УДК 681.51

РОБАСТНЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ОДНОРОДНОСТИ ПО ОТНОШЕНИЮ К ЗАПАЗДЫВАНИЮ

Д.В. Ефимов[a,b], А.С. Кремлев[a]

[a] Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация
[b] Государственный институт исследований в информатике и автоматике, Лилль, 59650, Франция
Адрес для переписки: kremlev_artem@mail.ru

Информация о статье
Поступила в редакцию 09.08.17, принята к печати 03.10.17
doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-6-1025-1032
Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Ефимов Д.В., Кремлев А.С. Робастные свойства систем с отрицательным показателем однородности по отношению к запаздыванию // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2017. Т. 17. № 6. С. 1025–1032. doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-6-1025-1032

Аннотация
Исследованы проблемы робастности класса обобщенно однородных систем с отрицательным показателем однородности по отношению к запаздыванию. Показано, что в случае глобальной асимптотической устойчивости нелинейной обобщенно однородной системы с отрицательной степенью однородности при наличии запаздывания в системе все траектории асимптотически сходятся в некоторое компактное множество, содержащее начало координат. При отсутствии запаздывания такие системы достигают своего положения равновесия за конечное время. Анализ робастности также охватывает случаи наличия множества запаздываний и присутствия переменного запаздывания. Представленный анализ основан на применении методов Ляпунова для систем с запаздыванием (метод функций Ляпунова–Разумихина) и теории обобщенно однородных систем. Проведено компьютерное моделирование для проверки представленного анализа робастности систем с отрицательной степенью однородности по отношению к запаздыванию. В качестве примера взята стабилизируемая система, представляющая собой два последовательно соединенных интегратора. Данная система является обобщенно однородной с отрицательной степенью при использовании нелинейного закона управления по состоянию, обеспечивающего достижение системой своего положения равновесия за желаемое конечное время. При проведении компьютерного моделирования вектор состояния был доступен для измерения с некоторыми запаздываниями. Проведенное компьютерное моделирование подтвердило эффективность представленных теоретических результатов.

Ключевые слова
обобщенно однородные системы, запаздывание, робастность, нелинейные системы

Благодарности
Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-19-01422) в Университете ИТМО.

ROBUST PROPERTIES OF SYSTEMS WITH NEGATIVE DEGREE OF HOMOGENEITY WITH RESPECT TO DELAY

D.V. Efimov[a,b], A.S. Kremlev[a]

[a] ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation
[b] Institut national de recherche en informatique et en automatique, Lille, 59650, France
Corresponding author: kremlev_artem@mail.ru

Article info
Received 09.08.17, accepted 03.10.17
doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-6-1025-1032
Article in Russian
For citation: Efimov D.V., Kremlev A.S. Robust properties of systems with negative degree of homogeneity with respect to delay. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2017, vol. 17, no. 6, pp. 1025–1032 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-6-1025-1032

Abstract
The paper considers robustness problems of a class of weighted homogeneous systems with negative homogeneity degree in relation to the delay. It is shown that in the case of global asymptotic stability of a nonlinear weighted homogeneous system with negative homogeneity degree, in the presence of a delay in the system, all the trajectories converge asymptotically to some compact set containing the origin. In the absence of delay, such systems reach their equilibrium position in a finite time. The robustness analysis also covers cases of variable and multiple delays. The presented analysis is based on the application

of the Lyapunov methods for delayed systems (the Lyapunov-Razumikhin function method) and the theory of weighted homogeneous systems. Computer simulation was performed to verify the analysis of system robustness with a negative degree of homogeneity in relation to the delay. A stabilizing system that represents a double integrator is used as an example. This system is weighted homogeneous with a negative degree when using a nonlinear state feedback control law that ensures that the system achieves its equilibrium position for the desired finite time. During computer simulation, the state vector was available for measurement with some delays. The computer simulation has confirmed the effectiveness of the presented theoretical results.

Keywords
weighted homogeneous systems, time-delay, robustness, nonlinear systems

Acknowledgements
This work is supported by the Russian Science Foundation under grant No.17-19-01422 and carried out in ITMO University.

Введение

Динамические системы с запаздыванием являются объектом множества исследований, поскольку запаздывания появляются во многих областях науки и техники, например, в системной биологии, распределенных и сетевых системах [1–4]. Такой интерес к изучению динамических систем с запаздыванием объясняется тем, что наличие запаздывания может привести к ухудшению работоспособности и даже к потере устойчивости системы. Несмотря на множество методов решения проблемы оценки робастности системы по отношению к величине запаздывания, в большинстве случаев речь идет о линейных системах с запаздыванием, что объясняется сложностью анализа устойчивости для нелинейного случая. Более того, конструктивные условия существуют только для линейных систем [5].

Настоящая работа посвящена анализу робастности нелинейных обобщенно однородных систем с отрицательным показателем однородности по отношению к запаздыванию и является развитием результатов статьи [6], где представлен анализ робастности на случай неотрицательного показателя однородности. В работе показано, что если система обобщенно однородна с отрицательной степенью однородности и глобально асимптотически устойчива, то при наличии любого запаздывания траектории системы сходятся к некоторому компактному множеству, содержащему начало координат. Более того, данное свойство сохраняется на случаи наличия множества запаздываний и присутствия переменного запаздывания.

