УДК 531

УПРАВЛЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПРИ ПЕРЕМЕННОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ МАССЫ

В.С. Королев, Р.Ю. Кравчук

Рассматривается задача управления вращательным движением относительно центра масс механической системы, состоящей из основного тела и других тел или частиц, которые могут двигаться относительно главного тела или менять массу, определяя переменное распределение массы и дополнительное изменение кинетического момента. Получены уравнения динамики, которые можно исследовать аналитическими или численными методами.
Ключевые слова: управление, вращательное движение, космический аппарат, гироскопы, переменное распределение массы, гравитационное поле.

Введение

Теория оптимального управления движением космических аппаратов в гравитационном поле зародилась более 100 лет назад, после работ К.Э. Циолковского и В. Гомана, задолго до начала космической эры. Она продолжена в работах В.В. Белецкого, В.И. Зубова, Н.Н. Красовского, Д.Ф. Лоудена, В.С. Новоселова, В.Е. Охоцимского [1–8]. За это время теория бурно развивалась параллельно со стремительным развитием ракетной техники и практической космонавтики. Было опубликовано большое количество научных работ, в которых изучены различные аспекты и рассмотрены многочисленные частные случаи, а также работы обобщающего характера, в которых сформулированы общие принципы оптимального управления движением космических аппаратов в задачах перехода между заданными орбитами и вращательного движения относительно центра масс. Основными являются задачи построения движений, достигающих заранее поставленных целей при минимальных затратах топлива при работе двигателей (такие траектории называются энергетически оптимальными) или на минимальных промежутках времени (задачи быстродействия).

Постановка задачи

Рассматриваются задачи управления движением в центральном гравитационном поле для механической системы, которая состоит из основного тела (носитель, космический аппарат или космическая станция, которые можно считать абсолютно твердыми), а также других тел или частиц (в том числе антенны, солнечные батареи, гироскопы, потоки жидкого топлива при работе реактивных двигателей, подвижные или перемещаемые детали). Они могут двигаться относительно главного тела и определяют переменное распределение массы всей системы или изменения кинетического момента и влияют на движение носителя, а также создают управляющие моменты для разворота или демпфирования колебаний и стабилизации при заданной ориентации. Для гироскопических комплексов определяющим является способность создавать управляющие моменты за счет затрат электроэнергии без дополнительного расхода топлива. Другим достоинством является способность реализовать высокоточное управление. Для космической астрофизической лаборатории «Гамма» использовались шесть гироскопов, которые обеспечивали ориентацию при угловых скоростях поворота до 1°/с и точности стабилизации до 10 угловых секунд.

В общем случае уравнения движения космического аппарата в гравитационном поле естественным образом разделяются на уравнения движения центра масс и вращательного движения относительно центра масс системы. Управление может быть реализовано включением реактивных двигателей космического аппарата или специальных устройств, которые размещены на носителе и могут обеспечить действие большой тяги на коротких промежутках времени (отдельный импульс или последовательность) или малой тяги, но имеющей почти неограниченный ресурс по времени работы.

Изменения декартовых координат для каждого выделенного объекта в пространственном случае описывает система трех уравнений второго порядка:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} x_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(U) + P_i = f_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Здесь x – декартовы координаты; r – модуль радиус-вектора центра масс; U – силовая функция учитываемых возмущений; μ – гравитационный параметр центрального тела; P – непотенциальные силы, включая реактивную тягу двигателей на активных участках полета.

При отсутствии возмущений, когда их считают не существенными, движение тела в центральном гравитационном поле определяется начальными значениями радиус-вектора, вектора скорости и гравитационным параметром. Они определяют постоянные для выделенного промежутка пассивного полета параметры эллиптической орбиты, которые называют кеплеровыми элементами

$$k(t) = (a, e, i, \Omega, \omega, M_0).$$

Они могут определяться по результатам наблюдений и прогнозироваться на следующий промежуток времени. Это позволяет вычислять абсолютные декартовы координаты $x(t)$ и скорости $v(t)$ для невозмущенного движения в заданный произвольный момент t по следующим формулам:

$$r = a(1 - e\cos E), \quad p = a(1 - e^2);$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\, e r^{-1} \sin\vartheta, \quad \beta = \sqrt{\mu p}\, r^{-1};$$

$$E - e\sin E = M_0 + n(t - t_0) = M;$$

$$x_1 = r(\cos u \cos\Omega - \sin u \sin\Omega \cos i);$$

$$x_2 = r(\cos u \sin\Omega - \sin u \cos\Omega \cos i);$$

$$x_3 = r \sin u \sin i;$$

$$v_1 = \alpha x_1 + \beta(-\sin u \cos\Omega - \cos u \sin\Omega \cos i);$$

$$v_2 = \alpha x_2 + \beta(-\sin u \sin\Omega + \cos u \cos\Omega \cos i);$$

$$v_3 = \alpha x_3 + \beta \cos u \sin i.$$

В упрощенной импульсной постановке элементы считают постоянными, а работа реактивных двигателей на активных участках определяет мгновенное изменение вектора скорости и новые значения кеплеровых элементов.

