

УДК 621.397.3; 519.642.3

О ВОССТАНОВЛЕНИИ СМАЗАННЫХ ЦВЕТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В.С. Сизиков^а, А.К. Ильин^а

^а Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация

Адрес для переписки: sizikov2000@mail.ru

Информация о статье

Поступила в редакцию 17.03.17, принята к печати 15.04.17

doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-3-417-423

Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Сизиков В.С., Ильин А.К. О восстановлении смазанных цветных изображений // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2017. Т. 17. № 3. С. 417–423. doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-3-417-423

Аннотация

Предмет исследования. В работе рассматривается вопрос об «обычном» (небыстром), а также быстром восстановлении цветных смазанных изображений на основе решения интегрального уравнения Фредгольма I рода (некорректная задача). **Метод.** Уравнение решается методом квадратур с регуляризацией Тихонова. Рассматриваются два способа обработки цветных изображений – способы покомпонентной и векторной обработки. **Основной результат.** Если обрабатывается модельное изображение и алгоритм обычный (небыстрый), то параметр регуляризации α выбирается из условия минимума погрешности восстановления изображения. Если обрабатывается реальное изображение и алгоритм быстрый, то для выбора α и величины смаза Δ предлагается быстрый способ «заготовленной матрицы», реализуемый в пределах 1 с. Если же обрабатывается реальное изображение, но алгоритм небыстрый, то предлагается способ оценки Δ (и угла смаза θ) на основе спектра смазанного изображения, а α выбирается известными способами. **Практическая значимость.** Представленные алгоритмы могут быть использованы для восстановления цветных смазанных изображений, например, изображений быстро движущихся объектов (автомобиля, самолета) путем математико-компьютерной обработки смазанных (и зашумленных) изображений.

Ключевые слова

смазанное цветное изображение, интегральное уравнение, некорректная задача, регуляризация, способы покомпонентной и векторной обработки, параметр регуляризации, смаз, быстрый алгоритм «заготовленной» матрицы, спектральный способ, Matlab

Благодарности

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-08-00442).

ON RESTORATION OF SMEARED COLOR IMAGES

V.S. Sizikov^а, A.K. Ilyin^а

^а ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

Corresponding author: sizikov2000@mail.ru

Article info

Received 17.03.17, accepted 15.04.17

doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-3-417-423

Article in Russian

For citation: Sizikov V.S., Ilyin A.K. On restoration of smeared color images. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2017, vol. 17, no. 3, pp. 417–423 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-3-417-423

Abstract

Subject of Research. The paper deals with the problem of a "usual" (not fast) and fast restoration of color smeared images based on solving the Fredholm integral equation of the first kind (ill-posed problem). **Method.** The equation is solved by the quadrature method with Tikhonov's regularization. Two methods for processing of color images are considered: methods of component-wise and vector processing. **Main Results.** If a model image is processed and an algorithm is usual (not fast), then the regularization parameter α is chosen from the condition of restoration error minimum. If a real image is processed and an algorithm is fast, then to choose α and the value of smear Δ , we propose the fast method of "prepared matrix", realized within 1 second. But if a real image is processed and an algorithm is not fast, then we propose the method for estimating Δ (and the smear angle θ), based on the spectrum of smeared image, and α is selected by known methods. **Practical Relevance.** The presented algorithms can be used to restore color smeared images, e.g., images of fast moving objects (a car, an airplane) by mathematical and computer processing of smeared (and noisy) images.

Keywords

smeared color image, integral equation, ill-posed problem, regularization, component-wise and vector processing methods, regularization parameter, smear, "prepared" matrix fast algorithm, spectral method, MATLAB

Acknowledgements

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (RFBR), grant No. 13-08-00442.

Введение

Задача восстановления искаженных изображений является актуальной [1–5]. Однако, несмотря на значительные достижения в решении этой задачи [6–10], имеются недостаточно решенные вопросы, требующие дальнейшей проработки.