Предварительные сведения

Рассматриваются системы, модель динамики которых представлена в виде [7]

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial t} = f(\mathbf{x}_t),\ t \geq 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{x} \in \Re^n$ и $\mathbf{x}_t \in C_{[-\tau,0]}$ – вектор состояния, $\mathbf{x}_t(s) = \mathbf{x}(t+s)$, $-\tau \leq s \leq 0$ (здесь и далее $C_{[-\tau,0]}$ обозначает банахово пространство непрерывных функций $\boldsymbol{\varphi}:[-\tau,0] \to \Re^n$ с нормой $\|\boldsymbol{\varphi}\| = \sup_{-\tau\leq\zeta\leq 0}|\boldsymbol{\varphi}|$, где $|\cdot|$ обозначает стандартную евклидову норму); $f: C_{[-\tau,0]} \to \Re^n$ – непрерывная функция, гарантирующая уникальность решений, $f(0)=0$. Предполагается, что решения системы (1) удовлетворяют начальным условиям $\mathbf{x}_0 \in C_{[-\tau,0]}$, для которых система (1) имеет единственное решение $x(t,\mathbf{x}_0)$ и $x_{t,x_0}(s) = x(t+s,\mathbf{x}_0)$ для $-\tau \leq s \leq 0$, которое определено на некотором конечном временном интервале $[-\tau, T)$ (далее по тексту обозначение $\mathbf{x}(t)$ будет использоваться вместо $\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0)$, если $\mathbf{x}_0$ понятно из контекста).

Непрерывная функция $\sigma:\Re_+ \to \Re_+$ принадлежит к классу K, если она является строго возрастающей и $\sigma(0)=0$; функция принадлежит к классу K_∞, если она радиально неограниченна.

Определения устойчивости. Пусть Ω – окрестность начала координат в $C_{[-\tau,0]}$.

Определение 1 [8]. Система (1) является:

– устойчивой в начале координат в Ω, если существует функция $\sigma \in \mathrm{K}$ такая, что для любого $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ решения существуют для всех $t \geq 0$ и $|\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0)| \leq \sigma(\|\mathbf{x}_0\|)$ для всех $t \geq 0$;

– асимптотически устойчивой в начале координат в Ω, если она устойчива в Ω и $\lim_{t\to+\infty}|\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0)| = 0$ для всех $\mathbf{x}_0 \in \Omega$;

Если $\Omega \in C_{[-\tau,0]}$, тогда соответствующие свойства являются глобальными.

Теорема 1 (теорема Ляпунова–Разумихина [9]). Пусть $f \in C_{[-\tau,0]} \to \Re^n$ и существуют функции $u, v, w: \Re_+ \to \Re_+$ такие, что $u(s)$ и $v(s)$ – непрерывные неубывающие функции и положительные для $s > 0$ и $u(0)=v(0)=0$, v – непрерывная строго возрастающая функция. Решение (1) является равномерно устойчивым, если существует дифференцируемая положительно определенная функция $V:\Re^n \to \Re_+$, т.е.

$$u(|\mathbf{x}|) \le V(\mathbf{x}) \le v(|\mathbf{x}|),$$

и такая, что производная V вдоль решения (1) $\mathbf{x}(t)$ удовлетворяет выражению

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}_t) \le -w(|\mathbf{x}(t)|),\ \textit{если}\ V(\mathbf{x}_t(\theta)) \le V(\mathbf{x}(t))\ \ \forall\theta \in [-\tau, 0]. \qquad (2)$$

Если в дополнение $w(s) > 0$ для $s > 0$ и существует непрерывная неубывающая функция $p(s) > s$ для $s > 0$ такая, что условие (2) может быть представлено в виде

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}_t) \le -w(|\mathbf{x}(t)|),\ \textit{если}\ V(\mathbf{x}_t(\theta)) \le p(V(\mathbf{x}(t)))\ \ \forall\theta \in [-\tau, 0],$$

тогда решение (1) равномерно асимптотически устойчиво. Если $\lim_{s\to\infty} u(s) = \infty$, тогда решение глобально равномерно асимптотически устойчиво.

Обобщенная однородность. Для любых $r_i > 0$, $i = \overline{1,n}$ и $\lambda > 0$ введем матрицу диляции $\mathbf{\Lambda}_r(\lambda) = diag\{\lambda^{r_i}\}_{i=1}^n$ и вектор весов $\mathbf{r} = [r_1, \ldots, r_n]^T$. Для $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$ обозначим норму однородности в виде

$$|\mathbf{x}|_r = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\rho/r_i}\right)^{1/\rho},\ \ \rho \ge \max_{1\le i\le n} r_i.$$

Заметим, что для всех $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$ евклидова норма соотносится с однородной как

$$\underline{\sigma}_r\left(|\mathbf{x}|_r\right) \le |\mathbf{x}| \le \overline{\sigma}_r\left(|\mathbf{x}|_r\right)$$

для некоторых $\underline{\sigma}_r, \overline{\sigma}_r \in \mathcal{K}_\infty$. Однородная норма обладает важным свойством: $|\mathbf{\Lambda}_r(\lambda)\mathbf{x}|_r = \lambda|\mathbf{x}|_r$ для всех $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$ [10]. Обозначим сферу $S_r = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n : |\mathbf{x}|_r = 1\}$.

Представим понятие обобщенной однородности для банахового пространства $C_{[-\tau,0]}$. Для любых $r_i > 0$, $i = \overline{1,n}$ и $\boldsymbol{\varphi} \in C_{[-\tau,0]}$ однородная норма может быть обозначена как

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_r = \left(\sum_{i=1}^n \|\varphi_i\|^{\rho/r_i}\right)^{1/\rho},\ \ \rho \ge \max_{1\le i\le n} r_i.$$

Также, согласно [6], существуют такие функции $\underline{\rho}_r, \overline{\rho}_r \in \mathcal{K}_\infty$, что для всех $\boldsymbol{\varphi} \in C_{[-\tau,0]}$

$$\underline{\rho}_r\left(\|\boldsymbol{\varphi}\|_r\right) \le \|\boldsymbol{\varphi}\| \le \overline{\rho}_r\left(\|\boldsymbol{\varphi}\|_r\right). \qquad (3)$$

Норма однородности в банаховом пространстве обладает тем же свойством $\|\mathbf{\Lambda}_r(\lambda)\boldsymbol{\varphi}\|_r = \lambda\|\boldsymbol{\varphi}\|_r$ для всех $\boldsymbol{\varphi} \in C_{[-\tau,0]}$. В $C_{[-\tau,0]}$ обозначим соответствующую сферу $\aleph_r = \{\boldsymbol{\varphi} \in C_{[-\tau,0]} : \|\boldsymbol{\varphi}\|_r = 1\}$. Обозначим шар с радиусом $\rho > 0$ в $C_{[-\tau,0]}$ как $B_\rho^\tau = \{\boldsymbol{\varphi} \in C_{[-\tau,0]} : \|\boldsymbol{\varphi}\|_r \le \rho\}$.

