

УДК 532.529

ВОЗМОЖНОСТИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ С НАСТРАИВАЕМЫМИ ДИССИПАТИВНЫМИ СВОЙСТВАМИ НА ПРИМЕРЕ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ГАЗА И ГАЗОВЗВЕСЕЙ

Д.В. Садин^а, С.А. Одоев^а

^а Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация

Адрес для переписки: sadin@yandex.ru

Информация о статье

Поступила в редакцию 05.06.17, принята к печати 07.07.17

doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-5-896-902

Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Садин Д.В., Одоев С.А. Возможности разностной схемы с настраиваемыми диссипативными свойствами на примере двумерных задач динамики газа и газовзвесей // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2017. Т. 17. № 5. С. 896–902. doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-5-896-902

Аннотация

Предмет исследования. Представлены результаты тестирования разностной схемы с настраиваемыми диссипативными свойствами на примере двумерных задач газовой динамики и механики газовзвесей. **Метод.** Разностная схема второго порядка точности построена с расщеплением по физическим процессам на два этапа. На первом из них используются центральные разности, скалярный вариант нелинейной искусственной вязкости с ограничителями и полуявная аппроксимация межфазных взаимодействий, на втором этапе – реконструкция потоков TVD-типа. **Основные результаты.** Тестирование выполнено на задачах с сильными разрывами при взаимодействии ударных волн с взвесью частиц. Схема с настраиваемыми диссипативными свойствами продемонстрировала качество численных решений на уровне схемы WENO5 с возможностью разрешения тонких деталей течения при многократных взаимодействиях ударных волн, контактных разрывов и волн разрежения между собой. Возможные осцилляции численного решения в предложенной схеме подавляются настройкой ее диссипативных свойств. **Практическая значимость.** Схема с настраиваемыми диссипативными свойствами является основой для разработки прикладного программного пакета как инструмента обоснования достижимого уровня технических решений с использованием потоков газовзвесей.

Ключевые слова

газовая динамика, газовзвесь, численное моделирование, тестовые задачи, диссипативные свойства, устойчивость

FEATURES OF DIFFERENCE SCHEME WITH CUSTOMIZABLE DISSIPATIVE PROPERTIES IN CASE OF TWO-DIMENSIONAL GAS AND GAS-PARTICLE DYNAMICS PROBLEMS

D.V. Sadin^а, S.A. Odoyev^а

^а Mozhaisky Military Space Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation

Corresponding author: sadin@yandex.ru

Article info

Received 05.06.17, accepted 07.07.17

doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-5-896-902

Article in Russian

For citation: Sadin D.V., Odoyev S.A. Features of difference scheme with customizable dissipative properties in case of two-dimensional gas and gas-particle dynamics problems. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2017, vol. 17, no. 5, pp. 896–902 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-5-896-902

Abstract

Subject of Research. The paper presents testing results of difference scheme with customizable dissipative properties in the case of the two-dimensional problems for both gas dynamics and gas-suspensions mechanics. **Method.** The second order difference scheme is created with splitting of physical processes into two phases. The first phase uses the central difference, the scalar version of the nonlinear artificial viscosity limiters and semi implicit approximation of the interphase interactions. Reconstructions of TVD type are used at the second phase. **Main Results.** Testing was performed for problems with strong discontinuities when the shock waves interact with suspended particles. For illustrative test problems, the scheme with customizable dissipative properties has demonstrated a good quality of numerical solutions at the level of the WENO5 scheme with the ability to resolve fine details of the flow in case of multiple interactions of shock waves, contact

discontinuities and rarefaction waves. Possible oscillations of the numerical solution in the proposed scheme are suppressed by setting its dissipative properties. **Practical Relevance.** The scheme with customizable dissipative properties is the basis for the development of applied software package as a justification tool for the attainable level of technical solutions with the use of the gas suspensions flows.

Keywords

gas dynamics, gas-particle mixture, numerical simulation, test problems, dissipative properties, stability

Введение

Бурное развитие вычислительных технологий в динамике сплошных сред (газовой динамике, механике многофазных сред) связано с необходимостью получения количественных и достоверных результатов, а также уменьшения затрат на ранних этапах проектирования и экспериментальной отработки перспективных технологий и технических устройств. За последние десятилетия достигнут значительный прогресс в разработке численных моделей современных проблем течений со сложной многомасштабной структурой (ударные, контактные, комбинированные разрывы, неустойчивость и вихревые образования и др.) [1–3]. Несмотря на рост вычислительных возможностей современных компьютеров, сохраняется актуальность совершенствования дискретных моделей и алгоритмов для достижения требуемой точности и качества численных решений при минимальных (разумных) затратах процессорного времени и машинной памяти.

