УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ
июль–август 2016 Том 16 № 4 ISSN 2226-1494 http://ntv.ifmo.ru/
SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL OF INFORMATION TECHNOLOGIES, MECHANICS AND OPTICS
July–August 2016 Vol. 16 No 4 ISSN 2226-1494 http://ntv.ifmo.ru/en

УДК 681.51

ИНТЕРВАЛЬНАЯ ОЦЕНКА СОСТОЯНИЙ СИНГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Т.А. Харьковская[a], А.С. Кремлев[a], Д.В. Ефимов[b]

[a] Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация
[b] Национальный институт исследований по информатике и автоматике, 59650, Лилль, Франция
Адрес для переписки: easymedia@mail.ru

Информация о статье
Поступила в редакцию 19.05.16, принята к печати 15.06.16
doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-4-627-634
Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Харьковская Т.А., Кремлев А.С., Ефимов Д.В. Интервальная оценка состояний сингулярных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2016. Т. 16. № 4. С. 627–634. doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-4-627-634

Аннотация
Рассмотрены линейные системы дифференциальных уравнений с алгебраическими ограничениями (сингулярные системы) и метод построения интервального наблюдателя для таких систем. В системах присутствует постоянное запаздывание по состоянию, шум измерений и возмущения. Построение интервального наблюдателя выполнено на основе теории монотонных и кооперативных систем, линейных матричных неравенств, аппарата функций Ляпунова, интервальной арифметики. Рассматривается ряд условий, при которых возможно построение устройства оценки такого типа. Результаты работы синтезированного наблюдателя продемонстрированы на примере динамической модели межотраслевого баланса. Преимущества предложенного метода заключаются в том, что он адаптирован для построения наблюдателя для неопределенных систем, если интервалы допустимых значений для неизвестных параметров даны. Построенный наблюдатель способен асимптотически обеспечить определенные границы точности оценивания, так как интервал допустимых значений состояния объекта определяется в каждый момент времени. Полученный результат предоставляет возможность развивать теорию интервальной оценки для сложных систем, содержащих параметрическую неопределенность, переменное запаздывание и нелинейные составляющие. Интервальные наблюдатели все больше находят применение в экономике, в электротехнике, механических системах с ограничениями и управлении оптимальным потоком.

Ключевые слова
интервальная оценка, наблюдатель, сингулярные системы, запаздывание по состоянию, неопределенные системы.

Благодарности
Работа выполнена при государственной финансовой поддержке ведущих университетов Российской Федерации (субсидия 074-U01), Министерства образования и науки РФ 14.Z50.31.0031 и гранта Президента Российской Федерации № 14.Y31.16.9281-НШ.

INTERVAL STATE ESTIMATION FOR SINGULAR DIFFERENTIAL EQUATION SYSTEMS WITH DELAYS

T.A. Kharkovskaia[a], A.S. Kremlev[a], D.V. Efimov[b]

[a] ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation
[b] INRIA (Institut national de recherche en informatique et en automatique), Lille, 59650, France
Corresponding author: easymedia@mail.ru

Article info
Received 19.05.16, accepted 15.06.16
doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-4-627-634
Article in Russian

For citation: Kharkovskaia T.A., Kremlev A.S., Efimov D.V. Interval state estimation for singular differential equation systems with delays. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2016, vol. 16, no. 4, pp. 627–634. doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-4-627-634

Abstract
The paper deals with linear differential equation systems with algebraic restrictions (singular systems) and a method of interval observer design for this kind of systems. The systems contain constant time delay, measurement noise and disturbances. Interval observer synthesis is based on monotone and cooperative systems technique, linear matrix inequations,

Lyapunov function theory and interval arithmetic. The set of conditions that gives the possibility for interval observer synthesis is proposed. Results of synthesized observer operation are shown on the example of dynamical interindustry balance model. The advantages of proposed method are that it is adapted to observer design for uncertain systems, if the intervals of admissible values for uncertain parameters are given. The designed observer is capable to provide asymptotically definite limits on the estimation accuracy, since the interval of admissible values for the object state is defined at every instant. The obtained result provides an opportunity to develop the interval estimation theory for complex systems that contain parametric uncertainty, varying delay and nonlinear elements. Interval observers increasingly find applications in economics, electrical engineering, mechanical systems with constraints and optimal flow control.

Keywords

interval estimation, observer, singular systems, time delay, uncertain systems

Acknowledgements

This work was supported by the Government of the Russian Federation (Grant 074-U01), the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (Project 14.Z50.31.0031) and the Russian Federation President Grant №14.Y31.16.9281-НШ.

Введение

Существующие методы построения наблюдателей состояния для неопределенных систем [1, 2] сильно связаны с типом модели объекта. В работе рассмотрен класс моделей объектов управления, который состоит из линейных непрерывных во времени сингулярных систем дифференциальных уравнений (дескрипторные системы или дифференциально-алгебраические системы) [3]. Сингулярные системы дифференциальных уравнений (ДУ) привлекают много внимания из-за большого количества примеров в экономике [4], в электротехнике [5], в механических системах с ограничениями [6]. Другой важный класс моделей описывается через дифференциальные уравнения с запаздыванием по состоянию [7]. Проблема построения наблюдателя для систем с запаздыванием довольно популярна [8], так как возникает вопрос анализа устойчивости состояний функциональных дифференциальных уравнений [9]. Синтез наблюдателя проблематичен, если модель системы с запаздыванием содержит параметрическую и сигнальную неопределенность, а также в случае, когда запаздывание является переменным во времени или неопределенным [10–12].