Обработка цветных изображений обычно выполняется путем их разложения на отдельные компоненты [11–13], однако такая обработка возможна и без разложения на цветовые компоненты. Быстрое (в реальном времени) восстановление изображений в основном сводится к решению интегрального уравнения типа свертки с использованием быстрого преобразования Фурье [14]. Но уравнение может быть не типа свертки, когда функция рассеяния точки (ФРТ) не является пространственно-инвариантной. В этом случае актуальным является построение другого «быстрого» алгоритма.

Важной проблемой является оценка погрешности восстановления изображения. Считается, что (незавышенная) оценка погрешности решения некорректной задачи невозможна без использования дополнительных данных о решении. Тем не менее, такая оценка возможна с использованием, например, результатов решения обучающих примеров [10,15].

Представляется необходимым развитие способов оценки параметров функции рассеяния точки. Обычно [5, 10] параметры ФРТ (смаз и дефокус) оценивают по штрихам и пятнам на изображении. Полагаем, что такая оценка не является достаточно точной.

Настоящая работа представляет собой новые исследования авторов, позволяющие в некоторой степени развить решение поставленных выше задач.

О специфике обработки цветных изображений

Рассмотрим случай, когда изображение является цветным. Этому случаю посвящено много публикаций ([6–8, 10–13] и др.). Будем иметь в виду представленную в пакете IPT системы MatLab систему цветов RGB [7, С. 423; 8, С. 206].

Как известно [7, 8, 10], существует два способа обработки цветных изображений. В способе покомпонентной обработки [7, 8, 10, 13] RGB-изображение разбивается на три компоненты R, G и B. Каждая компонента обрабатывается отдельно, и после обработки компоненты соединяются в единое RGB-изображение. Такой способ используется, например, в языке программирования C++ [13].

MatLab дает возможность использовать другой, более удобный способ – способ векторной обработки, в котором прямая и обратная задачи решаются без разбиения изображения на три компоненты, а именно, изображение обрабатывается как трехмерная матрица. Такой способ упрощает программирование, экономит компьютерную память и ускоряет вычисления. В данной работе для обработки RGB-изображений используется способ векторной обработки.



а



б

Рис. 1. Неискаженное (точное) изображение автомобиля $w(x, y)$ (файл auto.png 161×485×3) (а); горизонтально смазанное и слабо зашумленное изображение автомобиля $g(x, y)$ (файл 161×505×3, смаз $\Delta = 20$ пкс, шум = 0,3 %) (б)

Заметим, что при программировании в MatLab'е большинство m-функций имеют одинаковые обращения как в случае серых (gray), так и цветных (RGB) изображений, только массивы имеют разные

размерности: 2 и 3. Аналогично, нижеследующие математические соотношения записываются одинаково для gray- и RGB-изображений, но в записях подразумеваются дву- и трехмерные массивы.

Рассмотрим ряд алгоритмов (способов) обработки цветных изображений на примере RGB-изображения автомобиля (рис. 1).

Обработка модельного изображения небыстрым алгоритмом

Сначала полагаем, что изображение автомобиля является модельным, т.е. точное изображение (рис. 1, а) известно (задано), а смазанное (и зашумленное) изображение смоделировано (с помощью разработанной собственной m -функции `smeating.m` [10]).

Решаем обратную задачу – восстановление изображения $w(x, y)$ по искаженному изображению $g(x, y)$. Задача сводится к решению следующего семейства одномерных интегральных уравнений (ИУ) Фредгольма I рода:

$$Aw_y \equiv \int_a^b h(x, \xi) w_y(\xi) d\xi = g_y(x), \quad c \leq x \leq d, \quad (1)$$

где ФРТ (вообще говоря, неразностная) равна

$$h(x, \xi) = \begin{cases} 1/\Delta, & x \leq \xi \leq x + \Delta, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (2)$$

причем ось x направлена вдоль смаза, а y – перпендикулярно смазу, Δ – смаз вдоль x , $[a, b]$ – пределы изменения ξ , а $[c, d]$ – пределы изменения x .