Данная проблема приобретает особую значимость при моделировании многофазных потоков, для которых кратно возрастает число законов сохранения и физических эффектов межфазных взаимодействий (трения, теплообмена, фазовых переходов) [4–6]. Кроме того, физически обоснованные подходы приводят к математическим моделям составного (негиперболического) типа и к неконсервативным подсистемам для отдельных фаз [4, 7]. А именно, в разных частях одной расчетной области течения в зависимости от разности скоростей фаз характеристики системы законов сохранения могут быть вещественными (гиперболический тип), а в другой части – содержать мнимые компоненты (составной тип) [7]. Указанные обстоятельства, а также часто существенное различие времен релаксации фаз (жесткость [1, 8–11, 12]), предъявляют особые требования к дискретным моделям гетерогенных сред. В связи с этим естественный подход адаптации известных в вычислительной газовой динамике методов характеристик [13], Годунова и его модификаций [14–17] в общем случае для уравнений составного типа усложняется наличием мнимых компонентов характеристик.

Для разностных схем теоретические доказательства устойчивости и сходимости в случае нелинейных систем уравнений в частных производных вызывают серьезные трудности. Общепринятым способом проверки этих свойств численных решений, а также монотонности и разрешающей способности нелинейных разностных схем является их анализ на модельных однородных [1] или неоднородных (с источником [1, 8–10]) линейных (квазилинейных) уравнениях переноса и верификация на представительной системе известных тестовых задач.

Настоящая работа посвящена проверке возможностей схемы с настраиваемыми диссипативными свойствами (CDP) [18] на примере двумерных задач газовой динамики (гиперболический тип уравнений) и газозвесей (составной тип).

Метод расчета

Для описания динамики газозвеси с различием скоростей, температур и общим давлением фаз используем эйлеров подход, при котором система уравнений в рамках континуального описания и известных допущениях [4] имеет следующий вид [18]:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla_d \mathbf{G} + \mathbf{B}(\nabla_d \mathbf{F}) = \mathbf{H}(\mathbf{q}), \tag{1}$$

$$\mathbf{q} = [\rho_1, \rho_2, \rho_1 \mathbf{v}_1, \rho_2 \mathbf{v}_2, \rho_2 e_2, \rho_1 E_1 + \rho_2 K_2]^T,$$

$$\mathbf{G} = [\rho_1 \mathbf{v}_1, \rho_2 \mathbf{v}_2, \rho_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1, \rho_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2, \rho_2 e_2 \mathbf{v}_2, \rho_1 E_1 \mathbf{v}_1 + \rho_2 K_2 \mathbf{v}_2]^T,$$

$$\mathbf{F} = [0, 0, p, 0, p(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2)]^T, \quad \mathbf{H} = [0, 0, -\mathbf{F}_\mu, \mathbf{F}_\mu, Q_T, -Q_T]^T,$$

$$\nabla_d = \text{diag}(\nabla, \nabla, \nabla, \nabla, \nabla, \nabla \cdot), \quad \mathbf{B} = \text{diag}[1, 1, \alpha_1, \alpha_2, 1, 1],$$

$$\rho_i = \rho_i^\circ \alpha_i \quad (i = 1, 2), \quad E_1 = e_1 + v_1^2 / 2, \quad K_2 = v_2^2 / 2.$$

Здесь и далее индексы 1 и 2 внизу относятся соответственно к параметрам несущей и дисперсной фаз, индекс \circ сверху относится к истинным значениям плотности; ∇ – оператор Гамильтона. Через $\alpha_i, \rho_i, \mathbf{v}_i, E_i, e_i, p$ обозначены объемная доля, приведенная плотность, вектор скорости, полная и внутренняя энергии единицы массы i -ой фазы, давление газа; \mathbf{F}_μ, Q_T – соответственно вязкая составляющая силы межфазного взаимодействия, мощность теплообмена между газом и частицами в единице объема; t – время.