В настоящей работе рассматриваются линейные сингулярные системы ДУ при условии постоянной временной задержки. Синтез наблюдателя для данного класса объектов востребован во многих отраслях реального мира (экономика, электротехника, передача данных, т.д.). Сингулярная система ДУ с запаздыванием – это комбинация двух динамик: дифференциального уравнения и разностного уравнения (в отсутствие запаздывания алгебраическое ограничение статично). Включение запаздывания в сингулярную модель объекта управления повышает точность моделирования ее приближения к реальному объекту, что тем самым расширяет класс физических явлений, для которых может быть построен интервальный наблюдатель.

Решение проблемы оценивания состояния для сингулярных систем основано на методе кооперативных и монотонных систем [13–18]. Некоторые результаты были получены по синтезу экспоненциально устойчивых интервальных наблюдателей для систем с запаздыванием [11, 12], и в данной работе ставится цель – расширить инструменты построения наблюдателей на класс сингулярных систем ДУ. Построение подобного наблюдателя возможно для неопределенных систем при условии, что границы допустимых значений неизвестных параметров известны, и он способен обеспечить определенные границы точности оценивания, которые пропорциональны модели неопределенности системы.

Общие сведения

Далее в этой статье будут использоваться следующие определения:

– $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел ($\mathbb{R}_+ = \{\tau \in \mathbb{R}: \tau \geq 0\}$); $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел; $C_\tau = C([-\tau, 0]), \mathbb{R})$ – множество непрерывных отображений $[-\tau, 0]$ в $\mathbb{R}$; $C_{\tau+} = \{\mathbf{y} \in C_\tau: \mathbf{y}(s) \in \mathbb{R}_+, s \in [-\tau, 0]\}$;
– x_t – элемент множества C_τ^n связанный с отображением $x_t: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ через $x_t(s) = x(t+s)$, для всех $s \in [-\tau, 0]$;
– $|x|$ обозначает абсолютное значение величины $x \in \mathbb{R}$, $\|\mathbf{x}\|$ – евклидова норма вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\|\varphi\| = sup_{t\in[-\tau,0]}\|\varphi(t)\|$ для $\varphi \in C_\tau^n$, $\|\mathbf{A}\|$ соответствует евклидовой индуцированной норме для матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$;
– для измеряемого и локально существенно ограниченного входа $u: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^p$ выражение $\|u\|_{[t_0,t_1]}$ обозначает его L_∞ норму $\|u\|_{[t_0,t_1]} = esssup\{\|u(t)\|, t \in [t_0, t_1]\}$, множество всех таких входов u со свойством $\|u\|_{[0,+\infty]} < \infty$ будет обозначаться как $\mathcal{L}_\infty^p$;
– для матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ вектор ее собственных значений обозначается как $\lambda(\mathbf{A})$;
– отношение $\mathbf{P} \prec 0$ ($\mathbf{P} \succ 0$) значит, что матрица $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ положительно (отрицательно) определена.

Линейная сингулярная система ДУ

Рассмотрим сингулярную систему ДУ

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}_0\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t),$$

где $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ и $\mathbf{u}(t)\in\mathcal{L}_\infty^m$ – состояние и вход (матрицы $\mathbf{E}\in\mathbb{R}^{n\times n},\mathbf{A}_0\in\mathbb{R}^{n\times n}$ и $\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{n\times m}$), которая называется обычной, если характеристический полином $\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A}_0)$ не обращается в ноль тождественно для всех $s\in\mathbb{C}$ [19, 20]. В обычном случае существуют матрицы $\mathbf{P},\mathbf{Q}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ такие, что

$$\mathbf{QEP}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{n_1} & 0\\ 0 & \mathbf{N}\end{bmatrix},\mathbf{QA}_0\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\mathbf{J} & 0\\ 0 & \mathbf{I}_{n_2}\end{bmatrix},$$

где $n_2=n-n_1$ для некоторого $1\le n_1<n$, $\mathbf{N}\in\mathbb{R}^{n_2\times n_2}$, и $\mathbf{J}\in\mathbb{R}^{n_1\times n_1}$ – матрицы в жордановой канонической форме, матрица $\mathbf{N}$ – нильпотентная с индексом ν (т.е. $\mathbf{N}^\nu=0$ и $\mathbf{N}^{\nu-1}\neq 0$). Сингулярная система ДУ (или пара матриц $(\mathbf{E},\mathbf{A}_0)$) имеет индекс (порядок) такой же, как и индекс нильпотентности ν матрицы $\mathbf{N}$. Если сингулярная система ДУ имеет индекс $\nu>0$, тогда она принимает импульсные решения.

Линейная сингулярная система ДУ с запаздыванием по состоянию

Рассмотрим сингулярную систему ДУ с запаздыванием

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}_0\mathbf{x}(t)+\mathbf{A}_1\mathbf{x}(t-\tau)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t), \tag{1}$$

где $\tau>0$ – задержка и $\mathbf{x}(t)\in\mathbb{R}^n$ – состояние, $\mathbf{x}_0\in C_\tau^n$ – начальные условия, $\mathbf{u}(t)\in\mathcal{L}_\infty^m$. Система (1) имеет индекс, который равен индексу пары матриц $(\mathbf{E},\mathbf{A}_0)$. Если $\nu>1$, тогда сингулярная система с запаздыванием имеет импульсные решения. Если обычная сингулярная система имеет индекс, равный 1, тогда она может быть представлена в следующей канонической форме (похожий случай был рассмотрен в [19]:

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{n_1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix};\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1\\ \mathbf{B}_2\end{bmatrix};\ \mathbf{A}_i=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{i1} & \mathbf{A}_{i2}\\ \mathbf{A}_{i3} & \mathbf{A}_{i4}\end{bmatrix}, i=0{,}1. \tag{2}$$