Определение 2 [11]. Функция $g : C_{[-\tau,0]} \to \mathfrak{R}$ (векторное поле $f : C_{[-\tau,0]} \to \mathfrak{R}^n$) обобщенно однородна, если для любого $\boldsymbol{\varphi} \in C_{[-\tau,0]}$ выражение $g(\mathbf{\Lambda}_r(\lambda)\boldsymbol{\varphi}) = \lambda^d g(\boldsymbol{\varphi})$ $\left(f(\mathbf{\Lambda}_r(\lambda)\boldsymbol{\varphi}) = \lambda^d \mathbf{\Lambda}_r(\lambda) f(\boldsymbol{\varphi})\right)$ выполняется для некоторого $d \in \mathfrak{R}$ ($d \ge -\min_{1\le i\le n} r_i$) и всех $\lambda > 0$. Константа d называется степенью однородности. Система (1) обобщенно однородна, если она удовлетворяет данному свойству.

Стоит отметить, что представленное понятие обобщенной однородности для банахового пространства $C_{[-\tau,0]}$ сводится к стандартному понятию в $\mathfrak{R}^m$, если $\tau = 0$.

Лемма 1. Пусть $f : C_{[-\tau,0]} \to \mathfrak{R}^n$ локально ограничена и обобщенно однородна со степенью *d*, тогда существует такое *k*>0, что

$$\|f(\mathbf{x})\|_r \le k \max_{1\le i\le n} \|\mathbf{x}\|_r^{1+d/r_i}\quad \forall \mathbf{x} \in C_{[-\tau,0]}.$$

Доказательство. Возьмем $\mathbf{x} \in C_{[-\tau,0]}$, тогда существует $\xi \in \aleph_r$ такое, что $\mathbf{x} = \mathbf{\Lambda}_r(\lambda)\xi$ для $\lambda = \|\mathbf{x}\|_r$. Согласно определению однородности можно получить:

$$\|f(\mathbf{x})\|_r = \|f(\mathbf{\Lambda}_r(\lambda)\xi)\|_r \le \max_{1\le i\le n} \lambda^{1+d/r_i} \|f(\xi)\|_r \le k \max_{1\le i\le n} \|\mathbf{x}\|_r^{1+d/r_i}$$

для $k = \sup_{\xi\in\aleph_r} \|f(\xi)\|_r$. Отметим, что, так как $d > -\min_{1\le i\le n} r_i$ для непрерывной f, то $1 + d/r_i > 0$.

Данная лемма означает, что если непрерывная $f : C_{[-\tau,0]} \to \mathfrak{R}^n$ обобщенно однородна со степенью d, то это предполагает некоторое подобие гельдеровой непрерывности в начале координат (т.е. для $\lambda < 1$).

Лемма 2. Пусть $f: C_{[-\tau,0]} \to \Re^n$ обобщенно однородна со степенью d и непрерывна в B_ρ^τ для некоторого $\rho > 0$, тогда для любой $\eta > 0$ существует $k > 0$ такое, что

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{z})\|_r \le \max\{k \max_{1\le i\le n} \|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|_r^{1+\frac{d}{r_i}}, \eta\} \quad \forall \mathbf{x},\mathbf{z} \in B_\rho^\tau.$$

Доказательство. Так как f непрерывна в B_ρ^τ, тогда для $\eta > 0$ существует $\delta_\eta > 0$ такое, что $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{z})\|_r < \eta$ для всех $\mathbf{x},\mathbf{z} \in B_\rho^\tau$ с $\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|_r < \delta_\eta$. Пусть $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{z} \in C_{[-\tau,0]}$, тогда существует такое $\boldsymbol{\kappa} \in \aleph_r$, что $\mathbf{e} = \boldsymbol{\Lambda}_r(\lambda)\boldsymbol{\kappa}$, где $\lambda = \|\mathbf{e}\|_r$. Для $\lambda \ge \delta_\eta$ обозначим $\mathbf{z} = \boldsymbol{\Lambda}_r(\lambda)\boldsymbol{\zeta}$ для некоторого $\boldsymbol{\zeta} \in C_{[-\tau,0]}$, тогда

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{z})\|_r = \|f(\mathbf{z}+\mathbf{e}) - f(\mathbf{z})\|_r = \left\|\lambda^d \boldsymbol{\Lambda}_r(\lambda)\left[f(\boldsymbol{\zeta}+\boldsymbol{\kappa}) - f(\boldsymbol{\zeta})\right]\right\|_r \le \max_{1\le i\le n} \lambda^{1+\frac{d}{r_i}} \|f(\boldsymbol{\zeta}+\boldsymbol{\kappa}) - f(\boldsymbol{\zeta})\|_r.$$

Так как $\|\mathbf{z}\|_r \le \rho$, то $\|\boldsymbol{\zeta}\|_r \le \delta_\eta^{-1}\rho$ и $\|f(\boldsymbol{\zeta}+\boldsymbol{\kappa}) - f(\boldsymbol{\zeta})\|_r \le k$ для некоторого $k > 0$, зависящего от ρ и η, для всех $\mathbf{x},\mathbf{z} \in B_\rho^\tau$, где $\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|_r \ge \delta_\eta$. Доказательство леммы следует из совмещения обоих рассмотренных случаев.