Для замыкания системы (1) используем уравнения состояния идеального калорически совершенного газа и несжимаемых твердых частиц: $p = (\gamma_1 - 1)\rho_1^\circ e_1$, $e_1 = c_v T_1$, $e_2 = c_2 T_2$, $\{\gamma_1, c_v, c_2, \rho_2^\circ\} \equiv \text{const}$, где T_1, T_2 – температура несущей фазы и частиц; γ_1, c_v – показатель адиабаты и удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; c_2 – удельная теплоемкость частиц. Интенсивности межфазного трения и теплообмена F_μ, Q_T задаются на основе известных и апробированных для рассматриваемого класса задач эмпирических критериальных соотношений [4].

Разностная схема CDP для уравнений движения газозвеси строится путем расщепления по физическим процессам на два этапа [18]. На первом этапе отбрасываются конвективные члены уравнений, а пространственные производные аппроксимируются центральными разностями. Источники (межфазное трение и теплообмен) рассчитываются по полуявной безытерационной схеме с учетом жесткости решаемых задач [9]. Монотонизация предварительного численного решения, полученного на этом этапе, осуществляется введением нелинейной искусственной вязкости. Использование ограничителей искусственной вязкости в вычислительной газодинамике было предложено Христиансенем [19] и развито в ряде работ [20, 21]. В схеме CDP [18] рассматривается нелинейная (адаптивная) скалярная искусственная вязкость с учетом конфигураций ударных волн, контактных разрывов и релаксационных свойств газозвеси в следующем виде:

$$Q_{n+1/2}^k = -[B(1 - \psi_1(r_{n+1/2})) + B_0 \psi_1(r_{n+1/2})][\gamma_1 p_{n+1/2}^k (\rho_{1,n+1/2}^k + D p_{2,n+1/2}^k)]^{1/2} (v_{1,n+1}^k - v_{1,n}^k),$$

$$r_{n+1/2}^k = \begin{cases} (v_{1,n}^k - v_{1,n-1}^k) / (v_{1,n+1}^k - v_{1,n}^k) & \text{если } (v_{1,n+1}^k - v_{1,n}^k)(p_{n+1}^k - p_n^k) \geq 0, \\ (v_{1,n+2}^k - v_{1,n+1}^k) / (v_{1,n+1}^k - v_{1,n}^k) & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$B_0 = B_C \text{ если } |\rho_{1,n+1}^k - \rho_{1,n}^k| / |p_{1,n+1}^k - p_{1,n}^k| > (1 + \varepsilon) / (\gamma p_{1,n+1/2}^k / \rho_{1,n+1/2}^k); B_L \text{ иначе,}$$

$$D = \begin{cases} 1 - (d/d_*)^2 & \text{если } d \leq d_*; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

где v_1, ρ_1, ρ_2, p – скорость и плотность газа, плотность дисперсной фазы и давление газа; n – нумерация центров ячеек вдоль выбранной оси координат (полуцелые индексы отнесены к границам ячеек); $B, B_C, B_L \geq 0$ – коэффициенты искусственной вязкости (настроечные параметры схемы); d, d_* – диаметр дисперсных частиц и его характерное значение для равновесного течения смеси, $\psi_1(r_{n+1/2})$ – ограничитель искусственной вязкости, всюду ниже используется ограничитель VAN LEER: $\psi_1(r) = (r + |r|) / (1 + r)$.

На втором этапе вычисляются окончательные значения искомым функций с использованием реконструкции потоков TVD-типа [22, 23] с ограничителями ψ_2 .

Результаты решения тестовых задач

Для тестирования разностных схем, предназначенных для моделирования нестационарных течений с ударными волнами, контактными разрывами и волнами разрежения, используют коллекцию задач Римана (о распаде разрывов в двумерном случае) [24, 25]. Выберем из указанного семейства тестовых задач три показательные, в которых реализуются все указанные типы разрывов. Эти задачи определены в квадрате $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$, который разделен на четыре квадранта линиями $x = 1/2, y = 1/2$. Начальные условия для давления p , плотности ρ_1 , проекций скорости газа u_1 и v_1 соответственно на оси x и y с сохранением нумерации тестов из оригинальной работы [25] представлены в табл. 1: для каждого теста в первой строке – для верхних квадрантов, а во второй строке – для нижних.

