

УДК 621.3

## РАЗРАБОТКА ОСЦИЛЛЯТОРА МАЛЫХ УГЛОВЫХ КОЛЕБАНИЙ

М.М. Буслаева

Осциллятор – физическая система, совершающая колебания. В статье приводятся результаты проектирования и расчета параметров осциллятора малых угловых колебаний. В процессе проведения исследований рассмотрены типы упругих подвесов для подвижной части системы, в рассматриваемом случае – стального диска, даны рекомендации по их выбору и расчету, а также приведены выбор и основные расчетные соотношения для разработки электроприводного устройства осциллятора. Разработка осциллятора проводилась в рамках НИР по проектированию модуляционного датчика горения – быстродействующего устройства обнаружения пламени.

**Ключевые слова:** малые угловые перемещения, механический резонанс, упругий подвес, электромагнитный привод.

## Введение

В технике используются устройства, в которых присутствуют угловые колебания малой амплитуды (сотые доли радиана и менее). Это, например, высокоточные оптико-механические системы, в частности, системы сканирования изображений с малым углом обзора и оптико-механические модуляторы, астронавигационные системы ориентации по звездам, камертонные генераторы (акустическая техника), высокостабильные электромеханические эталоны частоты и времени, датчики систем инерциальной навигации. При этом частоты колебаний таких осцилляторов могут быть значительными и составлять десятки – сотни герц при углах десятые – сотые доли радиана.

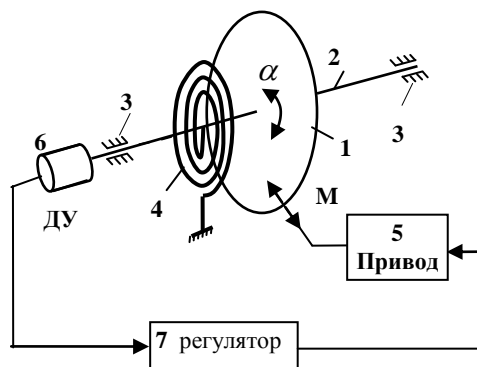


Рис. 1. Структурно-функциональная схема автогенератора с электромеханическим осциллятором

Рассмотрим автогенератор с электромеханическим осциллятором малых угловых колебаний, структурно-функциональная схема которого представлена на рис. 1. Здесь осциллятор состоит из стального диска 1, закрепленного на валу 2, установленном в подшипниках 3 и соединенном с основанием через упругую связь 4. Движение диска 1 сообщает привод 5, который вместе с датчиком угла поворота 6 и усилителем 7 образует замкнутую автоматическую систему управления колебаниями диска 1, обеспечивающую заданную амплитуду его непрерывных колебаний относительно нейтрального положения.

Из теории высокочастотных колебательных систем известно, что наилучших энергетических соотношений, наибольшей долговечности и стабильности работы системы можно достичь на резонансной частоте колебательного звена, в данном случае образованного диском 1 и упругим элементом 4. Дальнейшие расчеты, представленные в статье, опираются на это условие.

### Выбор типа закрепления подвижного элемента осциллятора

Для случая малых колебаний целесообразно отказаться от подшипников как таковых, используя упругий подвес подвижного элемента. Это позволит увеличить срок службы механической части системы (рис. 1), точность и стабильность ее работы. При этом конструкция подвеса должна обеспечивать определенную податливость по рабочей степени свободы диска 1 – вращению вокруг оси симметрии – и высокую жесткость по остальным пяти степеням свободы. Такими свойствами в разной степени обладают, в частности, подвесы с применением плоских пружин (рис. 2). Здесь в точке  $O$  механическая ось диска жестко скреплена с плоской пружиной, и подразумевается, что с противоположной стороны диска (по отношению к плоскости рисунка) имеется аналогичное упругое закрепление. Следует отметить, что для малых углов поворота диска вокруг своей оси смещение его центра вращения в случаях (а) и (б) будет пренебрежимо малым.