Время движения между двумя точками орбиты можно определить из уравнения Кеплера. В случае необходимости учета возмущающих или реактивных сил можно использовать аппроксимацию возмущений кусочно-постоянными функциями, что приводит задачу к последовательному сопряжению участков траекторий, полученных при выбранной параметризации промежутков движения и действующих импульсов. Для нахождения изменений элементов $k(t)$ возмущенного движения можно использовать дифференциальные уравнения Эйлера, где правые части уравнений определяются текущими значениями элементов и проекциями возмущающих ускорений на оси орбитальной системы координат [9–13].

Уравнения вращательного движения механической системы или тела с подвижными частицами можно получить из основной теоремы об изменении кинетического момента в виде динамических уравнений Эйлера с использованием подвижной декартовой системы координат, которая вращается вместе с основным телом, а начало отсчета 0 совпадает с центром масс.

В общем случае задача определения движения сложной механической системы приводит к необходимости учитывать перемещение центра масс всей системы относительно системы координат носителя и изменение параметров тензора инерции в выбранной системе координат, которые необходимо уточнять для дальнейшего управления по результатам наблюдений или дополнительных вычислений. При этом рассматриваются различные модели относительного перемещения частиц или вспомогательных тел внутри механической системы [6, 10, 14].

Управление вращательным движением

В большинстве работ рассматривают задачи оптимального управления, в которых в процессе движения требуется достичь заданного состояния или оказаться в некоторой окрестности нужного положения для дальнейшего управления движением. Критерии оптимальности могут быть разными: обеспечить минимальный расход топлива; реализовать переход за наименьшее или заданное время; получить нужные значения абсолютных или относительных параметров движения. При этом могут существовать дополнительные ограничения на время движения, на количество включений двигателей (число импульсов), на время работы двигателя при отдельных включениях, на общий расход топлива.

Пусть основное твердое тело (носитель) содержит полость, заполненную подвижными частицами, перемещение которых не изменяет направление главных осей инерции. Скорость частицы относительно неподвижной системы $v_a = v_e + v_r$, где v_e – переносная скорость или скорость той точки жесткой координатной системы носителя, с которой в данный момент времени совпадает частица; v_r – относительная скорость частицы по отношению к этой системе. Кинетический момент системы относительно точки 0, являясь линейной функцией абсолютных скоростей, равен $G = G_e + G_r$, где G_e – момент количества движения корпуса носителя, сложенный с кинетическим моментом переносного движения частиц; G_r – момент количества относительного движения.

Обозначая через ω мгновенную угловую скорость носителя, запишем

$$\frac{d'(G_e + G_r)}{dt} + \omega \times (G_e + G_r) = M = M_a + M_r.$$

Здесь M – момент относительно точки 0 внешних M_a и реактивных M_r сил, приложенных к рассматриваемой механической системе

$$M_r = \sum_j r_j \times (F_{ji} + F_{jc} + F_{je}) \ ,$$

где F_{ji} – импульсные силы, действующие на частицу с номером j и определяемые интенсивностью перетекания и относительной скоростью; F_{jc} – силы Кориолиса, действующие на частицу с номером j; F_{je} – силы инерции переносного движения; вектор r_j определяет положение частицы.