Тест	Слева				Справа				t_f
	p	ρ_1	u_1	v_1	p	ρ_1	u_1	v_1	
4	0,35	0,5065	0,8939	0	1,1	1,1	0	0	0,25
	1,1	1,1	0,8939	0,8939	0,35	0,5065	0	0,8939	
6	1	2	0,75	0,5	1	1	0,75	-0,5	0,30
	1	1	-0,75	0,5	1	3	-0,75	-0,5	
17	1	2	0	-0,3	1	1	0	-0,4	0,30
	0,4	1,0625	0	0,2145	0,4	0,5197	0	-1,1259	

Таблица 1. Начальные условия тестовых задач

Для удобства дальнейших ссылок на используемые параметры схемы CDP введем обозначение $L_{\psi_2}(B, B_C, B_L)$, где нижним индексом будем помечать применяемый ограничитель потоков, а в скобках

указывать параметры искусственной вязкости. Задачи решались на сетках 400×400 ячеек до момента времени t_f с числом Куранта $CFL = 0,4$. Для чистого газа в уравнениях газозвеси объемная концентрация дисперсной фазы полагалась пренебрежимо малой: $\alpha_2 = 10^{-10}$. Во всех задачах газ полагался идеальным с показателем $\gamma_1 = 1,4$, и заданы краевые условия отражения.

В тестовых задачах происходит распад четырех разрывов с образованием следующих конфигураций [24, 25]: тест 4 – S, S, S, S ; тест 6 – J, J, J, J ; тест 17 – S, J, R, J ; где S – ударная волна; R – волна разрежения; J – контактный разрыв. Результаты для тестов в порядке (табл. 1) представлены на рис. 1 (слева CDP, справа WENO5 из [24, 25]). Задачи решались по схеме CDP со следующими параметрами: тест 4 – $L_{VANLEER}(1; 0, 2; 0, 2)$; тест 6 – $L_{SUPERBEE}(1; 0, 2; 0, 2)$; тест 17 – $L_{VANLEER}(1; 0; 0)$.

Численные решения CDP и WENO5 (рис. 1) близки друг другу и согласуются с аналогичными результатами для других высокоточных схем [24, 25]. Следует отметить численные погрешности плотности в окрестности начального разрыва, например, видимые на рис. 1, а, в. На этот численный дефект обращается внимание для всех анализируемых схем в [24, 25]. В численных результатах обнаруживаются малые осцилляции плотности в ограниченных областях, примыкающих к контактным разрывам (CDP, см. рис. 1, в), и давления (WENO5, см. рис. 1, б). Наличие малых колебаний плотности для некоторых схем отмечено также в [24, 25].