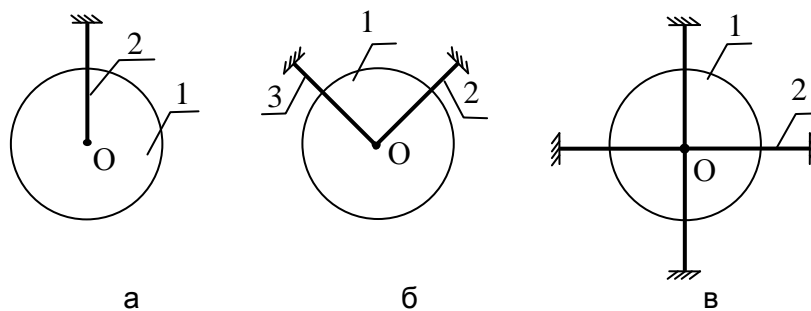


Рис. 2. Схемы упругого закрепления стального диска: а – на плоской пружине, б – упругий подвес уголкового типа, в – упругий подвес с крестообразным креплением

Отметим также, что подвес типа (а) относительно податлив для двух нежелательных степеней свободы, что легко устраняется применением уголкового либо крестообразного подвеса (рис. 2, б, в). При этом крестообразный подвес (рис. 2, в) имеет при прочих равных параметрах большую жесткость, чем подвесы по рис. 2, а, б. Для увеличения жесткости по осевому направлению можно ввести дополнительную растяжку струной вдоль оси вращения диска.

Вообще, струны и торсионы используют для упругого закрепления элементов наряду с плоскими пружинами. Например, в схеме рис. 2, в, плоские пружины 2 вполне могут быть заменены струнами с учетом упомянутой выше дополнительной растяжки вдоль оси вращения. В этом случае требуемая жесткость системы по рабочей степени свободы обеспечивается исключительно силами натяжения струн, что ограничивает точность поддержки данного параметра, а, значит, и точность задания частоты собственных колебаний осциллятора.

Применяя к движению диска с моментом инерции  $J$  основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси, получаем следующее дифференциальное уравнение колебаний, происходящих под действием вращающего момента  $M$ , создаваемого приводом:

$$J \cdot \alpha'' + k_d \cdot \alpha' + c \cdot \alpha = M ,$$

где  $J = m \cdot R^2 / 2$ ,  $m$  – масса диска, кг,  $R$  – радиус диска, м;  $k_d$  – коэффициент демпфирования, Нм/с<sup>-1</sup>;  $c$  – коэффициент жесткости пружины, Нм;  $\alpha$  – угол, на который поворачивается диск. Применив к данному дифференциальному уравнению преобразование Лапласа, получаем передаточную функцию в виде

$$W(p) = \frac{\alpha(p)}{M(p)} = \frac{1}{J \cdot p^2 + k_d \cdot p + c}$$

или, в соответствии со стандартной формой представления колебательного звена,

$$W(p) = \frac{\alpha(p)}{M(p)} = \frac{\frac{1}{c}}{\frac{J}{c} \cdot p^2 + \frac{k_d}{c} \cdot p + 1} = \frac{\frac{1}{c}}{T^2 \cdot p^2 + 2 \cdot T \cdot \xi \cdot p + 1},$$

где  $T = \sqrt{J/c}$  – постоянная времени переходного процесса;  $\xi = k_d/(2Tc)$  – коэффициент затухания колебаний. Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) данного звена имеет вид

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(c - J \cdot \omega^2)^2 + k_d^2 \cdot \omega^2}} = \frac{\frac{1}{c}}{\sqrt{(1 - T^2 \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot T^2 \cdot \omega^2}}.$$

Вид АЧХ при трех различных значениях коэффициента затухания колебаний  $\xi$  изображен на рис. 3.

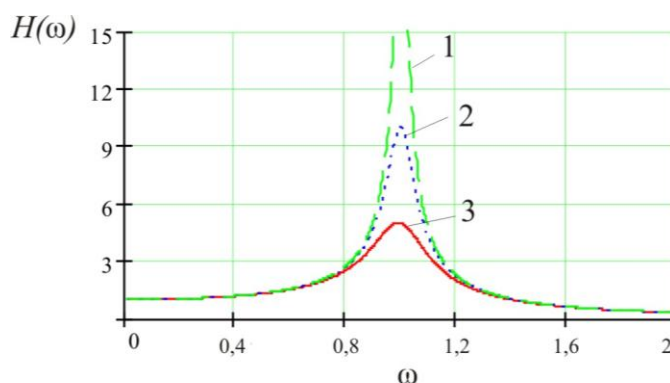


Рис. 3. АЧХ колебательных звеньев: 1 –  $\xi = 0,01$ ; 2 –  $\xi = 0,02$ ; 3 –  $\xi = 0,05$

