УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ
июль–август 2018 Том 18 № 4 ISSN 2226-1494 http://ntv.ifmo.ru/
SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL OF INFORMATION TECHNOLOGIES, MECHANICS AND OPTICS
July–August 2018 Vol. 18 No 4 ISSN 2226-1494 http://ntv.ifmo.ru/en

УДК 62.50: 681.5.01

ОЦЕНКА РОБАСТНОСТИ ОТКЛОНЕНИЙ ТРАЕКТОРИЙ СВОБОДНОГО ДВИЖЕНИЯ АПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Н.А. Вундер[a], Н.А. Дударенко[a]

[a] Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация
Адрес для переписки: polinova_nina@mail.ru

Информация о статье
Поступила в редакцию 23.04.18, принята к печати 01.06.18
doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-4-704-707
Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Вундер Н.А., Дударенко Н.А. Оценка робастности отклонений траекторий свободного движения апериодических систем методами теории чувствительности // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2018. Т. 18. № 4. С. 704–707. doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-4-704-707

Аннотация
Предмет исследования. Рассмотрена задача оценки робастности отклонения траекторий свободного движения апериодических непрерывных систем к вариациям параметров матрицы состояния. **Методы.** Задача решена с использованием методов пространства состояний и теории чувствительности. **Основные результаты.** Получено аналитическое представление для оценки сверху отклонений траекторий свободного движения апериодических непрерывных систем, содержащее число обусловленности матрицы собственных векторов, которое является базовым для оценки робастности указанных отклонений методами теории чувствительности. **Практическая значимость.** Полученные выражения могут быть использованы для анализа апериодических непрерывных систем с неопределенными параметрами.

Ключевые слова
отклонения, свободное движение, робастность, теория чувствительности, число обусловленности

Благодарности
Работа выполнена при государственной поддержке ведущих университетов Российской Федерации (субсидия 08-08), Министерства образования и науки Российской Федерации (Проект 14. Z50.31.0031) и при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №16-08-00997.

ROBUSTNESS ESTIMATION OF FREE MOTION DEVIATIONS OF APERIODIC SYSTEMS WITH SENSITIVITY THEORY METHODS

N.A. Vunder[a], N.A. Dudarenko[a]

[a] ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation
Corresponding author: polinova_nina@mail.ru

Article info
Received 23.04.18, accepted 01.06.18
doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-4-704-707
Article in Russian

For citation: Vunder N.A., Dudarenko N.A. Robustness estimation of free motion deviations of aperiodic systems with sensitivity theory methods. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2018, vol. 18, no. 4, pp. 704–707 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-4-704-707

Abstract
Subject of Research. The paper deals with robustness estimation of free motion deviations in aperiodic continuous systems to parameter variations of the state matrix. **Methods.** The problem is solved with the state space approach and the sensitivity theory methods. **Main Results.** An upper bound estimation of trajectory deviations for aperiodic continuous systems is obtained. The equations contain the condition number of the eigenvectors matrix, that is the basis value for the robustness estimation of the deviations with the sensitivity theory methods. **Practical Relevance.** The results can be used for analysis of uncertain aperiodic continuous systems.

Keywords
deviations, free motion, robustness, sensitivity theory, condition number

Acknowledgments
This work was financially supported by the Government of the Russian Federation (Grant 08-08); the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, Project 14.Z50.31.0031, and by RFBR according to the research project No.16-08-00997.

Исследования факторов, порождающих отклонения [1] свободного движения устойчивых систем управления от монотонно сходящейся траектории, ведутся достаточно давно [2, 3]. Основные этапы развития этого направления исследований подробно освещены в работе [4]. Однако, несмотря на множество работ в этой области, относительно мало публикаций посвящено проблеме оценки робастности этих отклонений. Под робастностью подразумевается знание количественных оценок допустимых вариаций параметров математической модели [5].

В настоящей работе задача оценки робастности отклонений траекторий свободного движения решается на примере апериодических непрерывных систем с помощью методов пространства состояний и теории чувствительности [6, 7]. Данный подход позволяет осуществить оценку робастности траекторий свободного движения для матриц произвольной формы.

Рассмотрим устойчивую апериодическую непрерывную систему вида

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{F}\mathbf{x}(t);\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}(t)\big|_{t=0}, \tag{1}$$

где матрица $\mathbf{F}\in R^{n\times n}$ такова, что спектр ее собственных значений удовлетворяет следующим условиям: $\sigma\{\mathbf{F}\}=\left\{\lambda_i=\arg\left(\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{F})=0\right);\ \lambda_i<0; Im(\lambda_i)=0;\ \lambda_i\neq\lambda_j \text{ при } i\neq j\right\}$.