Обозначим в этом случае $\mathbf{x}=[\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\quad \mathbf{x}_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, где $\mathbf{x}_1\in\mathbb{R}^{n_1}$ и $\mathbf{x}_2\in\mathbb{R}^{n_2}$. Заметим, что это каноническое представление – не единственное, на самом деле, для любой невырожденной матрицы $\Upsilon\in\mathbb{R}^{n_2\times n_2}$

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{n_1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix};\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1\\ \Upsilon\mathbf{B}_2\end{bmatrix};\ \mathbf{A}_i=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{i1} & \mathbf{A}_{i2}\\ \Upsilon\mathbf{A}_{i3} & \Upsilon\mathbf{A}_{i4}\end{bmatrix}, i=0{,}1.$$

– еще одно каноническое представление системы (1) в тех же координатах $\mathbf{x}$. Если предполагается, что $\det(\mathbf{A}_{04})\neq 0$ (этот случай рассматривается далее), тогда набор матриц (2) может быть выбран в следующей форме для $\Upsilon=-\mathbf{A}_{04}^{-1}$:

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{n_1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix};\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1\\ \mathbf{B}_2\end{bmatrix};\ \mathbf{A}_0=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{01} & \mathbf{A}_{02}\\ \mathbf{A}_{03} & -\mathbf{I}_{n_2}\end{bmatrix},\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{A}_{13} & \mathbf{A}_{14}\end{bmatrix}. \tag{3}$$

Утверждение 1. [19] Предположим, что $\det(\mathbf{A}_{04})\neq 0$ и $\mathbf{x}_0\in C_\tau^n$, тогда для любого входа $\mathbf{u}(t)\in\mathcal{L}_\infty^m$ абсолютное непрерывное решение (см. [5]) системы (1) существует для всех $t\in\mathbb{R}_+$ и оно единственное.

Понятие (глобальной) асимптотической устойчивости для системы (1) стандартно для систем с запаздыванием (см. [[6]).

Утверждение 2. [19] Предположим, что $\det(\mathbf{A}_{04})\neq 0$ и $\max_{1\le i\le n_2}|\lambda_i(\mathbf{A}_{04}^{-1}\mathbf{A}_{14})|<1$. Если существуют матрица $\mathbf{P}\in\mathbb{R}^{n\times n}$,

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\mathbf{P}_1 & 0\\ \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3\end{bmatrix},\mathbf{P}_1=\mathbf{P}_1^{\mathrm{T}}\succ 0,\mathbf{P}_1\in\mathbb{R}^{n_1\times n_1},\mathbf{P}_3\in\mathbb{R}^{n_2\times n_2} \tag{4}$$

и матрица $\mathbf{U}\in\mathbb{R}^{n\times n},\mathbf{U}=\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\succ 0$, которым удовлетворяют следующие линейные матричные неравенства (LMI) для некоторого числа $\gamma>0$:

$$\begin{bmatrix}\Psi & \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} & \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_1\\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} & -\gamma^2\mathbf{I}_m & 0\\ \mathbf{A}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P} & 0 & -\mathbf{U}\end{bmatrix}\prec 0,$$

$$\Psi=\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_0+\mathbf{A}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{P}+\mathbf{U}+\mathbf{I}_n,$$

тогда система (1)–(2) глобально асимптотически устойчива для $\mathbf{u}\equiv 0$ и любой задержки $\tau>0$, а также ее коэффициент усиления H_∞ от входа $\mathbf{u}$ к состоянию $\mathbf{x}$ меньше, чем число γ.

Интервальное исчисление

Следующие леммы были доказаны в работах [15, 16]. Рассмотрим матрицу $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$, определим $\mathbf{A}^+=\max\{0,\mathbf{A}\}$ (поэлементно), $\mathbf{A}^-=\mathbf{A}^+-\mathbf{A}$ (также для векторов) и обозначим матрицу абсолютных значений всех элементов как $|\mathbf{A}|=\mathbf{A}^++\mathbf{A}^-$.

Лемма 1. Пусть $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ – вектор переменной, $\underline{\mathbf{x}}\le\mathbf{x}\le\overline{\mathbf{x}}$ для некоторых $\underline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}}\in\mathbb{R}^n$, и $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ – постоянная матрица, тогда $\mathbf{A}^+\underline{\mathbf{x}}-\mathbf{A}^-\overline{\mathbf{x}}\le\mathbf{A}\mathbf{x}\le\mathbf{A}^+\overline{\mathbf{x}}-\mathbf{A}^-\underline{\mathbf{x}}$.

Лемма 2. Пусть $\underline{\mathbf{A}}\le\mathbf{A}\le\overline{\mathbf{A}}$ для некоторых $\underline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{A}},\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ и $\underline{\mathbf{x}}\le\mathbf{x}\le\overline{\mathbf{x}}$ для некоторых $\underline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}},\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, тогда $\underline{\mathbf{A}}^+\underline{\mathbf{x}}^+-\overline{\mathbf{A}}^+\underline{\mathbf{x}}^--\underline{\mathbf{A}}^-\overline{\mathbf{x}}^++\overline{\mathbf{A}}^-\overline{\mathbf{x}}^-\le\mathbf{A}\mathbf{x}\le\overline{\mathbf{A}}^+\overline{\mathbf{x}}^+-\underline{\mathbf{A}}^+\overline{\mathbf{x}}^--\overline{\mathbf{A}}^-\underline{\mathbf{x}}^++\underline{\mathbf{A}}^-\underline{\mathbf{x}}^-$.

Постановка задачи

В этой работе будем рассматривать расширенную версию сингулярной системы ДУ с запаздыванием (1):

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t-\tau) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{d}(t),$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\upsilon}(t), \tag{5}$$

где, как и раньше, $\tau > 0$ – задержка по времени и $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ – состояние системы (с начальными условиями $\mathbf{x}_0 \in C_\tau^n$); $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{L}_\infty^m$ – управляющий сигнал; $\mathbf{d}(t) \in \mathcal{L}_\infty^n$ – возмущение; $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ – выходной сигнал, доступный для измерений; $\boldsymbol{\upsilon}(t) \in \mathcal{L}_\infty^p$ – шум измерений. Постоянные матрицы $\mathbf{E}, \mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ имеют соответствующие размерности. Нижеследующие ограничения накладываются на систему в представлении (5). Случай с множественными (составными) запаздываниями может быть включен с использованием результата работы [19].