Для решения ИУ (1) при каждом значении y (т.е. в каждой y -строке изображения) применим метод квадратур с регуляризацией Тихонова для устойчивости, согласно которому интеграл в (1) заменяется конечной суммой и получается система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в виде

$$Aw_y = g_y, \quad (3)$$

где A – $(n \times n)$ -матрица, связанная с ФРТ (2): $A_{ik} = h(x_i, \xi_k)$, $x_i = \xi_i = i = 1, 2, \dots, n$, причем n – число дискретных отсчетов вдоль x . Согласно методу регуляризации Тихонова, вместо неустойчивой СЛАУ (3) решается устойчивая (регуляризованная) СЛАУ:

$$(\alpha E + A^T A) w_{\alpha y} = A^T g_y, \quad (4)$$

где $\alpha > 0$ – параметр регуляризации, E – единичная $(n \times n)$ -матрица, A^T – транспонированная матрица.

Решение СЛАУ (4) равно

$$w_{\alpha y} = (\alpha E + A^T A)^{-1} A^T g_y. \quad (5)$$

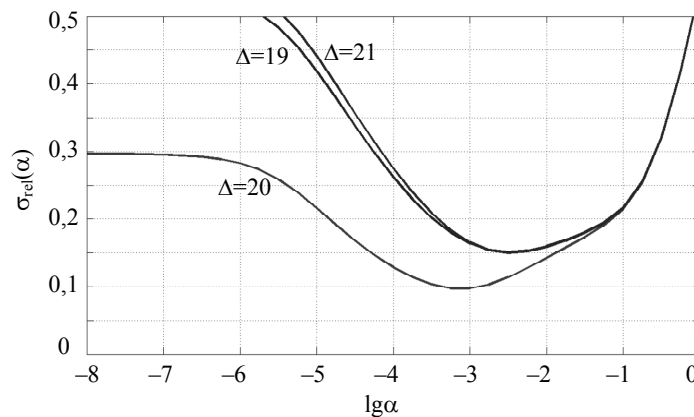


Рис. 2. Относительная погрешность решения $\sigma_{rel}(\alpha)$ согласно (6) для ряда значений Δ

Поскольку точное изображение в данном (модельном) примере известно (задается), то может быть вычислена относительная среднеквадратическая погрешность восстановления изображения в функции α [10, С. 98] (в [15] приведены доводы в пользу использования именно такого выражения для погрешности):

$$\sigma_{rel}(\alpha) = \frac{\|w_\alpha - \bar{w}\|_{L_2}}{\|\bar{w}\|_{L_2}} = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n [(w_\alpha)_{ji} - \bar{w}_{ji}]^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \bar{w}_{ji}^2}}, \quad (6)$$

где w_α – регуляризованное решение (изображение), а \bar{w} – точное решение. На рис. 2 – полученная зависимость относительной погрешности σ_{rel} от α (а также от Δ).

Из рис. 2 видно, что при $\sigma_{\text{rel}}(\alpha) = \min_{\alpha}$ получается значение α , соответствующее минимальной погрешности, которое обозначим как α_{opt} . В данном примере $\alpha_{\text{opt}} \approx 10^{-3}$, а $\sigma_{\text{rel}}(\alpha_{\text{opt}}) \approx 0,1 = 10\%$ при $\Delta = 20$. Видим также, что небольшая ошибка в Δ ведет к заметному увеличению (в 1,5 раза) погрешности $\sigma_{\text{rel}}(\alpha_{\text{opt}})$.

На рис. 3 – восстановленное изображение автомобиля при $\alpha = 10^{-3}$, $\Delta = 20$. Получилось вполне удовлетворительное восстановление изображения, а именно, на рис. 1, б, из-за смаза не были видны лицо пассажира, антенна, колеса, дверные щели и т.д., а после восстановления они стали видны (на рис. 3).