Следствие 1. Пусть $f: C_{[-\tau,0]} \to \Re^n$ однородна со степенью d<0 и непрерывна в B_ρ^τ для некоторого $\rho > 0$, тогда для любой $\eta > 0$ существует $k' > 0$ такое, что

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{z})\|_r \le \max\{k' \|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|_r, \eta\} \quad \forall \mathbf{x},\mathbf{z} \in B_\rho^\tau.$$

Доказательство. Данный результат следует из леммы 2 с учетом того, что для d<0 выполняется неравенство $0 < 1 + d / r_i$ для всех $1 \le i \le n$. Тогда для любых $\rho > 0$ и $\eta > 0$ существует такое $\tilde{k} > 0$, что

$$\max_{1\le i\le n} \|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|_r^{1+d/r_i} \le \max\{\tilde{k}\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|_r, \frac{\eta}{k}\} \quad \forall \mathbf{x},\mathbf{z} \in B_\rho^\tau.$$

Утверждение 1 [6]. Пусть $x(t, x_0)$ – решение обобщенно однородной системы (1) со степенью однородности $d \ne 0$ и начальными условиями $\mathbf{x}_0 \in C_{[-\tau,0]}$, $\tau \in (0, +\infty)$. Для любого $\lambda > 0$ функциональное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{y}(t)}{\partial t} = f(\mathbf{y}_t), \ t \ge 0$$

с $\mathbf{y}_t \in C_{[-\lambda^{-d}\tau,0]}$ имеет решение $\mathbf{y}(t, y_0) = \boldsymbol{\Lambda}_r(\lambda)\mathbf{x}(\lambda^d t, \mathbf{x}_0)$ для всех $t \ge 0$ с начальными условиями $\mathbf{y}_0 \in C_{[-\lambda^{-d}\tau,0]}$, $\mathbf{y}_0(s) = \boldsymbol{\Lambda}_r(\lambda)\mathbf{x}_0(\lambda^d s)$ при $s \in [-\lambda^{-d}\tau, 0]$.

Следующий результат также был представлен в работе [6].

Лемма 3 [6]. Пусть $f(\mathbf{x}_\tau) = F[\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)]$ в (1), а система (1) обобщенно однородна со степенью однородности $d \ge 0$ и глобально асимптотически устойчива в начале координат для $\tau = 0$, тогда для любого $\rho > 0$ существует $0 < \tau_0 < +\infty$ такое, что система (1) асимптотически устойчива в начале координат в B_ρ^τ для любого $0 \le \tau \le \tau_0$.

Таким образом, система (1) является локально робастно устойчивой по отношению к достаточно малому запаздыванию, если она обобщенно однородна с неотрицательной степенью однородности и устойчива в случае отсутствия запаздывания.

Робастность обобщенно однородных систем с отрицательной степенью однородности по отношению к запаздыванию

Представим развитие леммы 3 для случая отрицательной степени однородности.

Лемма 4. Пусть $f(\mathbf{x}_t) = F[\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)]$ в (1) является равномерно непрерывной, а система (1) обобщенно однородна со степенью однородности $d < 0$ и глобально асимптотически устойчива в начале координат для $\tau = 0$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $0 < \tau_0 < +\infty$ такое, что система (1) глобально асимптотически устойчива по отношению к B_ρ^τ для любого запаздывания $0 \le \tau \le \tau_0$.

Доказательство. Зафиксируем некоторые $\rho > 0$, $\tau > 0$ и рассмотрим $\mathbf{x}_0 \in B_\rho^\tau$, тогда

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0(0) + \int_0^t F[\mathbf{x}(s, \mathbf{x}_0), \mathbf{x}(s-\tau, \mathbf{x}_0)]ds$$

является решением системы (1), если оно определено на интервале $[0,t]$ для $t \ge 0$ [12], и $\|\mathbf{x}_0\| \le \bar{\rho}_r(\rho)$ согласно (3). Для всех $\|\boldsymbol{\varphi}\| \le 2\bar{\rho}_r(\rho)$, согласно лемме 1, существует такое $k > 0$, что $\left|F[\boldsymbol{\varphi}(0), \boldsymbol{\varphi}(-\tau)]\right|_r \le k \max_{1\le i\le n} \|\boldsymbol{\varphi}\|_r^{1+d/r_i}$. Таким образом, используя также (3), можно записать:

$$\left|F[\boldsymbol{\varphi}(0), \boldsymbol{\varphi}(-\tau)]\right| \le \bar{\sigma}_r\left(\left|F[\boldsymbol{\varphi}(0), \boldsymbol{\varphi}(-\tau)]\right|_r\right) \le \bar{\sigma}_r\left(k \max_{1\le i\le n} \|\boldsymbol{\varphi}\|_r^{1+d/r_i}\right),$$

$$\le \bar{\sigma}_r\left(k \max_{1\le i\le n}\left[\underline{\rho}_r^{-1}(\|\boldsymbol{\varphi}\|)\right]^{1+d/r_i}\right) \le \iota_k(\|\boldsymbol{\varphi}\|),$$