Допущение 1. Система (5) является обычной с индексом 1 и представлена в канонической форме (2) с $\det(\mathbf{A}_{04}) \neq 0$.

Допущение 2. Состояние $\mathbf{x}(t)$ является ограниченной функцией времени, т.е. $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{L}_\infty^n$.

Допущение 3. Существует известное число $V > 0$, такое, что $\|\boldsymbol{\upsilon}_i\|_{[0,\infty)} \leq V$ для всех $1 \leq i \leq p$, существуют две известные функции $\underline{\mathbf{d}}, \bar{\mathbf{d}}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n, \underline{\mathbf{d}}(t), \bar{\mathbf{d}}(t) \in L_\infty^n$ такие, что $\underline{\mathbf{d}}(t) \leq \mathbf{d}(t) \leq \bar{\mathbf{d}}(t)$ для всех $t \geq 0$, и существуют $\underline{\mathbf{x}}_0, \bar{\mathbf{x}}_0 \in C_\tau^n$ такие, что $\underline{\mathbf{x}}_0 \leq \mathbf{x}_0 \leq \bar{\mathbf{x}}_0$.

Допущение 1 полагает, что система (5) является обычной и не имеет импульсных решений. Оно также означает, что система (5) преобразована в каноническое представление (что всегда возможно для обычных систем с индексом, равным 1). В допущении 2 предполагается ограниченность состояния, что является типичным ограничением в теории оценивания. В допущении 3 предполагается, что шум измерений ограничен числом V и известны верхняя и нижняя границы возмущения $\mathbf{d}(t)$ (интервал допустимых значений возмущения $\mathbf{d}(t)$ в каждый момент времени $t \geq 0$).

Цель заключается в построении интервального наблюдателя для системы (5), т.е. динамической системы

$$\tilde{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{z}}(t) = F\left(\mathbf{z}_t, \mathbf{y}_t, \mathbf{u}(t), V, \underline{\mathbf{d}}(t), \bar{\mathbf{d}}(t)\right), \mathbf{z}_0 \in C_\tau^k, k > 0,$$
$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \underline{H}\left(\mathbf{z}_t, \mathbf{y}_t, \mathbf{u}(t), V, \underline{\mathbf{d}}(t), \bar{\mathbf{d}}(t)\right), \bar{\mathbf{x}}(t) = \overline{H}\left(\mathbf{z}_t, \mathbf{y}_t, \mathbf{u}(t), V, \underline{\mathbf{d}}(t), \bar{\mathbf{d}}(t)\right),$$

где $F, \underline{H}, \overline{H}$ – некоторые функционалы и $\tilde{\mathbf{E}} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ такой, что выражение $\underline{\mathbf{x}}(t) \leq \mathbf{x}(t) \leq \bar{\mathbf{x}}(t)$ выполняется для всех $t \geq 0$ при условии $\underline{\mathbf{x}}_0 \leq \mathbf{x}_0 \leq \bar{\mathbf{x}}_0$. В дополнение, если $\lim_{t\to+\infty}\left\|\underline{\mathbf{d}}(t) - \bar{\mathbf{d}}(t)\right\| = \lim_{t\to+\infty}\|\boldsymbol{\upsilon}(t)\| = 0$, тогда $\lim_{t\to+\infty}\left\|\underline{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)\right\| = \lim_{t\to+\infty}\|\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)\| = 0$.

Интервальный наблюдатель

Прежде всего, отметим, что для любых $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2 \in \mathbb{R}^{n\times p}$ система (5) может быть переписана следующим образом:

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t-\tau) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{d}(t) + \mathbf{L}_1\big(\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\upsilon}(t)\big) +$$
$$+\mathbf{L}_2\big(\mathbf{y}(t-\tau) - \mathbf{C}\mathbf{x}(t-\tau) - \boldsymbol{\upsilon}(t-\tau)\big) = (\mathbf{A}_0 - \mathbf{L}_1\mathbf{C})\mathbf{x}(t) + (\mathbf{A}_1 - \mathbf{L}_2\mathbf{C})\mathbf{x}(t-\tau) +$$
$$+\mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\delta}(t) + \mathbf{L}_1\mathbf{y}(t) + \mathbf{L}_2\mathbf{y}(t-\tau), \tag{6}$$

где $\boldsymbol{\delta}(t) = \mathbf{d}(t) - \mathbf{L}_1\boldsymbol{\upsilon}(t) - \mathbf{L}_2\boldsymbol{\upsilon}(t-\tau)$, и, используя результат леммы 2, получаем для всех $t \geq 0$:

$$\underline{\boldsymbol{\delta}}(t) \leq \boldsymbol{\delta}(t) \leq \bar{\boldsymbol{\delta}}(t),$$
$$\underline{\boldsymbol{\delta}}(t) = \underline{\mathbf{d}}(t) - (|\mathbf{L}_1| + |\mathbf{L}_2|)1_pV, \qquad \bar{\boldsymbol{\delta}}(t) = \bar{\mathbf{d}}(t) + (|\mathbf{L}_1| + |\mathbf{L}_2|)1_pV$$

В дальнейшем два набора условий для $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$ рассматриваются с двумя разными интервальными наблюдателями.