Рис. 3. Восстановленное изображение автомобиля при $\Delta = 20$, $\alpha = 10^{-3}$

Обработка реального изображения быстрым алгоритмом

Теперь будем полагать, что обрабатывается реальное смазанное цветное изображение автомобиля, а именно, точное изображение (рис. 1, а) неизвестно, а известно лишь смазанное изображение (рис. 1, б), причем значения Δ и α также неизвестны. Кроме того, требуется быстрое восстановление изображения. Это – самый сложный случай из рассматриваемых. Для такого случая разработаны следующие способы выбора параметра регуляризации α : способ визуального подбора, принцип невязки, обобщенный принцип невязки и др. [9, 10, 16–19]. Однако они не годятся для быстрого (в пределах 1 с) восстановления изображения, причем с выбором значений Δ и α .

В работе [20] рассмотрен и предложен ряд быстрых устойчивых алгоритмов устранения прямолинейного равномерного смаза серого (gray) изображения. В данной работе используем один из быстрых алгоритмов применительно к цветному (RGB) изображению. А именно, остановимся на алгоритме, использующем соотношения (1)–(5), и применим его к восстановлению цветного изображения.

Запишем решение (5) СЛАУ (4) в виде

$$w_{\alpha y} = B_\alpha g_y, \tag{7}$$

где

$$B_\alpha = (\alpha E + A^T A)^{-1} A^T. \tag{8}$$

Здесь B_α – матрица, не зависящая от y , которая может быть предварительно вычислена, и восстановление изображения w сведется к умножению «заготовленной» матрицы B_α на каждую y -строку изображения g . Пусть m и n – число строк и столбцов в изображении g . Тогда, согласно [20], этот алгоритм при $m = n$ потребует n^3 операций умножения/деления (без учета операций сложения/сопряжения) и $3n^2$ ячеек памяти при обработке всего gray-изображения, а при обработке всего RGB-изображения потребуются $3n^3$ операций и $9n^2$ ячеек памяти.

Если, например, $m = n = 400$, то алгоритм (7)–(8) потребует $3n^3 \approx 192$ млн операций умножения. Если скорость компьютера около 1 млрд оп/с, то восстановление всего изображения при фиксированных Δ и α займет приблизительно 0,2 с машинного времени.

Быстрый способ оценки параметров Δ и α

Матрицу B_α согласно (8) нужно рассчитать заранее (до появления объекта). Однако она зависит от величин смаза Δ и параметра регуляризации α . Предлагается следующий быстрый способ оценки Δ и α .

Заранее рассчитываются несколько матриц B_α для ряда значений Δ и α (диапазон значений которых может быть оценен по предыдущим сеансам). При появлении объекта фиксируется его изображение g ,

вычисляются несколько изображений w_α согласно (7) при разных Δ и α , и на общем экране на отдельные малые субэкраны выводятся изображения w_α (рис. 4).