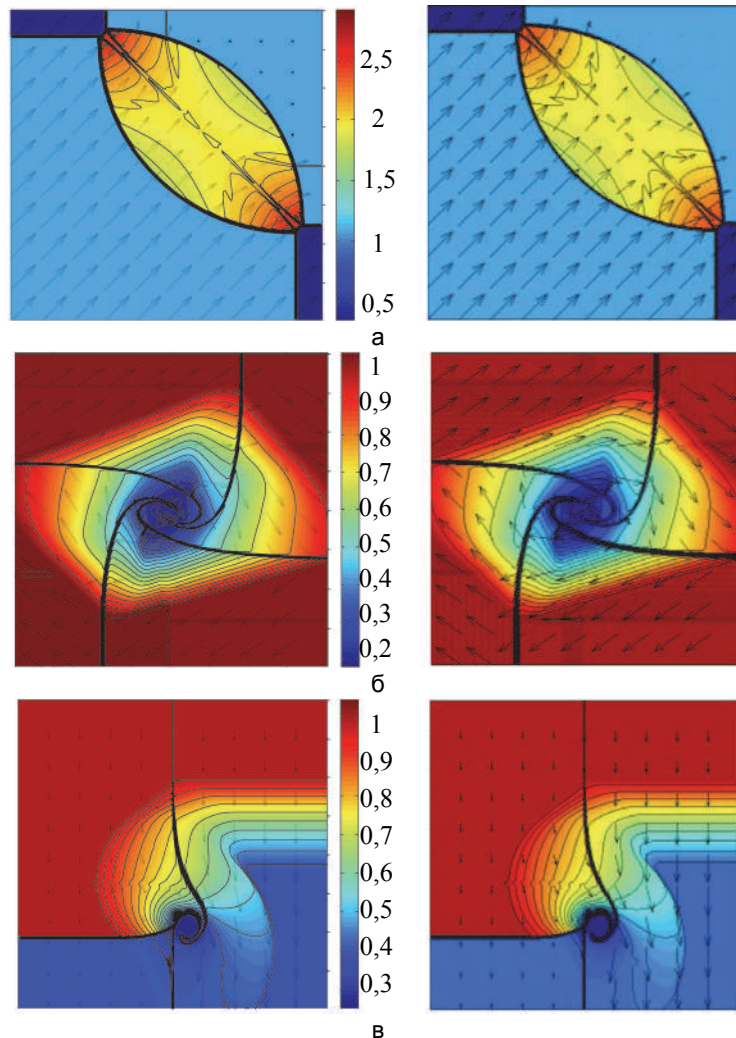


Рис. 1. Результаты решения тестовых задач газовой динамики 4, 6, 17 (см. табл. 1) – соответственно а, б, в. Расчет по схеме CDP – слева, WENO5 из [24, 25] – справа. Распределение плотности нанесено контурными линиями: а – 29 линий (0,52 до 1,92); б – 29 линий (0,25 до 3,05); в – 30 линий (0,53 до 1,98). Давление показано цветом с соответствующими цветовыми шкалами, скорости – стрелками

Приведенный ниже тест для газозвеси является модификацией задачи [18] и служит проверкой возможности схемы CDP по воспроизведению сложной ударно-волновой структуры течения газа со взвешенными частицами с выявлением характерных особенностей: обратное течение, многократные

взаимодействия ударных волн, комбинированных разрывов (разрывов пористости) и волн разрежения между собой.

Рассмотрим двумерную плоскую нестационарную задачу, представляющую собой распространение ударной волны в плоском канале, ее выход в расширенную часть, взаимодействие с двумя слоями газозвеси и окружающими стенками.

Несущая фаза является идеальным газом с показателем адиабаты $\gamma_1 = 1,4$, дисперсная фаза представляет собой совокупность монодисперсных твердых несжимаемых частиц диаметром $d = 0,1$ мкм с истинной плотностью $\rho_2^0 = 2500$ кг/м³, занимающую объемную долю α_2 в смеси. Область определения задач разделена на четыре части, начальные условия в которых сведены в табл. 2.

Обозначение области	Область	Параметры $(\rho_1^0, \alpha_2, u_1, u_2, p)$
I	$(x, y) \in [0; 1,8] \times [0; 1]$	$(1; 10^{-10}; 0,8212; 0,8212; 1)$
II	$(x, y) \in [3,5; 4] \times [0; 4]$	$(0,4892; 10^{-3}; 0; 0; 0,3511)$
III	$(x, y) \in [4,5; 5] \times [0; 4]$	$(0,4892; 10^{-3}; 0; 0; 0,3511)$
IV	$(x, y) \in [0; 4] \times [0; 4] \setminus (I \cup II \cup III)$	$(0,4892; 10^{-10}; 0; 0; 0,3511)$

Таблица 2. Начальные условия тестовой задачи.

u_1, u_2 – проекции скоростей фаз на ось x (проекции на ось y равны 0)

В области I заданы параметры за ударной волной в «чистом» газе с числом Маха $M = 1,60753$. Внутри расчетной области (II и III) размещены два слоя газозвеси, в остальной части IV – параметры невозмущенного газа. Начальные условия заданы в безразмерном виде: значения давления и плотности отнесены к соответствующим величинам в области I, скорости – к скорости звука перед ударной волной (область IV), линейные величины – к поперечному размеру канала 0,1 м. Граничные условия в $x = 0$ и $y \in [0; 1]$ – начальные значения, остальные – условия отражения. Внутри области определения в $y = 1$ и $x \in [0; 2]$ размещена бесконечно тонкая стенка с двухсторонними условиями отражения. Расчет ведется по схеме $L_{SUPERBEE}(1; 0,4; 0,2)$ до момента $t_4 = 1$ мс. Расчетная сетка имеет разрешение 1/200.