Дальше обозначим $\mathbf{C} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2], \mathbf{L}_i = \begin{bmatrix}\mathbf{L}_{i1}\\ \mathbf{L}_{i2}\end{bmatrix}, i = 1,2$, где $\mathbf{C}_1 \in \mathbb{R}^{p\times n_1}, \mathbf{C}_2 \in \mathbb{R}^{p\times n_2}, \mathbf{L}_{i1} \in \mathbb{R}^{n_1\times p}$ и $\mathbf{L}_{i2} \in \mathbb{R}^{n_2\times p}$.

В этом разделе на самом деле мы не будем предполагать определенно, что $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}_+^n$ и что система (5) положительно определена, но условия, накладываемые на $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$, подразумевают, что линейные части в представлении (6), т.е. матрицы $\mathbf{A}_0 - \mathbf{L}_1\mathbf{C}, \mathbf{A}_1 - \mathbf{L}_2\mathbf{C}$ и $\mathbf{B}$, положительны.

Рассмотрим следующий интервальный наблюдатель:

$$\mathbf{E}\dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A}_0 - \mathbf{L}_1\mathbf{C})\underline{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{A}_1 - \mathbf{L}_2\mathbf{C})\underline{\mathbf{x}}(t-\tau) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \underline{\boldsymbol{\delta}}(t) + \mathbf{L}_1\mathbf{y}(t) + \mathbf{L}_2\mathbf{y}(t-\tau),$$
$$\mathbf{E}\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A}_0 - \mathbf{L}_1\mathbf{C})\bar{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{A}_1 - \mathbf{L}_2\mathbf{C})\bar{\mathbf{x}}(t-\tau) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \bar{\boldsymbol{\delta}}(t) + \mathbf{L}_1y(t) + \mathbf{L}_2\mathbf{y}(t-\tau) \tag{7}$$

с начальными условиями $\underline{\mathbf{x}}_0, \bar{\mathbf{x}}_0$, данными в допущении 3. Из представления (7) можно сделать вывод, что динамика оценок $\underline{\mathbf{x}}(t)$ и $\bar{\mathbf{x}}(t)$ независима.

Теорема 1. [21] Пусть выполняются допущения 1–3, матрица $\mathbf{A}_0 - \mathbf{L}_1\mathbf{C}$ метцлерова с гурвицевой частью $\mathbf{A}_{04} - \mathbf{L}_{12}\mathbf{C}_2$, и матрица $\mathbf{A}_1 - \mathbf{L}_2\mathbf{C}$ неотрицательна. Тогда в представлениях (5), (7) выполняется $\underline{\mathbf{x}}(t) \leq \mathbf{x}(t) \leq \bar{\mathbf{x}}(t)$ для всех $t \geq 0$. В дополнение, если $\max_{1\leq i\leq n_2}|\lambda_i([\mathbf{A}_{04} - \mathbf{L}_{12}\mathbf{C}_2]^{-1}[\mathbf{A}_{14} - \mathbf{L}_{22}\mathbf{C}_2])| < 1$ и существуют матрицы $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ в форме (4) и $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ такие, что для некоторого числа $\gamma > 0$ удовлетворяются линейно-матричные неравенства (LMI)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Psi} & \mathbf{P}^{\mathrm{T}} & \mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}_1 - \mathbf{L}_2\mathbf{C}) \\ \mathbf{P} & -\gamma^2\mathbf{I}_m & 0 \\ (\mathbf{A}_1 - \mathbf{L}_2\mathbf{C})^{\mathrm{T}}\mathbf{P} & 0 & -\mathbf{U} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}_0 - \mathbf{L}_1\mathbf{C}) + (\mathbf{A}_0 - \mathbf{L}_1\mathbf{C})^{\mathrm{T}}\mathbf{P} + \mathbf{U} + \mathbf{I}_n, \mathbf{U} \succ 0,$$

тогда $\underline{\mathbf{x}}(t), \overline{\mathbf{x}}(t) \in \mathcal{L}_\infty^n$ для любого $\tau > 0$ и H_∞ – усилитель от входов $\boldsymbol{\delta} - \underline{\boldsymbol{\delta}}$ и $\overline{\boldsymbol{\delta}} - \boldsymbol{\delta}$ к ошибкам оценивания состояния $\mathbf{x} - \underline{\mathbf{x}}$ и $\overline{x} - \mathbf{x}$ соответственно, меньше, чем число γ.

Замечание 1. Отметим, что результат теоремы 1 означает, что если $\boldsymbol{\delta}(t) - \underline{\boldsymbol{\delta}}(t) \to 0$, $\overline{\boldsymbol{\delta}}(t) - \boldsymbol{\delta}(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, тогда $\underline{\mathbf{x}}(t) \to \mathbf{x}(t) \leftarrow \overline{\mathbf{x}}(t)$ асимптотически.

Также заметим, что введенные в формулировке теоремы 1 линейно-матричные неравенства подразумевают свойство устойчивости по Гурвицу матрицы $\mathbf{A}_{04} - \mathbf{L}_{12}\mathbf{C}_2$, и они могут быть переписаны в форме, подходящей для нахождения матриц $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$.