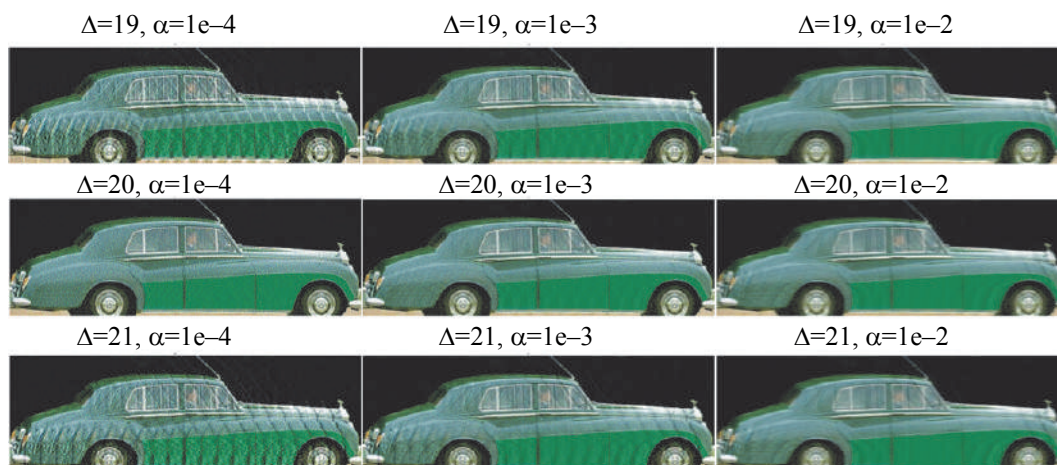


Рис. 4. Вывод на субэкраны нескольких восстановленных изображений автомобиля

Рассматривая выведенные изображения, опытные диспетчеры визуально и быстро выберут наилучшие значения Δ и α . Данный способ соединяет математико-компьютерную обработку с визуальной обработкой, опирающейся на человеческий мозг как хороший обработчик. Рис. 4 показывает, что при $\Delta = 20$, $\alpha = 10^{-3}$ получается наиболее успешное восстановление изображения, а именно, на исходном изображении (рис. 1, б) из-за смаза не были видны лицо пассажира, антенна, колеса, дверные щели и т.д., а после восстановления они стали видны. На рис. 3 приведено более подробное (крупное) восстановленное изображение автомобиля при выбранных $\Delta = 20$, $\alpha = 10^{-3}$. На рис. 5 для сравнения приведены восстановленные изображения при $\alpha = 0$, т. е. без регуляризации, являющиеся неустойчивыми и указывающие на необходимость использования регуляризации.

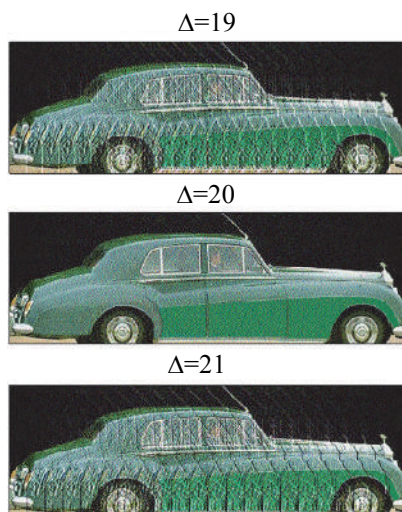


Рис. 5. Изображения автомобиля при $\alpha = 0$ (дополнение к рис. 4)

Отметим, что обработка каждого изображения на рис. 4 потребовала около 0,8 с машинного времени. Это время зависит от технических данных компьютера. Кроме того, оно может быть понижено, если изображения на рис. 4 обрабатывать параллельно.

Обработка реального изображения небыстрым алгоритмом

Если обрабатывается реальное изображение, но алгоритм обработки не обязательно быстрый, то можно использовать способ оценки Δ (и угла смазывания θ) на основе спектра (двумерного преобразования Фурье) смазанного изображения (рис. 6).

Этот способ изложен в работах [21, 22] (со ссылкой на работы [1, 3, 5]). Согласно этому способу, вычисляется спектр Фурье (рис. 6) смазанного цветного изображения $g(x, y)$, представленного на рис. 1, б. Величина смаза Δ определяется по формуле

$$\Delta = 2 \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \frac{1}{r}, \quad (9)$$

где ω_2/ω_1 – отношение сторон внутреннего прямоугольника на рис. 6, а $r = M/N$ – отношение числа строк M к числу столбцов N изображения на рис. 1, б. Формула (9), учитывающая r , является обобщением формулы $\Delta = 2 \omega_2/\omega_1$, приведенной в работах [21, 22].