где $\iota_k(s) = \bar{\sigma}_r\left(k \max_{1\le i\le n}\left[\underline{\rho}_r^{-1}(s)\right]^{1+d/r_i}\right)$ – функция класса K_∞. Выберем $0 < \tau < \dfrac{\bar{\rho}_r(\rho)}{\iota_k(2\bar{\rho}_r(\rho))}$ и покажем, что с учетом данного ограничения справедливо $\left|\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0)\right| \le 2\bar{\rho}_r(\rho)$ для всех $0 \le t \le \tau$. Допустим, что это условие не выполняется. Тогда предположим, что $\|\mathbf{x}_s\| \le 2\bar{\rho}_r(\rho)$ для всех $s \in [0,t']$ и некоторого $t' < \tau$, а $\|\mathbf{x}_s\| \ge 2\bar{\rho}_r(\rho)$ для $s \in [t',\tau]$. Тогда

$$\left|\mathbf{x}(t',\mathbf{x}_0)\right| \le \left|\mathbf{x}_0(0)\right| + \int_0^{t'}\left|F\left[\mathbf{x}(s,\mathbf{x}_0), \mathbf{x}(s-\tau,\mathbf{x}_0)\right]\right| ds \le \left|\mathbf{x}_0(0)\right| + \int_0^{t'} \iota_k(\|\mathbf{x}_s\|) ds,$$

$$\le \left|\mathbf{x}_0(0)\right| + t' \sup_{0\le s\le t'} \iota_k(\|\mathbf{x}_s\|) < \bar{\rho}_r(\rho) + t'\iota_k(2\bar{\rho}_r(\rho)) < 2\bar{\rho}_r(\rho),$$

что является противоречием, т.е. $\|\mathbf{x}_s\| \le 2\bar{\rho}_r(\rho)$ для $s \in [0,\tau]$. Таким образом, для любого $\rho > 0$ существует $\tau > 0$ такое, что для $\mathbf{x}_0 \in B_\rho^\tau$ выполняется $\mathbf{x}_t \in B_{\rho'}^\tau$ для $\rho' = \underline{\rho}_r^{-1}[2\bar{\rho}_r(\rho)]$ согласно выражению (3).

Условия данной леммы означают, что $\left|F[\boldsymbol{\Lambda}_r(\lambda)\mathbf{x}, \boldsymbol{\Lambda}_r(\lambda)\mathbf{z}]\right| \le \lambda^d \boldsymbol{\Lambda}_r(\lambda) F[\mathbf{x},\mathbf{z}]$ для любых $\mathbf{x},\mathbf{z} \in \Re^n$ и $\lambda \in (0,+\infty)$. В дополнение $x = 0$ для системы

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x},\mathbf{x}) \tag{4}$$

является глобально асимптотически устойчивой точкой. Отметим, что система (4) также однородна со степенью $d < 0$ ($\left|F[\boldsymbol{\Lambda}_r(\lambda)\mathbf{x}, \boldsymbol{\Lambda}_r(\lambda)\mathbf{x}]\right| \le \lambda^d \boldsymbol{\Lambda}_r(\lambda) F[\mathbf{x},\mathbf{x}]$ для любого $\mathbf{x} \in \Re^n$ и $\lambda \in (0,+\infty)$), тогда, согласно [13, 14], существует дифференцируемая обобщенно однородная функция Ляпунова $V : \Re^n \to \Re_+$ со степенью однородности $\upsilon > -d$, такая, что

$$a = -\sup_{\xi\in\aleph_r} \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\xi}} F(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}) > 0;\ 0 < b = \sup_{|\xi|_r\le 1}\left|\frac{\partial V(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right| < +\infty;$$

$$c_1 = \inf_{\xi\in\aleph_r} V(\boldsymbol{\xi}) > 0;\quad c_2 = \sup_{\xi\in\aleph_r} V(\boldsymbol{\xi}) > 0;\ c_1|\mathbf{x}|_r^\upsilon \le V(\mathbf{x}) \le c_2|\mathbf{x}|_r^\upsilon,\ \forall \mathbf{x} \in \Re^n.$$

Рассмотрим производную данной функции, посчитанную для системы (1) для $\boldsymbol{\varphi} \in C_{[-\tau,0]}$. Определим $\lambda_1 = |\boldsymbol{\varphi}(0)|_r$ и $\lambda_2 = \|\boldsymbol{\varphi}\|_r$ для $\boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{\Lambda}_r(\lambda_1)\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\xi} \in S_r$ и $\boldsymbol{\varphi} = \Lambda_r(\lambda_2)\mathbf{j}$, $\mathbf{j} \in \aleph_r \subset C_{[-\tau,0]}$ соответственно, где $\lambda_2 \ge \lambda_1$ согласно определению норм и $|\mathbf{j}(0)|_r \le |\boldsymbol{\xi}|_r = 1$ (необходимость обозначать два преобразования с λ_1 и λ_2 заключается в том, что векторы состояния систем (1) и (4) принадлежат разным пространствам, $\Re^n$ и $C_{[-\tau,0]}$):

$$\frac{\partial V(\boldsymbol{\varphi}(0))}{\partial \boldsymbol{\varphi}(0)} F[\boldsymbol{\varphi}(0), \boldsymbol{\varphi}(-\tau)] = \frac{\partial V(\boldsymbol{\varphi}(0))}{\partial \boldsymbol{\varphi}(0)} F[\boldsymbol{\varphi}(0), \boldsymbol{\varphi}(0)] + \frac{\partial V(\boldsymbol{\varphi}(0))}{\partial \boldsymbol{\varphi}(0)}\{F[\boldsymbol{\varphi}(0), \boldsymbol{\varphi}(-\tau)] - F[\boldsymbol{\varphi}(0), \boldsymbol{\varphi}(0)]\} =$$

$$= \lambda_1^{d+\upsilon}\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\xi}} F[\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}] + \lambda_1^{d+\upsilon}\frac{\partial V(\boldsymbol{\varphi}(0))}{\partial \boldsymbol{\varphi}(0)}\{F[\boldsymbol{\varphi}(0), \boldsymbol{\varphi}(-\tau)] - F[\boldsymbol{\varphi}(0), \boldsymbol{\varphi}(0)]\}.$$