Следствие 1. Если существует $\mu > 0$, матричные переменные $\mathbf{W}_1 \in \mathbb{R}^{n\times p}, \mathbf{W}_2 \in \mathbb{R}^{n\times p}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2}$, имеющие общую структуру, и диагональные матрицы $\mathbf{S}, \mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющие следующим линейно-матричным неравенствам

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Psi} & \mathbf{P}^{\mathrm{T}} & \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_1 - \mathbf{W}_2\mathbf{C} \\ \mathbf{P} & -\gamma^2\mathbf{I}_n & 0 \\ \mathbf{A}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P} - \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_2^{\mathrm{T}} & 0 & -\mathbf{U} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{P} - \mathbf{W}_1\mathbf{C} - \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_1^{\mathrm{T}} + \mathbf{U} + \mathbf{I}_n, \mathbf{U} \succ 0,$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_2} & \mathbf{A}_{14}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_3 - \mathbf{C}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_{22}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{P}_3\mathbf{A}_{14} - \mathbf{W}_{22}\mathbf{C}_2 & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \succ 0, \tag{8}$$

$$\mathbf{Q} + \mu^2\mathbf{I}_{n_2} + \mu(\mathbf{P}_3\mathbf{A}_{04} - \mathbf{W}_{12}\mathbf{C}_2) + \mu(\mathbf{A}_{04}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_3 - \mathbf{C}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_{12}^{\mathrm{T}}) \leq 0, \tag{9}$$

$$\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_0 - \mathbf{W}_1\mathbf{C} + \mathbf{S} \geq 0, \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_1 - \mathbf{W}_2\mathbf{C} \geq 0, \tag{10}$$

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11} \\ \mathbf{W}_{12} \end{bmatrix}, \mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{21} \\ \mathbf{W}_{22} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_1 > 0, \mathbf{P}_3 > 0, \mathbf{P} = \mathrm{diag}[\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_3]; \mathbf{S} > 0, \mathbf{Q} \succ 0,$$

тогда $\mathbf{L}_1 = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{W}_1, \mathbf{L}_2 = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{W}_2$ – требуемые матрицы усиления наблюдателя, откуда следуют все ограничения теоремы 1.

Следствие 1 означает, что матрица $\mathbf{P}$ определена диагонально (т.е. $\mathbf{P}_1 \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}, \mathbf{P}_3 \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2}$ являются диагональными, поскольку $\mathbf{P}_2 = 0$, что является ограничением в отношении (4), что, однако, естественно для неотрицательных систем). Линейно-матричные неравенства (8)–(9) подразумевают ограничение $\max_{1\leq i\leq n_2}|\lambda_i([\mathbf{A}_{04} - \mathbf{L}_{12}\mathbf{C}_2]^{-1}[\mathbf{A}_{14} - \mathbf{L}_{22}\mathbf{C}_2])| < 1$, и неравенства (10) гарантируют, что матрицы $\mathbf{A}_0 - \mathbf{L}_1\mathbf{C}, \mathbf{A}_1 - \mathbf{L}_2\mathbf{C}$ – метцлеровы и неотрицательны соответственно.

Замечание 2. Наконец, отметим, что ограниченная функция $\mathbf{d}(\cdot)$ может зависеть от измеримого вектора выхода $\mathbf{y}$ и вектора входа $\mathbf{u}$ нелинейным образом, что не меняет применимость условия теоремы 1 при условии, что $\underline{\mathbf{d}}(t)$ и $\overline{\mathbf{d}}(t)$ могут быть найдены. Таким образом, предложенный интервальный наблюдатель (7) может быть применим для оценивания неопределенных нелинейных дифференциально-алгебраических систем. Запаздывание τ может также рассматриваться неопределенным и изменяющимся во времени с учетом небольшой модификации структуры наблюдателя (7) в виде, который был представлен в работе [12].

Моделирование

Для проверки эффективности предложенных алгоритмов рассмотрим динамическую модель межотраслевого баланса с учетом запаздывания в экономике, заданную в форме (5).

В экономике модель межотраслевого баланса – это количественный метод, представляющий взаимозависимость между производством различных товаров. Если использовать представление в виде системы (5), то x_i обозначает производство i-го товара, матрица $\mathbf{A}_0 - \mathbf{I}$ представляет матрицу скоростей производства товаров в системе, $\mathbf{E}$ соответствует размещению запасов товаров, матрица $\mathbf{A}_1$ представляет влияние прошлого производства товаров, вход $\mathbf{u}(t)$ – матрица известных скоростей поставок материалов, возмущение $\mathbf{d}(t)$ представляет неопределенность и взаимозависимость поставок, выход $\mathbf{y}$ соответствует производству готового товара для вывоза и оценки его качества, помехи $\boldsymbol{\upsilon}(t)$ обозначают ошибки в производстве, в оценке качества товара и некачественный товар. Обычно задача в экономике заключается в восстановлении вектора производства каждого товара в сети производства. Для этого можно использовать наблюдатель.

Система моделируется в канонической форме (3) отдельно для дифференциальной части системы, и для алгебраической. Параметры системы заданы:

$$\mathbf{A}_0=\begin{bmatrix}-0{,}8 & 0{,}12 & 0{,}34 & 0{,}2 & 0{,}14\\ 0{,}41 & -1{,}1 & 0{,}3 & 0{,}23 & 0{,}32\\ 0{,}14 & 0{,}21 & -1 & 0{,}11 & 0{,}4\\ 0 & 0{,}15 & 0{,}2 & -1 & 0\\ 0{,}09 & 0{,}1 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix},\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}-0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7\\ 0{,}05 & 0{,}09 & 0 & 0{,}13 & 0\\ -0{,}7 & 0 & 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}12\\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0\\ -0{,}15 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0{,}3\end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}I_3 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\mathbf{C}=[1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0],u(t)=1+0{,}35\sin(0{,}6t),$$

$$\mathbf{d}(t)=\delta\begin{bmatrix}0{,}2\sin(8x_1+t)\\ 0{,}3\cos(t)\\ \sin(0{,}6x_3)\\ \sin(3x_2)\\ \cos(2t)\end{bmatrix},\upsilon(t)=V\sin(10t),\delta=0{,}1,V=0{,}4,\tau=4.$$

Здесь $u(t)$ – входное воздействие, $\mathbf{d}(t)$ – внешнее нелинейное возмущение, взятое для моделирования системы, $\upsilon(t)$ – шум в канале измерений с известной амплитудой V, также были взяты для моделирования и исследования полученных алгоритмов. Численные вычисления и моделирование проводится в среде Mathcad 14 в дискретном времени с шагом дискретизации $T={}^{t_k}/_{N}$, где t_k – исследуемый промежуток времени работы системы, $N=10^4$ – количество интервалов дискретизации. Отметим, что на конечном интервале времени, используемом для моделирования, класс входов L_∞ включается в класс L_2 (предполагается что входы $\mathbf{d}(t)$ и $\upsilon(t)$ равны нулю после окончания моделирования).