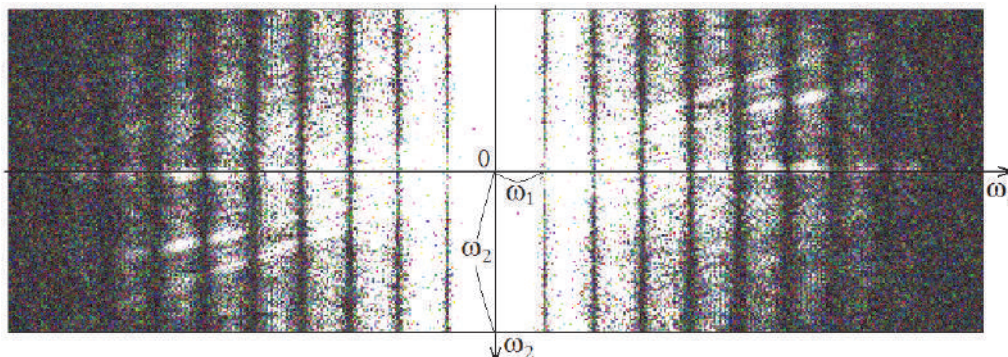


Рис. 6. Двумерное преобразование Фурье (модуль) $|G(\omega_1, \omega_2)|$ изображения $g(x, y)$

Применительно к изображению на рис. 1, б (где $M = 161$, $N = 505$, $r = 0,3188$), и его спектру на рис. 6 было получено по нескольким замерам $\omega_2/\omega_1 \approx 3,31 \pm 0,04$, откуда искомый смаз, согласно (9), получился равным $\Delta \approx 20,76 \pm 0,20$, близко к точному значению $\Delta = 20$ пкс.

Что касается параметра регуляризации α , то его выбор следует выполнять вышеперечисленными способами: способом визуального подбора, принципом невязки, обобщенным принципом невязки и др.

Заключение

В работе рассмотрен вопрос об «обычном» (небыстром), а также быстром восстановлении цветных смазанных изображений на основе решения семейства одномерных интегральных уравнений Фредгольма I рода (некорректная задача). Рассмотрено решение уравнений методом квадратур с регуляризацией Тихонова. Сделано сравнение двух способов обработки цветных изображений – способов покомпонентной и векторной обработки. Если изображение является модельным (точное изображение задано) и алгоритм небыстрым, то параметр регуляризации α выбирается из условия минимума погрешности решения. Если изображение реальное и алгоритм быстрый, то для определения величины смаза Δ и параметра α предложен быстрый способ «заготовленной матрицы», реализуемый в пределах 1 с. Если же изображение реальное, но алгоритм небыстрый, то использован спектральный способ оценки Δ . Представленные алгоритмы могут быть использованы для восстановления цветных смазанных изображений, например, изображений быстро движущихся целей, для анализа быстро протекающих процессов (смазанный кровотоки в сосудах в томографии), для повышения качества теле- или кинокадров и т. д. [11–13, 23–25].

Литература

1. Василенко Г.И., Тараторин А.М. Восстановление изображений. М.: Радио и связь, 1986. 304 с.
2. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В. Обратные задачи обработки фотоизображений // Некорректные задачи естествознания / Под ред. А.Н. Тихонова, А.В. Гончарского. М.: МГУ, 1987. С. 185–195.
3. Бейтс Р., Мак-Доннелл М. Восстановление и реконструкция изображений. М.: Мир, 1989. 336 с.
4. Методы компьютерной обработки изображений / Под ред. В.А. Соифера. М.: Физматлит, 2001. 784 с.
5. Грузман И.С., Киричук В.С., Косых В.П., Перетягин Г.И., Спектор А.А. Цифровая обработка изображений в информационных системах. Новосибирск: НГТУ, 2002. 352 с.
6. Дьяконов В., Абраменкова И. MATLAB. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник. СПб.: Питер, 2002. 608 с.
7. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2006. 1072 с.
8. Гонсалес Р., Вудс Р., Эддинс С. Цифровая обработка