Согласно лемме 2, для всех $\mathbf{j} \in \aleph_r \subset C_{[-\tau,0]}$ и некоторого $\eta > 0$ существует такое $L > 0$, зависящее от η, что

$$|F[\mathbf{j}(0), \mathbf{j}(-\tau)] - F[\mathbf{j}(0), \mathbf{j}(0)]|_r \le \max\{L \max_{1\le i\le n} |\mathbf{j}(0) - \mathbf{j}(-\tau)|_r^{1+d/r_i}, \eta\}.$$

Рассмотрим решение системы (1) для $t \ge \tau$ (ранее было показано, что для $\mathbf{x}_0 \in B_\rho^\tau$ выполняется условие $\mathbf{x}_t \in B_{\rho'}^\tau$ для $t \in [0,\tau]$ и любых $\rho > 0$, $\rho' = \underline{\rho}_r^{-1}[2\bar{\rho}_r(\rho)]$ и $\tau < \dfrac{\bar{\rho}_r(\rho)}{\iota_k(2\bar{\rho}_r(\rho))}$), тогда $|\boldsymbol{\varphi}(0) - \boldsymbol{\varphi}(-\tau)| \le M\tau$, где $M = \sup_{|\mathbf{z}|_r\le\rho', |\mathbf{y}|_r\le\rho'} |F[\mathbf{z},\mathbf{y}]|$, и

$$\| \boldsymbol{\varphi} \|_r | \mathbf{j}(0) - \mathbf{j}(-\tau) |_r = | \boldsymbol{\varphi}(0) - \boldsymbol{\varphi}(-\tau) |_r \le \underline{\sigma}_r^{-1}(M\tau),$$

$$| F[\mathbf{j}(0), \mathbf{j}(-\tau)] - F[\mathbf{j}(0), \mathbf{j}(0)] | \le \overline{\sigma}_r \circ \max\{L \max_{1\le i\le n} \| \boldsymbol{\varphi} \|_r^{-1-d/r_i} \ \underline{\sigma}_r^{-1}(M\tau)^{1+d/r_i}, \eta\}.$$

Наконец, получим для $t \ge \tau$

$$| F[\mathbf{j}(0), \mathbf{j}(-\tau)] - F[\mathbf{j}(0), \mathbf{j}(0) | \le \overline{\sigma}_r \circ \max\{\pi_1(\tau)\pi_2(\lambda_2), \eta\},$$

где

$$\pi_1(\tau) = L \max_{1\le i\le n} \underline{\sigma}_r^{-1}(M\tau)^{1+d/r_i}, \qquad \pi_2(\lambda_2) = \begin{cases} \lambda_2^{-1-d/\min_{1\le i\le n} r_i} & \text{if } \lambda_2 \ge 1 \\ \lambda_2^{-1-d/\max_{1\le i\le n} r_i} & \text{if } \lambda_2 < 1 \end{cases}$$

являются функциями класса K_∞. Для того чтобы доказать асимптотическую устойчивость системы, применим подход Ляпунова–Разумихина [9]. Предполагая, что для некоторого $\gamma > 1$ $c_1 \sup_{\theta\in[-\tau,0]} | \boldsymbol{\varphi}(\theta) |_r^v \le \sup_{\theta\in[-\tau,0]} V[\boldsymbol{\varphi}(\theta)] < \gamma V[\boldsymbol{\varphi}(0)] \le \gamma c_2 | \boldsymbol{\varphi}(0) |_r^v$ и $\sup_{\theta\in[-\tau,0]} | \boldsymbol{\varphi}(\theta) |_r \le \left(\gamma c_1^{-1} c_2\right)^{1/v} \lambda_1$, получим

$$\lambda_2 = \| \boldsymbol{\varphi} \|_r = \left(\sum_{i=1}^{n} \sup_{\theta\in[-\tau,0]} | \boldsymbol{\varphi}_i(\theta) |^{\rho/r_i} \right)^{1/\rho} \le \left(\sum_{i=1}^{n} \sup_{\theta\in[-\tau,0]} | \boldsymbol{\varphi}(\theta) |_r^{\rho} \right)^{1/\rho} = n^{1/\rho} \sup_{\theta\in[-\tau,0]} | \boldsymbol{\varphi}(\theta) |_r \le R\lambda_1,$$

где $R = n^{1/\rho}(\gamma c_1^{-1} c_2)^{1/v}$. Наконец, можно получить

$$\frac{\partial V(\boldsymbol{\varphi}(0))}{\partial \boldsymbol{\varphi}(0)} F[\boldsymbol{\varphi}(0), \boldsymbol{\varphi}(-\tau)] \le b\overline{\sigma}_r \circ \max\{\pi_1(\tau)\pi_2(\lambda_2), \eta\}\lambda_2^{d+v} - aR^{-d-v}\lambda_2^{d+v} =$$

$$= \| \boldsymbol{\varphi} \|_r^{d+v} \ (b\overline{\sigma}_r \circ \max\{\pi_1(\tau)\pi_2(\| \boldsymbol{\varphi} \|_r), \eta\} - aR^{-d-v}),$$

Выберем $\eta = \dfrac{\overline{\sigma}_r^{-1}(aR^{-d-v} - \varepsilon)}{b}$ (зависящее от ρ и не зависящее от τ) и $\rho > \varepsilon > 0$, тогда для всех $0 \le \tau \le \tau_0 = \min\left\{ \dfrac{\overline{\rho}_r(\rho)}{\iota_k(2\overline{\rho}_r(\rho))}, \dfrac{1}{\pi_2(\varepsilon)} \pi^{-1}\left(\dfrac{\overline{\sigma}_r^{-1}(aR^{-d-v} - \varepsilon)}{b} \right) \right\}$ и некоторого $\varepsilon \in (0, aR^{-d-v})$ можно получить

$$\max_{\theta\in[-\tau,0]} V[\boldsymbol{\varphi}(\theta)] < \gamma V[\boldsymbol{\varphi}(0)] \Rightarrow \frac{\partial V(\boldsymbol{\varphi}(0))}{\partial \boldsymbol{\varphi}(0)} F[\boldsymbol{\varphi}(0), \boldsymbol{\varphi}(-\tau)] \le -\varepsilon | \boldsymbol{\varphi}(0) |_r^{d+v}$$