Решение системы (1) имеет вид

$$\mathbf{x}(t)=\exp(\mathbf{F}t)\mathbf{x}(0). \tag{2}$$

Перейдем в выражении (2) к соотношениям по векторным и матричным нормам, тогда становится справедливой запись

$$\|\mathbf{x}(t)\|=\|\exp(\mathbf{F}t)\mathbf{x}(0)\|\leq\|\exp(\mathbf{F}t)\|\cdot\|\mathbf{x}(0)\|. \tag{3}$$

Так как матрица $\mathbf{F}$ – простой структуры, то для нее оказывается справедливой модальное представление [8] в форме $\mathbf{F}=\mathbf{M}\mathbf{\Lambda}\mathbf{M}^{-1}$, где $\mathbf{M}=row\left\{\mathbf{M}_i;i=\overline{1,n}\right\}$ – матрица собственных векторов матрицы $\mathbf{F}$ такая, что выполняется соотношение $\mathbf{F}\mathbf{M}_i=\lambda_i\mathbf{M}_i$; $\mathbf{\Lambda}=diag\left\{\lambda_i;i=\overline{1,n}\right\}$. Свойство матричной функции от матрицы сохранять модальное представление позволяет записать:

$$\exp(\mathbf{F}t)=\mathbf{M}\exp(\mathbf{\Lambda}t)\mathbf{M}^{-1}=\mathbf{M}diag\left\{e^{\lambda_i t};i=\overline{1,n}\right\}\mathbf{M}^{-1}. \tag{4}$$

Подстановка (4) в (3) дает

$$\|\mathbf{x}(t)\|\leq\left\|\mathbf{M}diag\left\{e^{\lambda_i t};i=\overline{1,n}\right\}\mathbf{M}^{-1}\right\|\cdot\|\mathbf{x}(0)\|\leq\|\mathbf{M}\|\cdot\left\|diag\left\{e^{\lambda_i t};i=\overline{1,n}\right\}\right\|\cdot\left\|\mathbf{M}^{-1}\right\|\cdot\|\mathbf{x}(0)\|.$$

Учтем, что мультипликативная конструкция $\|\mathbf{M}\|\cdot\|\mathbf{M}^{-1}\|$ представляет собой число обусловленности [9, 10] $C\{\mathbf{M}\}$ матрицы собственных векторов матрицы $\mathbf{F}$ так, что выполняется равенство $C\{\mathbf{M}\}=\|\mathbf{M}\|\cdot\|\mathbf{M}^{-1}\|$; $\left\|diag\left\{e^{\lambda_i t};i=\overline{1,n}\right\}\right\|=e^{\lambda_M t}$, где λ_M – максимальное собственное число матрицы $\mathbf{F}$, определяющее степень устойчивости η системы (1) в форме $\eta=|\lambda_M|$. Изложенное выше позволяет сформировать экспоненциальное покрытие $\sup\{\|\mathbf{x}(t)\|\}$ процесса $\|\mathbf{x}(t)\|$, степень достаточности которого будет определяться числом обусловленности $C\{\mathbf{M}\}$ матрицы собственных векторов матрицы $\mathbf{F}$, которые ищутся с точностью до их нормы. Таким образом, число обусловленности $C\{\mathbf{M}\}$ матрицы будет минимальным, если матрица собственных векторов составлена из векторов единичной нормы [9, 10]. Тогда экспоненциальное покрытие $\sup\{\|\mathbf{x}(t)\|\}$ процесса $\|\mathbf{x}(t)\|$ минимальной достаточности удовлетворяет соотношениям

$$\|\mathbf{x}(t)\|\leq\sup\{\|\mathbf{x}(t)\|\}=C\{\tilde{\mathbf{M}}\}e^{\lambda_M t}\|\mathbf{x}(0)\|, \tag{5}$$

где матрица $\tilde{\mathbf{M}}$ – модифицированная матрица собственных векторов матрицы $\mathbf{F}$, т.е. матрица ее собственных векторов единичной нормы, вычисляемая в силу соотношения $\tilde{\mathbf{M}}=\mathbf{M}\cdot diag\left\{\left(\|\mathbf{M}_i\|_2\right)^{-1};i=\overline{1,n}\right\}$.

Очевидно, что покрытие $\|\mathbf{x}(t)\|$ процесса по норме автономной системы, стартующего из точки $\{\|\mathbf{x}(0)\|, t=0\}$, превышает это значение в $C\{\tilde{\mathbf{M}}\}$ раз, оставаясь экспоненциальным. Это значит, что покрытие $\sup\{\|\mathbf{x}(t)\|\}$ покрывает процесс $\|\mathbf{x}(t)\|$, характеризующийся наличием выброса при асимптотическом стремлении к нулю.