References

1. Vasilenko G.I., Taratorin A.M. *Image Restoration*. Moscow, Radio i Svyaz' Publ., 1986, 304 p. (In Russian)
2. Tikhonov A.N., Goncharkii A.V., Stepanov V.V. Inverse Problems of Photoimages Processing. In *Ill-Posed Problems in Natural Science*. Ed. A.N. Tikhonov, A.V. Goncharkii. Moscow, MSU Publ., 1987, pp. 185–195. (In Russian)
3. Bates R.H.T., McDonnell M.J. *Image Restoration and Reconstruction*. Oxford, Clarendon Press, 1986.
4. *Methods of Computer Image Processing*. Ed. V.A. Soifer. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001, 784 p. (In Russian)
5. Gruzman I.S., Kirichuk V.S., Kosykh V.P., Peretyagin G.I., Spektor A.A. *Digital Image Processing in Information Systems*. Novosibirsk, NSTU Publ., 2002, 352 p. (In Russian)
6. D'yakonov V., Abramenkova I. *MATLAB. Processing of Signals and Images*. St. Petersburg, Piter Publ., 2002, 608 p. (In Russian)
7. Gonzales R.C., Woods R.E. *Digital Image Processing*. 2nd ed. Upper Saddle River, Prentice Hall, 2002, 793 p.
8. Gonzales R.C., Woods R.E., Eddins S.L. *Digital Image Processing Using MATLAB*. Prentice Hall, 2004, 609 p.