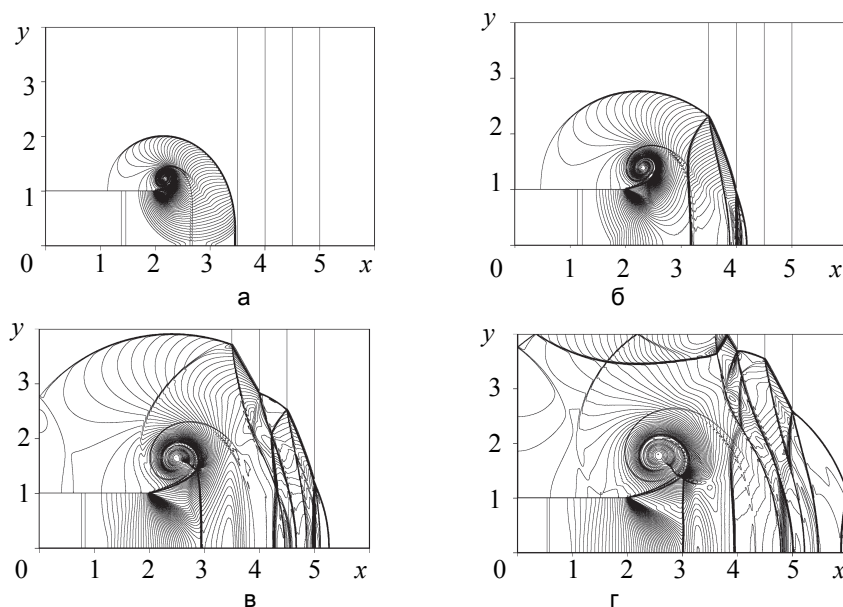


Рис. 2. Распределение приведенной плотности газа в различные моменты времени: $t_1 = 0,3$ мс (а); $t_2 = 0,5$ мс (б); $t_3 = 0,8$ мс (в); $t_4 = 1$ мс (г) (128 контурных линий от 0,1001 до 1,4)

Плоская ударная волна вначале движется по каналу и в некоторый момент времени выходит в расширяющуюся часть с возникновением дифракции и двумерной волны разрежения. Примерно при $t_1 = 0,3$ мс фронт ударной волны встречает препятствие в виде первого слоя газозвеси (рис. 2, а). При

этом происходит распад разрыва в виде отраженной и прошедшей ударных волн. Достигая правой границы слоя газозвеси, в результате следующего распада разрыва образуются прошедшая ударная волна и отраженная волна разрежения при $t_2 = 0,5$ мс (рис. 2, б). В последующие моменты времени при $t_3 = 0,8$ мс (рис. 2, в) и при $t_4 = 1$ мс (рис. 2, г) ударно-волновая конфигурация существенно усложняется, при этом количество взаимодействий и особенностей течения исчисляется десятками.

Схема CDP дает разрешение тонких деталей течения как в области чистого газа, так и в зонах газозвеси. Следует отметить узкую область размазывания ударной волны при ее отражении от комбинированного разрыва.

Заключение

Разностная схема с настраиваемыми диссипативными свойствами продемонстрировала работоспособность на двумерных тестовых задачах со сложной ударно-волновой структурой в поле течения, содержащего чистый газ и газозвесь с границами раздела сред с различными физическими и математическими свойствами. Схема проста в алгоритмической реализации, допускает распараллеливание вычислительных процессов и может служить основой разработки программного пакета для исследований технологий с потоками газозвесей.