Кинетический момент мгновенно затвердевшей системы

$$G_e = I \cdot \omega.$$

Если система координат в течение исследуемого промежутка времени совпадает с главными осями эллипсоида инерции, то матрица составляющих тензора инерции I будет диагональной, но главные моменты инерции оказываются переменными величинами. В общем случае присутствуют все элементы матрицы тензора инерции и также нужно учитывать их изменение со временем. В проекции на ось x получим

$$I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y)\,\omega_y\,\omega_z = M_{ax} + M_{rx}\,.$$

Здесь главная часть гравитационных моментов центрального поля

$$M_{ax} = 3n_0^2 (I_z - I_y)\,\alpha_2\,\alpha_3\ ,$$

а суммарный реактивный момент относительно оси

$$M_{rx} = -\dot{I}_x\,\omega_x - \dot{G}_{rx} + \omega_z G_{ry} - \omega_y G_{rz}.$$

Проекции на две другие оси получим циклической перестановкой индексов:

$$x \to y \to z \to x\ ,\ \ 1 \to 2 \to 3 \to 1.$$

Оптимальное по быстродействию управление в самом упрощенном случае, соответствующем условиям Лагранжа ($I_x = I_z = I$), для задачи приведения к стационарному вращению КА относительно оси y, ортогональной плоскости орбиты, когда дополнительно пренебрегают гравитационными моментами по сравнению с управляющими моментами, можно получить в качестве начального приближения, анализируя систему уравнений

$$\dot{\omega}_x = k\ \omega_z + u_1,$$

$$\dot{\omega}_z = -k\ \omega_x + u_2,$$

$$\dot{\omega}_y = u_3\ .$$

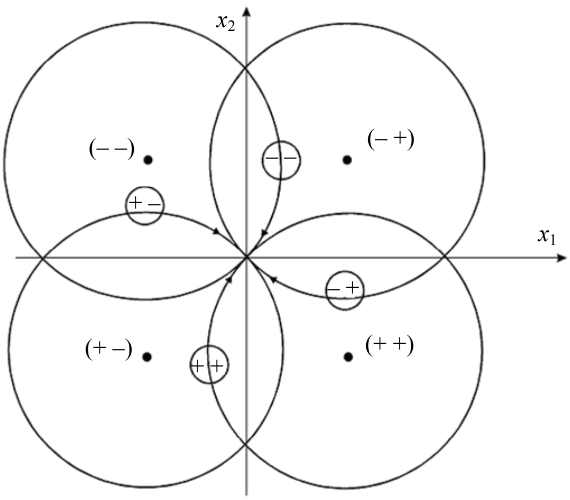

Рисунок. Фазовый портрет для системы

Предполагаем дополнительно, что $|u_1| \le u_0$, $|u_2| \le u_0$, $u_3 = 0$.

Функция Гамильтона для задачи управления будет иметь вид

$$H = -1 + \lambda_1(k\ \omega_z + u_1) + \lambda_2(-k\ \omega_x + u_2)\,.$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа сопряженной системы уравнений имеют решение

$$\lambda_1 = A\sin(k\,t + \alpha),\quad \lambda_2 = A\cos(k\,t + \alpha)\,.$$

Моменты переключения определяются на основе принципа максимума Понтрягина сменой знака множителей λ. Получаем управление релейного типа в виде периодической кусочно-постоянной функции $u_i = u_0$ или $u_i = -u_0$.

Фазовые траектории являются последовательно сопряженными дугами окружностей с убывающим радиусом, которые отвечают одной четверти периода.

В начало координат можно попасть по дуге одной из четырех изображенных на рисунке окружностей при смещенном расположении центра, которое определяется последовательностью знаков при реализации управлений u_1 и u_2 в следующем порядке: (+,+), (+,–), (–,–), (–,+).

Начальный и конечный участок фазовых траекторий могут отличаться от четверти окружности.

Управление движением гиростата

Гиростатом называют твердое тело, имеющее вращающиеся роторы или гироскопы, т.е. динамически симметричные тела, оси вращения которых закреплены в теле носителя. Пусть число роторов l, а центр тяжести каждого ротора располагается на неподвижной в теле его оси вращения. Само тело, называемое носителем, может вращаться вокруг неподвижной точки, совпадающей с неизменным положением в теле общим центром масс. Под ориентацией космического аппарата будем понимать ориентацию системы координат, которая жестко связана с основным телом. При изменении угловых скоростей вращения гироскопов возникает момент, который можно считать управляющим. Запишем кинетический момент системы тел в виде

$$G = G_e + G_r\,, \quad G_r = \sum G_i\,\dot{\varphi}_i e, \quad G_e = I\,\omega.$$

Здесь G_e – кинетический момент носителя с невращающимися роторами, I – тензор инерции тела вместе с роторами, G_i – осевой момент инерции i-го ротора, $\dot{\varphi}_i$ – угловая скорость и e_i – орт оси его вращения в теле носителя.