- изображений в среде MATLAB. М.: Техносфера, 2006. 616 с.
9. Hansen P.C., Nagy J.G., O'Leary D.P. *Deblurring Images: Matrices, Spectra, and Filtering*. Philadelphia: SIAM, 2006. 130 p.
 10. Сизиков В.С. Обратные прикладные задачи и MatLab. СПб.: Лань, 2011. 256 с.
 11. Шлихт Г.Ю. Цифровая обработка цветных изображений. М.: ЭКОМ, 1997. 336 с.
 12. Яне Б. Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2007. 584 с.
 13. Ягола А.Г., Кошев Н.А. Восстановление смазанных и дефокусированных цветных изображений // Вычислительные методы и программирование. 2008. Т. 9. С. 207–212.
 14. Арефьева М.В., Сысоев А.Ф. Быстрые регуляризирующие алгоритмы цифрового восстановления изображений // Вычислительные методы и программирование. 1983. № 39. С. 40–55.
 15. Сизиков В.С., Экземпляр Р.А. Предшествующая и последующая фильтрация шумов в алгоритмах восстановления изображений // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2014. № 1(89). С. 112–122.
 16. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. 3-е изд. М.: Наука, 1986. 288 с.
 17. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наук. думка, 1986. 544 с.
 18. Engl H., Hanke M., Neubauer A. *Regularization of Inverse Problems*. Dordrecht: Kluwer, 1996. 328 p.
 19. Воскобойников Ю.Е., Мухина И.Н. Локальный регуляризирующий алгоритм восстановления контрастных сигналов и изображений // Автометрия. 2000. № 3. С. 45–53.
 20. Сизиков В.С., Кирьянов К.А., Экземпляр Р.А. Два быстрых алгоритма восстановления смазанных изображений // Изв. вузов. Приборостроение. 2013. Т. 56. № 10. С. 24–30.
 21. Sizikov V.S. Estimating the point-spread function from the spectrum of a distorted tomographic image // *Journal of Optical Technologies*. 2015. V. 82. N 10. P. 655–658. doi: 10.1364/JOT.82.000655
 22. Сизиков В.С. Спектральный способ оценки функции рассеяния точки в задаче устранения искажений изображений // Оптический журнал. 2017. Т. 84. № 2. С. 36–44.
 23. Donatelli M., Estatico C., Martinelli A., Serra-Capizzano S. Improved image deblurring with anti-reflective boundary conditions and re-blurring // *Inverse Problems*. 2006. V. 22. P. 2035–2053. doi: 10.1088/0266-5611/22/6/008
 24. Сидоров Д.Н. Методы анализа интегральных динамических моделей: теория и приложения. Иркутск: ИГУ, 2013. 293 с.
 25. Sidorov D. *Integral Dynamical Models: Singularities, Signals and Control*. Singapore-London: World Scientific Publ., 2014. 243 p.
 9. Hansen P.C., Nagy J.G., O'Leary D.P. *Deblurring Images: Matrices, Spectra, and Filtering*. Philadelphia, SIAM, 2006, 130 p.
 10. Sizikov V.S. *Inverse Applied Problems and MatLab*. St. Petersburg, Lan' Publ., 2011, 256 p. (In Russian).
 11. Schlicht H.J. *Bildverarbeitung Digital*. Addison-Wesley Publ. Company, 1995.
 12. Jähne B. *Digital Image Processing*. 6th ed. Berlin–Heidelberg–NY, Springer, 2005, 654 p.
 13. Yagola A.G., Koshev N.A. Restoration of smeared and defocused color images. *Numerical Methods and Programming*, 2008, vol. 9, pp. 207–212. (In Russian)
 14. Aref'eva M.V., Sysoev A.F. Fast regularizing algorithms for digital image recovery. *Numerical Methods and Programming*, 1983, no. 39, pp. 40–55. (In Russian)
 15. Sizikov V.S., Ekzemplyarov R.A. Preliminary and subsequent filtering of noise in image restoration algorithms. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2014, no. 1, pp. 112–122. (In Russian)
 16. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Solutions of Ill-Posed Problems*. New York, Wiley, 1977.
 17. Verlan' A.F., Sizikov V.S. *Integral Equations: Methods, Algorithms, Programs*. Kiev, Naukova Dumka, 1986, 544 p. (In Russian).
 18. Engl H.W., Hanke M., Neubauer A. *Regularization of Inverse Problems*. Dordrecht, Kluwer, 1996, 328 p.
 19. Voskoboinikov Yu.E., Mukhina I.N. Local regularizing algorithm for high-contrast image and signal restoration. *Optoelectronics, Instrumentation, and Data Processing*, 2000, no. 3, pp. 41–48.
 20. Sizikov V.S., Kir'yanov K.A., Ekzemplyarov R.A. Two fast algorithms for restoration of smeared images. *Journal of Instrument Engineering*, 2013, vol. 56, no. 10, pp. 24–30. (In Russian)
 21. Sizikov V.S. Estimating the point-spread function from the spectrum of a distorted tomographic image. *Journal of Optical Technologies*, 2015, vol. 82, no. 10, pp. 655–658. doi: 10.1364/JOT.82.000655
 22. Sizikov V.S. Spectral method for the point-spread function estimation in the problem of eliminating image distortions. *Journal of Optical Technologies*, 2017, vol. 84, no. 2, pp. 36–44.
 23. Donatelli M., Estatico C., Martinelli A., Serra-Capizzano S. Improved image deblurring with anti-reflective boundary conditions and re-blurring. *Inverse Problems*, 2006, vol. 22, no. 6, pp. 2035–2053. doi: 10.1088/0266-5611/22/6/008
 24. Sidorov D.N. *Methods for Analysis of Integral Dynamic Models: Theory and Applications*. Irkutsk, ISU Publ., 2013, 293 p. (in Russian)
 25. Sidorov D. *Integral Dynamical Models: Singularities, Signals and Control*. Singapore-London, World Scientific Publ., 2014, 243 p.

Авторы

Сизиков Валерий Сергеевич – доктор технических наук, профессор, профессор, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, sizikov2000@mail.ru

Ильин Андрей Константинович – студент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, ilyin-andrey@rambler.ru

Authors

Valery S. Sizikov – D.Sc., Full Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, sizikov2000@mail.ru

Andrey K. Ilyin – student, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, ilyin-andrey@rambler.ru