В данном выражении частота  $\omega$  является заданной, момент инерции  $J$  рассчитан исходя из заданных размеров и материала диска, коэффициент демпфирования  $k_d$  определяется потерями на трение подвижных частей о воздух. Единственным свободным параметром здесь является жесткость  $c$ , которую логично выбирать исходя из максимума АЧХ, т.е. требуется исследовать  $H(\omega)$  на экстремум по  $c$ .

Поскольку функции  $1/x$  и  $\sqrt{x}$  – монотонные, то исследуем на экстремум подкоренное выражение в знаменателе функции  $H(\omega)$ . Приравняв его производную к нулю, получаем искомую жесткость:

$$c = J \cdot \omega^2.$$

Тогда при таком значении  $c$  функция  $H(\omega)$  примет вид

$$H(\omega) = \frac{1}{k_d \cdot \omega} = \frac{1}{2 \cdot \xi \cdot T \cdot c \cdot \omega} = \frac{1}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{J \cdot c} \cdot \omega} = \frac{1}{2 \cdot \xi \cdot J \cdot \omega^2}.$$

Если учесть, что значение  $\xi$  может составлять 0,001, то возможно увеличение энергоэффективности системы в  $\frac{1}{2 \cdot 0,001} = 500$  раз. Приблизительно значение функции  $H(\omega)$  в

области низких частот будет равно  $H(\omega) = \frac{1}{c}$ , а в области высоких частот

$H(\omega) = \frac{1}{J \cdot \omega^2}$ . Сравнивая три полученных значения функции  $H(\omega)$ , можно сделать вывод, что найденный экстремум является ее максимумом. Соответственно, для создания колебаний с амплитудой  $\alpha_m$  привод должен обеспечить момент

$$M = \alpha_m \cdot 2 \cdot \xi \cdot J \cdot \omega^2, \quad (1)$$

где  $\omega$  – резонансная частота.

### Расчет геометрических параметров упругих подвесов из плоских пружин

При расчетах упругих элементов, состоящих из плоских пружин, следует иметь в виду, что их жесткость, помимо типа сечения, определяется первыми степенями длины и ширины и кубом толщины. Поэтому искомым параметром целесообразно выбирать именно толщину пружины. В численных примерах, исходя из геометрической соразмерности упругих пружин с диском, для параметров пружин приняты следующие значения: длина  $l = 30$  мм, ширина  $b = 5$  мм.

**Расчет плоской пружины на изгиб и выбор геометрических параметров при заданной жесткости для подвеса простейшей конструкции** (рис. 2, а). Рассматривая модель плоской пружины в статике в соответствии с [1, стр. 466], имеем:

$$\lambda = \frac{4 \cdot l^3}{b \cdot h^3} \cdot \frac{P}{E}, \quad (2)$$

где  $\lambda$  – прогиб конца плоской пружины, м;  $l$  – длина плоской пружины, м;  $b$  и  $h$  – соответственно ширина и толщина плоской пружины, м;  $P=M/l$  – нагрузка на пружину, Н;  $E$  – модуль упругости первого рода для материала пружины. Можно показать, что в рассматриваемых пределах изменений углов величина угла  $\alpha$  определяется выражением

$$\lambda = \alpha_m \cdot l,$$

где  $\alpha_m$  – максимальный угол изгиба (угол поворота диска). Подставляя (1) в (2), можно получить формулу для расчета толщины пружины:

$$h = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot \xi \cdot J \cdot \omega^2 \cdot l}{E \cdot b}}. \quad (3)$$

Проведем расчет толщины плоской пружины подвеса для стального диска (радиус  $R = 25$  мм, толщина 1 мм). Заданная амплитуда угловых колебаний диска равна 0,03 рад, частота 100 Гц, материал плоских пружин – бронза бериллиевая ( $E=13,510 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>).