Закон изменения момента количества движения рассматриваемой механической системы относительно центра масс при переходе к операции дифференцирования в пространстве, связанном с телом, можно записать в виде следующего векторного уравнения Эйлера

$$I\dot{\omega} + \omega \times I\,\omega + \sum G_i\,(\ddot{\varphi}_i e_i + \dot{\varphi}_i \omega \times e_i) = M_0\,,$$

где M_0 – известный момент внешних сил, который включает гравитационное взаимодействие, аэродинамическое и световое давление.

Ввиду равенства поперечных моментов инерции ротора уравнение Эйлера для проекции на его ось вращения имеет вид $G_i\dot{\varphi}_i = Q_i$, $\omega_i = \dot{\varphi}_i + (e_i,\,\omega)$. Здесь Q_i – проекция момента, приложенного к ротору. Это момент внутренних сил, который можно рассматривать как управляющий. В результате имеем

$$G_i\,(\ddot{\varphi}_i + (e_i \cdot \dot{\omega})) = Q_i\,.$$

Пусть τ – неподвижный единичный вектор; e – единичный вектор, связанный с носителем. Ставится задача выбора суммарного управляющего момента

$$Q = \sum Q_i \cdot e_i$$

таким, чтобы выполнялось условие: $e \to \tau$ при $t \to \infty$.

Справедливо следующее утверждение.

Пусть матрица $D = I - \sum G_i\, e_i\, e_i^*$ – неособенная. Здесь через e_i^* обозначен вектор, транспонированный по отношению к e_i. Пусть среди ортов e_i имеются три линейно независимых. Примем

$$Q = M_0 - \omega \times I\omega - \sum G_i\,\omega \times \dot{\varphi}_i e_i + D\,I^{-1}\,(\omega \times I\omega - M)\,.$$

Система уравнений движения при выбранном управлении Q, где

$$M = -\omega + k \cdot e \times \tau\,.$$

имеет состояние равновесия носителя $e = \pm\,\tau$, $\omega = 0$, каждое из которых асимптотически устойчиво по отношению к ω и e. При этом любое движение, для которого начальное значение вектора $e \neq -\tau$, при надлежащем выборе k будет удовлетворять условию $e \to \tau$, $\omega \to 0$ при $t \to \infty$.

Заключение

Разделение уравнений на движение носителя и относительные перемещения других тел или частиц позволяет решать задачи управления космическими аппаратами и стабилизации при заданной ориентации, используя выбор необходимого управления с учетом внутренних перемещений тел или частиц.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-08-01046).

Литература

1. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. – М.: МГУ, 1975. – 308 с.
2. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета. – М.: Наука, 1966.
3. Зубов В.И. Аналитическая динамика системы тел. – Л.: ЛГУ, 1983. – 344 с.
4. Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 476 с.

5. Лоуден Д.Ф. Оптимальные траектории для космической навигации. – М.: Мир, 1966. – 152 с.
6. Новоселов В.С. Аналитическая механика систем с переменными массами. – Л.: ЛГУ, 1969. – 240 с.
7. Новоселов В.С. Аналитическая теория оптимизации в гравитационных полях. – Л.: ЛГУ, 1972. – 317 с.
8. Охоцимский В.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета. – М.: Наука, 1990. – 448 с.
9. Новоселов В.С., Королев В.С. Об управлении возмущенной гамильтоновой системой // Автоматика-96. Тезисы докладов. Т. 1. – Севастополь, 1996.
10. Королев В.С. Об управлении движением механической системы при переменном распределении массы тел // Известия РАЕН, серия МММИУ. – 2000. – Т. 4. – № 4 – С. 108–117.
11. Королев В.С. Об управлении движением в гравитационном поле с учетом возмущений // Третьи Поляховские чтения. Тезисы докладов. – СПб: СПбГУ, 2003. – С. 95–96.
12. Королев В.С., Пахомов А.А. Моделирование движения и взаимного расположения системы космических тел // Процессы управления и устойчивость. Сборник трудов конференции. – СПб: СПбГУ, 2004. – С. 205–210.
13. Королев В.С. Определение движения навигационных спутников с учетом возмущений // Вестник СПбГУ. – 2004. – Сер. 10. – Вып. 3. – С. 39–46.
14. Новоселов В.С., Королев В.С. Аналитическая механика управляемой системы. – СПб: СПбГУ, 2005. – 298 с.

Королев Владимир Степанович – Санкт-Петербургский государственный университет, кандидат физ.-мат. наук, доцент, vokorol@bk.ru

Кравчук Раиса Юрьевна – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, ggarotta@gmail.com