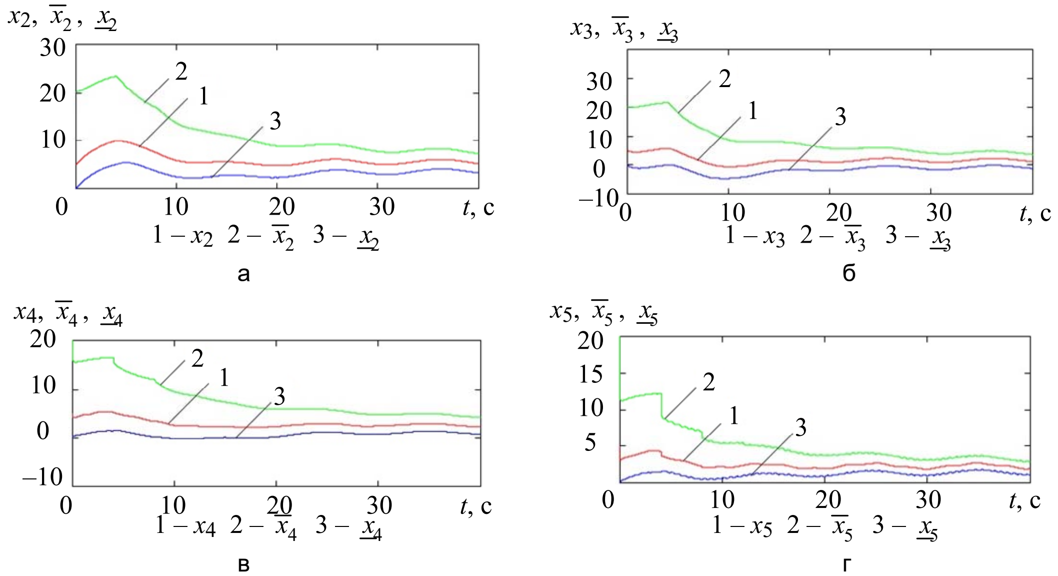

Рисунок. Результаты моделирования интервального наблюдателя для системы межотраслевого баланса: состояние $x_i, i=\overline{2{,}5}$ (1) и его интервальная оценка: верхняя $\overline{x}_i, i=\overline{2{,}5}$ (2) и нижняя границы $\underline{x}_i, i=\overline{2{,}5}$ (3): x_2(а); x_3(б); x_4 (в); x_5 (г)

Для построения интервального наблюдателя для такой системы необходимо найти такие матрицы коэффициентов наблюдателя, которые бы удовлетворяли теореме 1, и система была устойчивой и метцлеровой. Для этого требуется решить линейно-матричные неравенства из теоремы 1 и следствия 1, что можно сделать в среде MATLAB в пакете оптимизации YALMIP. Были найдены матрицы $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$:

$$\mathbf{L}_1=\begin{bmatrix}12{,}1973\\ 0{,}33\\ 0{,}078\\ -0{,}0675\\ 0{,}0466\end{bmatrix},\mathbf{L}_2=\begin{bmatrix}-1{,}1711\\ -0{,}0285\\ -0{,}7605\\ -0{,}0658\\ -0{,}1927\end{bmatrix},$$

при которых можно построить интервальный наблюдатель для системы (5) с ограничением на внешнее возмущение в виде границ $\underline{\mathbf{d}}=-\delta\cdot 1_5=-\overline{\mathbf{d}}$, при этом условия теоремы 1 и ее линейно-матричные неравенства удовлетворяются при $\gamma^2=27$, диагональной матрицы $\mathbf{P}=\mathrm{diag}[1{,}5795\quad 4{,}3572\quad 4{,}718\quad 5{,}9494\quad 10{,}838]$ и матрицы

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix}11{,}4696 & -0{,}1609 & -0{,}144 & -0{,}0321 & 0{,}6298\\ -0{,}1609 & 3{,}9713 & -1{,}2451 & -0{,}9421 & -1{,}0615\\ -0{,}144 & -1{,}2451 & 3{,}7982 & -0{,}8551 & -0{,}939\\ -0{,}0321 & -0{,}9421 & -0{,}8551 & 4{,}8183 & 0{,}0502\\ 0{,}6298 & -1{,}0615 & -0{,}939 & 0{,}0502 & 7{,}7571\end{bmatrix}.$$

Результаты моделирования представлены на рисунке для не измеряемых состояний производства товаров $x_i, i = \overline{2,5}$. Было предположено, что неопределенность начальных условий для каждого состояния x_i заключена в интервал от 0 до 20. На каждом графике (1) соответствуют изменению $x_i,\ i = \overline{2,5}$, а (2) и (3), соответственно, представляют состояния интервального наблюдателя $\overline{x}_i, \underline{x}_i,\ i = \overline{2,5}$. Поскольку в системе присутствует неопределенность $\overline{\boldsymbol{\delta}}(t) - \underline{\boldsymbol{\delta}}(t) \neq 0$ в формуле (6), оценки состояний системы $\underline{x}_i, \overline{x}_i$ не сходятся к точным значениям состояний x_i, но они предоставляют интервальную оценку состояния с точностью, пропорциональной γ.