Форма (5) предоставляет возможность исследовать чувствительность траекторий по норме вектора состояний к вариациям параметров матрицы $\mathbf{F}$ состояния системы вида (1), тем самым решая задачу оценки робастности отклонений траекторий свободного движения апериодических систем.

Рассмотрим ситуацию, когда параметры матрицы состояния линейно зависят от компонентов вектора варьируемых стационарных параметров $\mathbf{q}=\mathbf{q}_0+\Delta\mathbf{q}, \mathbf{q}\in R^P$, где $\mathbf{q}_0$ – вектор номинальных значений параметров $\mathbf{q}$, $\Delta\mathbf{q}$ – их вариация (изменение). Тогда матрица состояния $\mathbf{F}(\mathbf{q})$ порождает зависимость от этого вектора и всех компонентов покрытия (5) так, что становится справедливой следующая запись:

$$\|\mathbf{x}(t,\mathbf{q})\| \le \sup\{\|\mathbf{x}(t,\mathbf{q})\|\} = C\{\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\} e^{\lambda_M(\mathbf{q})t} \|\mathbf{x}(0)\|. \quad (6)$$

Введем в рассмотрение ν-ю функцию $\theta_\nu(t)$ чувствительности покрытия (6) к изменению ν-го компонента вектора параметров $\mathbf{q}_\nu$, определив ее с помощью выражения

$$\theta_\nu(t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_\nu}\left(\sup\{\|x(t,\mathbf{q})\|\}\right)\Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_\nu} C\{\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\}\Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} e^{\lambda_M t} + C\{\tilde{\mathbf{M}}\} e^{\lambda_M t} \frac{\partial \lambda_M}{\partial \mathbf{q}_\nu}\Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} t\right)\|\mathbf{x}(0)\|. \quad (7)$$

Основной проблемой вычисления функции чувствительности $\theta_\nu(t)$ покрытия (6) с помощью формулы (7) является вычисление производной от числа обусловленности модифицированной матрицы собственных векторов, которое в силу определения задается соотношением $C\{\tilde{\mathbf{M}}\} = \|\tilde{\mathbf{M}}\|\cdot\|\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\|$ так, что значение числа обусловленности зависит от выбранной матричной нормы. Известно [8, 9], что если воспользоваться спектральной матричной нормой, то она численно совпадает с максимальным сингулярным числом этой матрицы, а норма обратной матрицы совпадает с величиной обратной минимальному сингулярному числу, что позволяет записать

$$C\{\tilde{\mathbf{M}}\} = \|\tilde{\mathbf{M}}\|\cdot\|\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\| = \alpha_M\{\tilde{\mathbf{M}}\}\cdot\alpha_m^{-1}\{\tilde{\mathbf{M}}\}, \quad (8)$$

где $\alpha_M\{\tilde{\mathbf{M}}\}, \alpha_m\{\tilde{\mathbf{M}}\}$ – соответственно максимальное и минимальное сингулярные числа матрицы $\tilde{\mathbf{M}}$. Если в (8) учесть зависимость матрицы $\tilde{\mathbf{M}}$ от вектора параметров $\mathbf{q}$, то получим представление $C\{\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\} = \alpha_M\{\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\}\cdot\alpha_m^{-1}\{\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\}$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_\nu} C\{\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\}\Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_\nu}\alpha_M\{\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\}\Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0}\cdot\alpha_m^{-1}\{\tilde{\mathbf{M}}\} - \alpha_M\{\tilde{\mathbf{M}}\}\alpha_m^{-2}\{\tilde{\mathbf{M}}\}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_\nu}\alpha_m\{\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\}\Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0}.$$

Функция параметрической чувствительности $\theta_\nu(t)$ будет вычислена, если будут вычислены функции чувствительности сингулярных чисел матрицы собственных векторов и функции чувствительности собственного числа матрицы состояния системы (1) [5].

Для полного приращения $\Delta\sup\{\|\mathbf{x}(t), \mathbf{q}_0, \Delta\mathbf{q}\|\}$ покрытия (5) процессов по норме вектора состояния системы (1) можно записать

$$\Delta\sup\{\|\mathbf{x}(t), \mathbf{q}_0, \Delta\mathbf{q}\|\} = \sum_{\nu=1}^{p}\theta_\nu(t,\mathbf{q}_0)\Delta q_\nu = \boldsymbol{\theta}^T(t,q_0)\cdot\Delta\mathbf{q}, \quad (9)$$

где $\boldsymbol{\theta}^T(t,\mathbf{q}_0) = row\{\theta_\nu(t,\mathbf{q}_0); \nu=\overline{1,p}\}$. Очевидно, что варьируемое покрытие представляет собой аддитивную композицию (5) и (9).