для всех $\boldsymbol{\varphi} \in B_{\rho'}^{\tau} \setminus B_{\varepsilon}^{\tau}$, которые являются решениями системы (1) для $t \ge \tau$. Согласно [9], траектории системы (1) сходятся к B_{ε}^{τ} и остаются ограниченными для $t \ge \tau$, но они также остаются ограниченными для $0 \le t \le \tau$ с $\| \mathbf{x}_0 \|_r \le \rho$, что обеспечивает асимптотическую устойчивость по отношению к B_{ε}^{τ} в B_{ρ}^{τ} для любого запаздывания $0 \le \tau \le \tau_0$.

Используя утверждение 1 для некоторого масштабирующего $\lambda_0 > 1$, получим последовательности $\varepsilon_i = \lambda_0^i \varepsilon$ и $\rho_i = \lambda_0^i \rho$ для всех $i \ge 0$, такие, что $\varepsilon_i < \rho_{i-1}$ для всех $i \ge 1$. Тогда система (1) асимптотически устойчива по отношению к $B_{\varepsilon_i}^{\tau}$ в $B_{\rho_i}^{\tau}$ для любого запаздывания $0 \le \tau \le \tau_0$. Свойство $\varepsilon_i < \rho_{i-1}$ для всех $i \ge 1$ гарантирует глобальную аттрактивность множества B_{ε}^{τ} с сохранением устойчивости, что и требовалось доказать.

Замечание. Легко заметить, что результат леммы 4 сохраняется как для любого варьирующегося запаздывания, так и при наличии множества запаздываний.

Численный пример

Воспользуемся результатом работы [15] и приведем в качестве примера систему двойного интегратора, финитно стабилизируемую законом управления $u(\mathbf{x}) = \left(c_u |\mathbf{x}|_r\right)^{1-\mu} \mathbf{kD}\left(\left(c_u |\mathbf{x}|_r\right)^{-1}\right)\mathbf{x}$, где $c_u = 1{,}97$, $\mu = 0{,}2$, $\rho = 1{,}2$, $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} -0{,}6121 & -0{,}4418 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{D}(\lambda) = diag\{\lambda^{1+(n-i)\mu}\}_{i=1}^{n}$. Данная система однородна со степенью $-\mu$, вектором весов $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1+\mu & 1 \end{pmatrix}^T$ и финитно устойчива. Предположим, что вектор состояния доступен для измерения с некоторыми запаздываниями $\tau_i \in (0, \tau_{\max})$, $i = \overline{1,2}$, $0 < \tau_{\max} \le \tau_0 < +\infty$, т.е. $\dfrac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial t} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(x_1(t-\tau_1), x_2(t-\tau_2))$. Тогда приведенная система является глобально асимптотически устойчивой по отношению к $B_{\varepsilon}^{\tau_{\max}}$ для некоторого $\varepsilon > 0$, зависящего от выбранных значений запаздываний. На рисунке представлены результаты моделирования для $\tau_{\max} = 0{,}8$ и $\tau_{\max} = 1$.

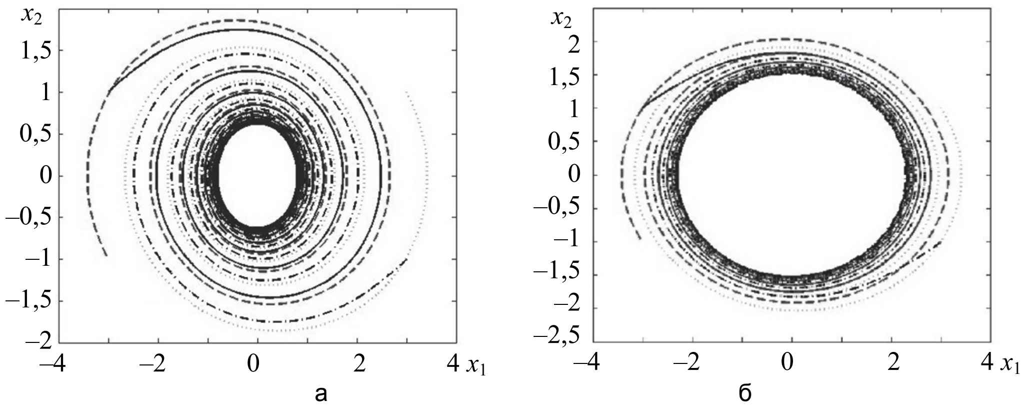

Рисунок. Результаты моделирования: $\tau_{\max}$ =0,8 (а); $\tau_{\max}$ =1 (б)

Заключение

В работе было показано, что, если система обобщенно однородна с отрицательной степенью однородности и глобально асимптотически устойчива, то при наличии любого запаздывания траектории системы сходятся к некоторому компактному множеству, содержащему начало координат, что является интересным свойством робастности нелинейных систем, которое, например, не распространяется на класс линейных систем. Основываясь на полученном результате, в дальнейшем планируется развитие новых алгоритмов стабилизации и оценки, которые сохраняют ограниченность всех траекторий системы при наличии любого запаздывания.