$$h = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 0,01 \cdot 4,7836 \cdot 10^{-6} \cdot (2 \cdot \pi \cdot 100)^2 \cdot 30 \cdot 10^{-3}}{13,51 \cdot 10^{10} \cdot 5 \cdot 10^{-3}}} \approx 0,19 \text{ мм}.$$

Полученное значение плоской пружины (0,19 мм) является вполне реализуемым с точки зрения возможности изготовления и с точки зрения требований к размерам конструкции. Однако при данном типе закрепления будет иметь место смещение оси в плоскости диска на величину  $\lambda = \alpha_m \cdot l = 0,03 \cdot 30 = 0,9$  мм, что в некоторых случаях может оказаться недопустимым.

**Расчет параметров упругих элементов уголкового типа** (рис. 2, б). Схеме упругого закрепления диска рис. 2, б соответствует кинематическая схема, изображенная на рис. 4. Поскольку плоских пружин две, то для создания амплитуды колебаний диска  $\alpha_m$  потребуется вдвое меньший момент, чем в случае крепления на одной пластине,

тогда, задаваясь ее жесткостью  $\frac{M}{\alpha_m} = \frac{1}{2} c$  (множитель 1/2 применен, поскольку всего в

конструкции имеется два одинаковых упругих подвеса уголкового типа с двух сторон

диска), можно из (3) выразить толщину  $h$  как  $h = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot l \cdot c}{2 \cdot E \cdot b}}$ , и с учетом (1) получим

$$h = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot l \cdot J \cdot \omega^2}{2 \cdot E \cdot b}}.$$

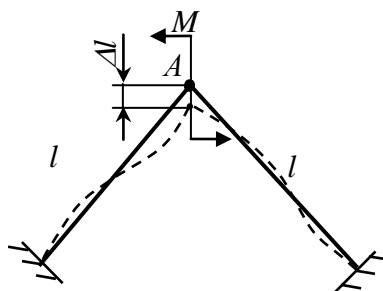


Рис. 4. Кинематическая схема упругого подвеса уголкового типа

При этом для количественной оценки отклонения центра вращения от своего начального положения может быть получено приближенное соотношение:

$$\Delta l = \frac{54 \cdot \alpha^2 \cdot J^2 \cdot \omega^4 \cdot l^5}{140 \cdot E^2 \cdot b^2 \cdot h^6}.$$

В итоге для рассматриваемого примера получим:  $h = 0,5$  мм,  $\Delta l = 0,000000156$  мм. Действительно, положение центра в этом случае можно считать практически неизменным, а геометрические параметры системы для заданной резонансной частоты 100 Гц – физически реализуемыми.

В случае необходимости существенного увеличения жесткости системы следует выбирать схему с крестообразным креплением (рис. 2, в), которая, помимо увеличения жесткости за счет самой конструкции, позволяет дополнительно увеличивать ее путем предварительного натяжения элементов. Однако в рамках решаемых в данной статье задач схема с упругим подвесом уголкового типа (рис. 2, б) вполне удовлетворяет условиям проектирования, кроме того, по сравнению со схемой рис. 2, в, остается свободным большой по площади сектор для размещения внешних дополнительных элементов, например, полюсов привода.

### Разработка приводного устройства осциллятора

Анализ показал, что среди электромеханических приводов диска наиболее эффективной является электромагнитная система с изменяющейся площадью зазора (рис. 5, на котором показана часть диска 1 в виде сектора). Пара электромагнитов 2 и 3 необходима для создания усилий в противоположных направлениях (так как электромагнитный привод может только притягивать якорь, но не отталкивать).

Известно, что электромагнитный момент  $M$  связан с энергией магнитного поля  $W_m$  через производную по угловому перемещению:

$$M(\alpha) = \frac{dW_m(\alpha)}{d\alpha}. \tag{4}$$

Можно показать, что

$$W_m = (I \cdot w)^2 \cdot G_m,$$

где  $I \cdot w$  – магнитодвижущая сила,  $A$  – число витков,  $G_m$  – магнитная проводимость, Гн.

