позволяет воспроизвести высокочастотные флуктуации плотности за фронтом ударной волны.

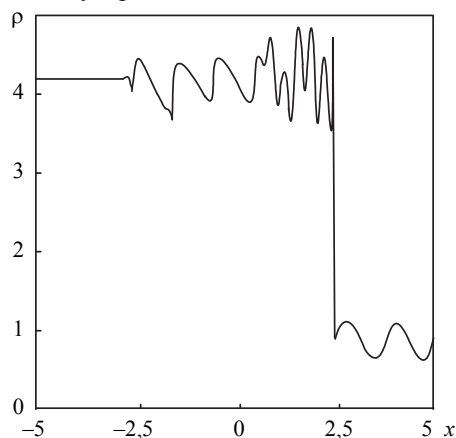


Рис. 9. Тест 2. Распределение плотности

После прохождения ударной волны в профиле плотности выделяются две составляющие. Одна из них имеет приблизительно ту же частоту и амплитуду, что и начальный синусоидальный профиль плотности. С течением времени профиль волн сжатия становится более крутым, приобретая характерную N-образную форму. Другая составляющая имеет более высокую частоту и амплитуду по сравнению с начальным синусоидальным возмущением плотности.

Заключение

Стандартные TVD-схемы, имеющие второй порядок точности вдали от разрывов, хорошо подходят для расчетов сверхзвуковых течений с небольшим числом изолированных ударных волн. Задачи, содержащие как ударные волны, так и многочисленные сложные структуры в областях, где решение гладкое, требуют применения более точных вычислительных инструментов. Схемы ENO- и WENO-типа представляются естественными кандидатами на роль основного вычислительного инструмента в программах, предназначенных для моделирования течений невязкого сжимаемого газа. Погрешности появляются при решении таких сложных задач, как задачи с низкой плотностью или сильными ударными волнами. Такие погрешности не приводят к заметному ухудшению качества решения, полученного при помощи метода конечных объемов, основанного на приближенном решении задачи Римана. При увеличении числа узлов сетки численное решение сходится к точному решению.

Литература

1. Toro E.F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 2009. 724 p. doi: 10.1007/b79761
2. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001. 608 с.
3. Wesseling P. Principles of Computational Fluid Dynamics. Springer, 2000. 664 p. doi: 10.1007/978-3-642-05146-3
4. Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н., Козелков А.С., Тетерина И.В. Разностные схемы в задачах газовой динамики на неструктурированных сетках. М.: Физматлит, 2014. 412 с.
5. Булат П.В., Волков К.Н. Применение WENO-схем для моделирования взаимодействия отраженной ударной волны с пограничным слоем // Инженерно-физический журнал. 2015. Т. 88. № 5. С. 1163–1170.
6. Булат П.В., Волков К.Н. Моделирование сверхзвукового течения в канале со ступенькой на неструктурированных сетках при помощи WENO-схем // Инженерно-физический журнал. 2015. Т. 88. № 4. С. 848–855.
7. Kermani M.J., Plett E.G. Modified entropy correction formula for the Roe scheme // Proc. 39th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reno, USA, 2001.
8. Pandolfi M., D'Ambrosio D. Numerical instabilities in upwind methods: analysis and cures for the carbuncle phenomenon // Journal of Computational Physics. 2001. V. 166. N 2. P. 271–301. doi: 10.1006/jcph.2000.6652
9. Svetsov V. Vortical regime of the flow behind the bow shock wave // Shock Waves. 2001. V. 11. N 3. P. 229–244.
10. Chauvat Y., Moschetta J.-M., Gressier J. Shock wave numerical structure and the carbuncle phenomenon // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2005. V. 47. N 8–9. P. 903–909. doi: 10.1002/flid.916
11. Quirk J.J. Contributed to the great Riemann solver debate // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 1994. V. 18. N 6. P. 555–574.
12. Liska R., Wendroff B. Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations // SIAM Journal of Scientific Computing. 2003. V. 25. N 3. P. 995–1017. doi: 10.1137/S1064827502402120
13. Mandal J.C., Panwar V. Robust HLL-type Riemann solver capable of resolving contact discontinuity // Computers and Fluids. 2012. V. 63. P. 148–164. doi: 10.1016/j.compfluid.2012.04.005
14. Елизарова Т.Г., Шильников Е.В. Возможности квазигазодинамического алгоритма для численного моделирования течений невязкого газа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49. № 3. С. 549–566.
15. Xiong T., Shu C.-W., Zhang M. WENO scheme with subcell resolution for computing nonconservative Euler equations with applications to one-dimensional compressible two-medium flows // Journal of Scientific Computing. 2012. V. 53. N 1. P. 222–247. doi: 10.1007/s10915-012-9578-7
16. Woodward P.R., Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // Journal of Computational Physics. 1984. V. 54. N 1. P. 115–173. doi: 10.1016/0021-9991(84)90142-6
17. Hannappel R., Hauser T., Friedrich R. A comparison of ENO and TVD schemes for the computation of shock-turbulence interaction // Journal of Computational Physics. 1995. V. 121. N 1. P. 176–184. doi: 10.1006/jcph.1995.1187
18. Shu C.-W., Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes II // Journal of Computational Physics. 1989. V. 83. N 1. P. 32–78. doi: 10.1016/0021-9991(89)90222-2
19. Бреславский П.В., Мажукин В.И. Моделирование взаимодействия ударных волн на динамически адаптирующихся сетках // Математическое моделирование. 2007. Т. 19. № 11. С. 83–95.
20. Кудрявцев А.Н., Поплавская Т.В., Хотяновский Д.В. Применение схем повышенного порядка точности при моделировании нестационарных сверхзвуковых течений // Математическое моделирование. 2007. Т. 19. № 7. С. 39–55.

Булат Павел Викторович

– кандидат физико-математических наук, руководитель научной лаборатории, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, pavelbulat@mail.ru

Волков Константин Николаевич

– доктор физико-математических наук, научный сотрудник, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация; лектор, Университет Кингстона, Лондон, SW15 3DW, Великобритания, k.volkov@kingston.ac.uk

Pavel V. Bulat

– PhD, Scientific supervisor of International laboratory, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, pavelbulat@mail.ru

Konstantin N. Volkov

– D.Sc., Researcher, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation; Senior Lecturer, Kingston University, London, KT12EE, UK, k.volkov@kingston.ac.uk