Литература

1. Le Veque R.J. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002. 580 p.
2. Toro E.F. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. 3rd ed. Berlin, Springer-Verlag, 2009, 724 p.
3. Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н., Козелков А.С., Тетерина И.В. Разностные схемы в задачах газовой динамики на неструктурированных сетках. М.: Физматлит, 2015. 416 с.
4. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. 464 с.
5. Gidaspow D. *Multiphase Flow and Fluidization*. Academic Press, 1994. 467 p.
6. Crowe C.T., Schwarzkopf J.D., Sommerfeld M., Tsuji Y. *Multiphase Flows with Droplets and Particles*. 2nd ed. CRC Press, 2012. 487 p.
7. Hudson J., Harris D. A high resolution scheme for Eulerian gas–solid two-phase isentropic flow // *Journal of Computational Physics*, 2006. V. 216. P. 494–525. doi: 10.1016/j.jcp.2005.12.010
8. Садин Д.В. Модифицированный метод крупных частиц для расчета нестационарных течений газа в пористой среде // *ЖВМ и МФ*. 1996. Т. 36. № 10. С. 158–164.
9. Садин Д.В. Метод расчета волновых гетерогенных течений с интенсивным межфазным взаимодействием // *ЖВМ и МФ*. 1998. Т. 38. № 6. С. 1033–1039.
10. Садин Д.В. О сходимости одного класса разностных схем для уравнений нестационарного движения газа в дисперсной среде // *ЖВМ и МФ*. 1998. Т. 38. № 9. С. 1572–1577.
11. Садин Д.В. Проблема жесткости при моделировании волновых течений гетерогенных сред с трехтемпературной схемой межфазного тепло- и массообмена // *ПМТФ*. 2002. Т. 43. № 2. С. 136–141.
12. Saurel R., Le Metayer O., Massoni J., Gavrilyuk S. Shock jump relations for multiphase mixtures with stiff mechanical relaxation // *Shock Waves*. 2007. V. 16. N 3. P. 209–232.
13. Сузов В.С. Гиперболические модели в механике гетерогенных сред // *ЖВМ и МФ*. 2014. Т. 54. № 1. С. 139–148. doi: 10.7868/S0044466914010153
14. Toro E.F. Riemann-problem based techniques for computing reactive two-phase flows // *Lecture Notes in Physics*. 1989. V. 351. P. 472–481. doi: 10.1007/3-540-51968-8_108
15. Saurel R., Abgrall R. A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows // *Journal of Computational Physics*. 1999. V. 150. N 2. P. 425–467. doi: 10.1006/jcph.1999.6187
16. Tokareva S.A., Toro E.F. HLLC-type Riemann solver for the Baer-Nunziato equations of compressible two-phase flow // *Journal of Computational Physics*. 2010. V. 229. N 10. P. 3573–3604. doi: 10.1016/j.jcp.2010.01.016
17. Bulat P.V., Volkov K.N., Ilyina T.Y. Interaction of a shock wave

References

1. Le Veque R.J. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002, 580 p.
2. Toro E.F. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. 3rd ed. Berlin, Springer-Verlag, 2009, 724 p.
3. Volkov K.N., Deryugin Yu.N., Emel'yanov V.N., Kozelkov A.S., Teterina I.V. *Difference Schemes in Gas Dynamic Problems on Unstructured Grids*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2015, 416 p.
4. Nigmatulin R.I. *Dynamics of Multiphase Media*. Moscow, Nauka Publ., 1987, 464 p. (In Russian)
5. Gidaspow D. *Multiphase Flow and Fluidization*. Academic Press, 1994, 467 p.
6. Crowe C.T., Schwarzkopf J.D., Sommerfeld M., Tsuji Y. *Multiphase Flows with Droplets and Particles*. 2nd ed. CRC Press, 2012, 487 p.
7. Hudson J., Harris D. A high resolution scheme for Eulerian gas–solid two-phase isentropic flow. *Journal of Computational Physics*, 2006, vol. 216, pp. 494–525. doi: 10.1016/j.jcp.2005.12.010
8. Sadin D.V. A modified large-particle method for calculating unsteady gas flows in a porous medium. *Comp. Maths Math. Phys.*, 1996, vol. 36, no. 10, pp. 1453–1458.
9. Sadin D.V. A method for computing heterogeneous wave flows with intense phase interaction. *Comp. Maths Math. Phys.*, 1998, vol. 38, no. 6, pp. 987–993.
10. Sadin D.V. On the convergence of a certain class of difference schemes for the equations of unsteady gas motion in a disperse medium. *Comp. Maths Math. Phys.*, 1998, vol. 38, no. 9, pp. 1508–1513.
11. Sadin D.V. Stiffness problem in modeling wave flows of heterogeneous media with a three temperature scheme of interphase heat and mass transfer. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2002, vol. 43, no. 2, pp. 286–290.
12. Saurel R., Le Metayer O., Massoni J., Gavrilyuk S. Shock jump relations for multiphase mixtures with stiff mechanical relaxation. *Shock Waves*, 2007, vol. 16, no. 3, pp. 209–232.
13. Surov V.S. Hyperbolic models in the mechanics of heterogeneous media. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2014, vol. 54, no. 1, pp. 148–157. doi: 10.1134/S096554251401014X
14. Toro E.F. Riemann-problem based techniques for computing reactive two-phase flows. *Lecture Notes in Physics*, 1989, vol. 351, pp. 472–481. doi: 10.1007/3-540-51968-8_108
15. Saurel R., Abgrall R. A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows. *Journal of Computational Physics*, 1999, vol. 150, no. 2, pp. 425–467. doi: 10.1006/jcph.1999.6187
16. Tokareva S.A., Toro E.F. HLLC-type Riemann solver for the Baer-Nunziato equations of compressible two-phase flow. *Journal of Computational Physics*, 2010, vol. 229, no. 10, pp.