Литература

1. Erneux T. Applied Delay Differential Equations. NY, Springer, 2009. 204 p. doi: 10.1007/978-0-387-74372-1
2. Gupta R.A., Chow M.Y. Networked control system: overview and research trends // IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2010. V. 57(7). P. 2527–2535. doi: 10.1109/tie.2009.2035462
3. Chiasson J., Loiseau J.J. Applications of Time Delay Systems. Berlin, Springer, 2007. 355 p. doi: 10.1007/978-3-540-49556-7
4. Fridman E. Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control. Springer, 2014. 378 p.
5. Richard J.-P. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems // Automatica. 2003. V. 39. N 10. P. 1667–1694. doi: 10.1016/s0005-1098(03)00167-5
6. Efimov D., Polyakov A., Perruquetti W., Richard J.-P. Weighted homogeneity for time-delay systems: finite-time and independent of delay stability // IEEE Transactions on Automatic Control. 2016. V. 61. N 1. P. 210–215. doi: 10.1109/tac.2015.2427671
7. Kolmanovskii V.B., Nosov V.R. Stability of Functional Differential Equations. Academic Press, 1986. 217 p.
8. Moulay E., Dambrine M., Yeganefar N., Perruquetti W. Finite-time stability and stabilization of time-delay systems // Systems & Control Letters. 2008. V. 57. N 7. P. 561–566. doi: 10.1016/j.sysconle.2007.12.002
9. Gu K., Kharitonov V.L., Chen J. Stability of Time-Delay Systems. Boston, Birkhauser, 2003. 353 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0039-0
10. Bacciotti A., Rosier L. Lyapunov Functions and Stability in Control Theory. London, Springer, 2005. 237 p.
11. Efimov D., Perruquetti W. Homogeneity for time-delay systems // IFAC Proceedings Volumes. 2011. P. 3861–3866. doi: 10.3182/20110828-6-it-1002.03195
12. Hale J.K. Theory of Functional Differential Equations. Springer, 1977. 365 p. doi: 10.1007/978-1-4612-9892-2
13. Зубов В.И. О системах обыкновенных дифференциальных уравнений с обобщенно-однородными правыми частями // Известия вузов. Математика. 1958. № 1. С. 80–88.

References

1. Erneux T. *Applied Delay Differential Equations*. NY, Springer, 2009, 204 p. doi: 10.1007/978-0-387-74372-1
2. Gupta R.A., Chow M.Y. Networked control system: overview and research trends. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2010, vol. 57, no. 7, pp. 2527–2535. doi: 10.1109/tie.2009.2035462
3. Chiasson J., Loiseau J.J. *Applications of Time Delay Systems*. Berlin, Springer, 2007, 355 p. doi: 10.1007/978-3-540-49556-7
4. Fridman E. *Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control*. Springer, 2014, 378 p.
5. Richard J.-P. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 2003, vol. 39, no. 10, pp. 1667–1694. doi: 10.1016/s0005-1098(03)00167-5
6. Efimov D., Polyakov A., Perruquetti W., Richard J.-P. Weighted homogeneity for time-delay systems: finite-time and independent of delay stability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, vol. 61, no. 1, pp. 210–215. doi: 10.1109/tac.2015.2427671
7. Kolmanovskii V.B., Nosov V.R. *Stability of Functional Differential Equations*. Academic Press, 1986, 217 p.
8. Moulay E., Dambrine M., Yeganefar N., Perruquetti W. Finite-time stability and stabilization of time-delay systems. *Systems & Control Letters*, 2008, vol. 57, no. 7, pp. 561–566. doi: 10.1016/j.sysconle.2007.12.002
9. Gu K., Kharitonov V.L., Chen J. *Stability of Time-Delay Systems*. Boston, Birkhauser, 2003, 353 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0039-0
10. Bacciotti A., Rosier L. *Lyapunov Functions and Stability in Control Theory*. London, Springer, 2005, 237 p.
11. Efimov D., Perruquetti W. Homogeneity for time-delay systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 2011, pp. 3861–3866. doi: 10.3182/20110828-6-it-1002.03195
12. Hale J.K. *Theory of Functional Differential Equations*. Springer, 1977, 365 p. doi: 10.1007/978-1-4612-9892-2
13. Zubov V.I. On systems of ordinary differential equations with generalized-homogeneous right-hand sides. *Izvestiya Vuzov.*

14. Rosier L. Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field // Systems & Control Letters. 1992. V. 19. N 6. P. 467–473. doi: 10.1016/0167-6911(92)90078-7
15. Зименко К.А., Поляков А.Е., Ефимов Д.В., Кремлев А.С. Устойчивость системы последовательно соединенных интеграторов на конечном интервале времени // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2015. Т. 58. № 9. С. 681–686. doi: 10.17586/0021-3454-2015-58-9-681-686

Matematika, 1958, no. 1, pp. 80–88. (In Russian)

14. Rosier L. Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field. *Systems & Control Letters*, 1992, vol. 19, no. 6, pp. 467–473. doi: 10.1016/0167-6911(92)90078-7
15. Zimenko K.A., Polyakov A.E., Efimov D.V., Kremlev A.S. Finite-time stability of system of series-connected integrators. *Journal of Instrument Engineering*, 2015, vol. 58, no. 9, pp. 681–686. (In Russian) doi: 10.17586/0021-3454-2015-58-9-681-686

Авторы

Ефимов Денис Валентинович – доктор технических наук, ведущий научный сотрудник, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация; научный сотрудник первого класса, Государственный институт исследований в информатике и автоматике, Лилль, 59650, Франция, efde@mail.ru

Кремлев Артем Сергеевич – кандидат технических наук, доцент, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, kremlev_artem@mail.ru

Authors

Denis V. Efimov – D.Sc., Senior Researcher, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation; Researcher, Institut national de recherche en informatique et en automatique, Lille, 59650, France, efde@mail.ru

Artem S. Kremlev – PhD, Associate Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, kremlev_artem@mail.ru