Заключение

В данной работе предложен наблюдатель для сингулярных систем дифференциальных уравнений с единичным индексом нильпотентности с постоянным запаздыванием по состоянию, а также ряд условий, при которых построение наблюдателя возможно. Предложен алгоритм нахождения коэффициентов усиления наблюдателя, при которых наблюдатель обеспечивает максимальную точность оценивания состояний системы, пропорционально неопределенностям, заданным в системе. Проведена апробация предложенного алгоритма построения интервального наблюдателя на примере системы межотраслевого баланса. В развитие предложенного результата запаздывание в системе может рассматриваться неопределенным и изменяющимся во времени при небольшой модификации структуры предложенного наблюдателя. Помимо этого, предложенный интервальный наблюдатель можно использовать для оценивания неопределенных нелинейных дифференциально-алгебраических систем.

References

1. Besançon G. Nonlinear observers and applications. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 2007, vol. 363. doi: 10.1007/978-3-540-73503-8
2. Meurer T., Graichen K., Gilles E.-D. Control and observer design for nonlinear finite and infinite dimensional systems. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 2005, vol. 322, pp. V-VI.
3. Duan G.-R. *Analysis and Design of Descriptor Linear Systems*. Springer, 2010, vol. 23.
4. Silva M.S., de Lima T.P. Looking for nonnegative solutions of a Leontief dynamic model. *Linear Algebra and its Applications*, 2003, vol. 364, pp. 281–316. doi: 10.1016/S0024-3795(02)00569-4
5. Campbell S.L. *Singular Systems of Differential Equations*. London, Pitman, 1980, 176 p.
6. Schüpphaus R., Müller P. Control analysis and synthesis of linear mechanical descriptor systems. In: *Advanced Multibody System Dynamics*. Ed. W. Schiehlen. Academic Publishers, Dordrecht, 1993, pp. 463–468.
7. Kolmanovskii V., Myshkis A. *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1999.
8. Sipahi R., Niculescu S.-I., Abdallah C., Michiels W., Gu K. Stability and stabilization of systems with time delay limitations and opportunities. *IEEE Control Systems Magazine*, 2011, vol. 31, no. 1, pp. 38–65. doi: 10.1109/MCS.2010.939135
9. Fridman E. Descriptor discretized Lyapunov functional method: analysis and design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, vol. 51, no. 5, pp. 890–897. doi: 10.1109/TAC.2006.872828
10. Zheng G., Barbot J.-P., Boutat D., Floquet T., Richard J.-P. On observation of time-delay systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, vol. 56, no. 8, pp. 1973–1978. doi: 10.1109/TAC.2011.2142590
11. Mazenc F., Niculescu S., Bernard O. Exponentially stable interval observers for linear systems with delay. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2012, vol. 50, no. 1, pp. 286–305. doi: 10.1137/100812124
12. Efimov D., Perruquetti W., Richard J.-P. Interval estimation for uncertain systems with time-varying delays. *International Journal of Control*, 2013, vol. 86, no. 10, pp. 1777–1787. doi: 10.1080/00207179.2013.796526
13. Gouze J., Rapaport A., Hadj-Sadok M. Interval observers for uncertain biological systems. *Ecological Modelling*, 2000, vol. 133, no. 1–2, pp. 46–56. doi: 10.1016/S0304-3800(00)00279-9
14. Kieffer M., Walter E. Guaranteed nonlinear state estimator for cooperative systems. *Numerical Algorithms*, 2004, vol. 37, no. 1–4, pp. 187–198. doi: 10.1023/B:NUMA.0000049466.96588.a6
15. Efimov D., Raïssi T., Zolghadri A. Control of nonlinear and LPV systems: interval observer-based framework. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, vol. 5, no. 3, pp. 773–782. doi: 10.1109/TAC.2013.2241476
16. Efimov D., Fridman L., Raïssi T., Zolghadri A., Seydou R. Interval estimation for LPV systems applying high order sliding mode techniques. *Automatica*, 2012, vol. 48, no. 9, pp. 2365–2371. doi: 10.1016/j.automatica.2012.06.073
17. Raïssi T., Efimov D., Zolghadri A. Interval state estimation for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, vol. 57, no. 1, pp. 260–265. doi: 10.1109/TAC.2011.2164820

18. Mazenc F., Dinh T., Niculescu S.-I. Robust interval observers and stabilization design for discrete-time systems with input and output. *Automatica*, 2013, vol. 49, no. 11, pp. 3490–3497. doi: 10.1016/j.automatica.2013.09.016
19. Fridman E., Shaked U. H∞-control of linear state-delay descriptor systems: an LMI approach. *Linear Algebra and its Applications*, 2002, vol. 351–352, pp. 271–302. doi: 10.1016/S0024-3795(01)00563-8
20. Virnik E. Stability analysis of positive descriptor systems. *Linear Algebra and its Applications*, 2008, vol. 429, no. 10, pp. 2640–2659. doi: 10.1016/j.laa.2008.03.002
21. Efimov D., Polyakov A., Richard J.-P. Interval observer design for estimation and control of time-delay descriptor systems. *European Journal of Control*, 2015, vol. 23, pp. 26–35. doi: 10.1016/j.ejcon.2015.01.004

Харьковская Татьяна Александровна – аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, easymedia@mail.ru

Кремлев Артем Сергеевич – кандидат технических наук, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, kremlev_artem@mail.ru

Ефимов Денис Валентинович – PhD, ответственный исследователь первого ранга, Национальный институт исследований по информатике и автоматике, Лилль, 59650, Франция, Denis.Efimov@inria.fr

Tatiana A. Kharkovskaia – postgraduate, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, easymedia@mail.ru

Artem S. Kremlev – PhD, Associate professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, kremlev_artem@mail.ru

Denis V. Efimov – PhD, Principal investigator of the first rank, INRIA (Institut national de recherche en informatique et en automatique), Lille, 59650, France, Denis.Efimov@inria.fr