- with a cloud of particles // *IEJME - Mathematics Education*. 2016. V. 11. N 8. P. 2949–2962.
18. Садин Д.В. TVD-схема для жестких задач волновой динамики гетерогенных сред негиперболического неконсервативного типа // *ЖВМ и МФ*. 2016. Т. 56. № 12. С. 2098–2109. doi: 10.7868/S0044466916120152
 19. Christiansen R.B. Godunov Methods on a Staggered Mesh - An Improved Artificial Viscosity. Technical Report UCRL-JC-105269. Lawrence Livermore National Laboratory, 1991.
 20. Benson D.J., Schoenfeld S. A total variation diminishing shock viscosity // *Computational Mechanics*. 1993. V. 11. N 2-3. P. 107–121. doi: 10.1007/BF00350046
 21. Caramana J., Shashkov M.J., Whalen P.P. Formulations of artificial viscosity for multi-dimensional shock wave computations // *Journal of Computational Physics*. 1998. V. 144. N 1. P. 70–97. doi: 10.1006/jcph.1998.5989
 22. Hirsch C. Numerical Computation of Internal and External Flows. V. 2. Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows. NY: Wiley, 1990.
 23. Fringer O.B., Armfield S.W., Street R.L. Reducing numerical diffusion in interfacial gravity wave simulations // *International Journal of Numerical Methods in Fluids*. 2005. V. 49. N 3. P. 301–329. doi: 10.1002/flid.993
 24. Liska R., Wendroff B. Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations // *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2003. V. 25. № 3. P. 995–1017.
 25. Liska R., Wendroff B. Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www-troja.fjfi.cvut.cz/~liska/CompareEuler/compare8.pdf>, свободный. Яз. англ. (дата обращения 04.07.2017)
 17. Bulat P.V., Volkov K.N., Ilyina T.Y. Interaction of a shock wave with a cloud of particles. *IEJME - Mathematics Education*, 2016, vol. 11, no. 8, pp. 2949–2962.
 18. Sadin D.V. TVD scheme for stiff problems of wave dynamics of heterogeneous media of nonhyperbolic nonconservative type. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, vol. 56, no. 12, pp. 2068–2078. doi: 10.1134/S0965542516120137
 19. Christiansen R.B. Godunov Methods on a Staggered Mesh - An Improved Artificial Viscosity. *Technical Report UCRL-JC-105269*. Lawrence Livermore National Laboratory, 1991.
 20. Benson D.J., Schoenfeld S. A total variation diminishing shock viscosity. *Computational Mechanics*, 1993, vol. 11, no. 2-3, pp. 107–121. doi: 10.1007/BF00350046
 21. Caramana J., Shashkov M.J., Whalen P.P. Formulations of artificial viscosity for multi-dimensional shock wave computations. *Journal of Computational Physics*, 1998, vol. 144, no. 1, pp. 70–97. doi: 10.1006/jcph.1998.5989
 22. Hirsch C. *Numerical Computation of Internal and External Flows. V. 2. Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows*. NY, Wiley, 1990.
 23. Fringer O.B., Armfield S.W., Street R.L. Reducing numerical diffusion in interfacial gravity wave simulations. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 2005, vol. 49, no. 3, pp. 301–329. doi: 10.1002/flid.993
 24. Liska R., Wendroff B. Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2003, vol. 25, no. 3, pp. 995–1017.
 25. Liska R., Wendroff B. Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 25, no. 3, pp. 995–1017. URL: <http://www-troja.fjfi.cvut.cz/~liska/CompareEuler/compare8.pdf>

Авторы

Садин Дмитрий Викторович – доктор технических наук, профессор, профессор, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация, sadin@yandex.ru

Одоев Сергей Александрович – начальник учебной лаборатории, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация, odoev@list.ru

Authors

Dmitry V. Sadin – D.Sc., Full Professor, Mozhaisky Military Space Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation, sadin@yandex.ru

Sergey A. Odoev – Head of educational laboratory, Mozhaisky Military Space Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation, odoev@list.ru