Литература

1. Vunder N.A., Ushakov A.V. Peaks emergence conditions in free movement trajectories of linear stable systems // Proc. 13th Int. Conf. on Informatics in Control, Automation and Robotics. 2016. V. 1. P. 535–538. doi: 10.5220/0005984605350538
2. Фельдбаум А.А. О распределении корней характеристического уравнения системы регулирования // Автоматика и телемеханика. 1948. № 4. С. 253–279.
3. Whidborne J., McKernan J. On the minimization of maximum

References

1. Vunder N.A., Ushakov A.V. Peaks emergence conditions in free movement trajectories of linear stable systems. *Proc. 13th Int. Conf. on Informatics in Control, Automation and Robotics*, 2016, vol. 1, pp. 535–538. doi: 10.5220/0005984605350538
2. Fel'dbaum A.A. On the distribution of the roots of the characteristic equation of a control system. *Avtomatika i Telemekhanika*, 1948, no. 4, pp. 253–279. (in Russian)

transient energy growth // IEEE Transactions on Automatic Control. 2007. V. 52. N 9. P. 1762–1767. doi: 10.1109/TAC.2007.900854
4. Polyak B.T., Smirnov G. Large deviations for non-zero initial conditions in linear systems // Automatica. 2016. V. 74. P. 297–307. doi: 10.1016/j.automatica.2016.07.047
5. Никифоров В.О., Слита О.В., Ушаков А.В. Интеллектуальное управление в условиях неопределенности. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2011. 231 с.
6. Perkins W.R., Cruz J.B., Gonzales R.L. Design of minimum sensitivity systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1968. V. 13. N 2. P. 159–167. doi: 10.1109/tac.1968.1098853
7. Cacuci D.G., Fang R. Sensitivity and uncertainty analysis of counter-flow mechanical draft cooling towers - I: Adjoint sensitivity analysis // Nuclear Technology. 2017. V. 198. N 2. P. 85–131. doi: 10.1080/00295450.2017.1294429
8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 560 с.
9. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. 548 с.
10. Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970. 565 с.

3. Whidborne J., McKernan J. On the minimization of maximum transient energy growth. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, vol. 52, no. 9, pp. 1762–1767. doi: 10.1109/TAC.2007.900854
4. Polyak B.T., Smirnov G. Large deviations for non-zero initial conditions in linear systems. *Automatica*, 2016, vol. 74, pp. 297–307. doi: 10.1016/j.automatica.2016.07.047
5. Nikiforov V.O., Slita O.V., Ushakov A.V. *Intellectual Control under Uncertainty*. St. Petersburg, SPbSU ITMO Publ., 2011, 231 p. (in Russian)
6. Perkins W.R., Cruz J.B., Gonzales R.L. Design of minimum sensitivity systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1968, vol. 13, no. 2, pp. 159–167. doi: 10.1109/tac.1968.1098853
7. Cacuci D.G., Fang R. Sensitivity and uncertainty analysis of counter-flow mechanical draft cooling towers - I: Adjoint sensitivity analysis. *Nuclear Technology*, 2017, vol. 198, no. 2, pp. 85–131. doi: 10.1080/00295450.2017.1294429
8. Gantmakher F.R. *Matrix Theory*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010, 560 p.
9. Golub G.H., Van Loan C.F. *Matrix Computations*. Baltimore, Johns Hopkins University Press, 1996, 728 p.
10. Wilkinson J.H. *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Oxford, Clarendon Press, 1965, 662 p.

Авторы

Вундер Нина Александровна – аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Scopus ID: 57151208300, ORCID ID: 0000-0003-1201-4816, polinova_nina@mail.ru

Дударенко Наталия Александровна – кандидат технических наук, доцент, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Scopus ID: 36662185600, ORCID ID: 0000-0002-3553-0584, dudarenko@mail.ifmo.ru

Authors

Nina A. Vunder – postgraduate, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Scopus ID: 57151208300, ORCID ID: 0000-0003-1201-4816, polinova_nina@mail.ru

Natalia A. Dudarenko – PhD, Associate Professor, Associate Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Scopus ID: 36662185600, ORCID ID: 0000-0002-3553-0584, dudarenko@mail.ifmo.ru