Считая магнитную цепь ненасыщенной, имеем

$$G_m = \frac{S \cdot \mu \cdot \mu_0}{l}, \tag{5}$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения участка магнитной цепи,  $l$  – длина участка магнитной цепи,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – абсолютная магнитная проницаемость вакуума;  $\mu$  – относительная магнитная проницаемость среды распространения магнитных линий. В

данном случае для воздуха считаем  $\mu_{\text{возд}}=1$ , а проводимость магнитопровода считаем абсолютной (так как  $\mu$  для железа составляет тысячи отн. ед.), т.е. учитываем в расчетах лишь воздушный зазор.

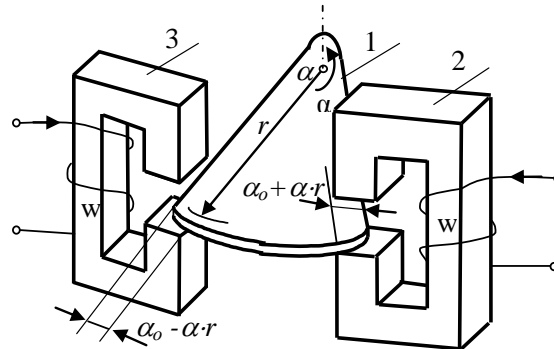


Рис. 5. Привод диска с изменяющейся площадью зазора: 1 – часть стального диска (сектор), 2 – правый привод, 3 – левый привод

Принимая во внимание, что магнитная проводимость зазора является функцией углового перемещения  $\alpha$  (см. рис. 4) и в конечном счете имеет вид

$$G_m(\alpha) = \frac{S_0 \cdot \mu \cdot \mu_0}{2} \cdot \left[ \left( 1 + \frac{2 \cdot \alpha}{\alpha_0} \right) \cdot \frac{1}{(\delta - d)} + \left( 1 - \frac{2 \cdot \alpha}{\alpha_0} \right) \cdot \frac{1}{\delta} \right], \quad (6)$$

с учетом (3) – (6) получим:

$$M = I^2 \cdot w^2 \cdot \frac{S_0 \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot d}{\alpha_0 \cdot \delta \cdot (\delta - d)},$$

где  $S_0$  – площадь полюса магнитопровода в зазоре,  $\text{м}^2$ ;  $\alpha_0$  – угловой размер полюса магнитопровода в зазоре;  $\delta$  – величина воздушных зазоров между полюсами статора привода,  $d$  – толщина диска. Отсюда, зная требуемый момент вращения  $M = M_m$ , получим требуемое значение магнитодвижущей силы:

$$I \cdot w = \sqrt{\frac{M_m \cdot \alpha_0 \cdot \delta \cdot (\delta - d)}{S_0 \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot d}}. \quad (7)$$

С другой стороны, считая магнитную систему ненасыщенной, т.е. используя свойства ее линейности, можно определить м.д.с. по заданной допустимой индукции  $B_{\text{доп}}$  в магнитном зазоре, исходя из соотношений  $\Phi = B_{\text{доп}} \cdot S$  и  $\Phi = I \cdot w \cdot G_m$  в виде  $I \cdot w = \frac{B_{\text{доп}} \cdot S}{G_m}$ .

Тогда, учитывая, что максимальное значение индукции имеет место в части зазора, перекрытой сектором диска, получим:

$$I \cdot w = \frac{B_{\text{доп}} \cdot (\delta - d)}{\mu_0}. \quad (8)$$

Проанализировав выражения (7) и (8), приходим к выводу, что из них целесообразно определять размеры полюса магнитопровода по его площади  $S_0$ , предварительно задавшись размерами  $\delta$  и  $d$  и выбрав  $\alpha_0$  соразмерно с амплитудой колебаний диска  $\alpha_m$ . Соответственно,

$$S_0 = \frac{M \cdot \alpha_0 \cdot \delta \cdot \mu_0}{B_{\text{доп}}^2 \cdot d \cdot \mu \cdot (\delta - d)}. \quad (9)$$

После определения всех размеров магнитопровода следует рассчитать размеры обмотки, создающей заданную магнитодвижущую силу  $I \cdot w$ . Задаваясь плотностью тока  $j_{\text{доп}}$ ,

можно определить площадь меди в обмотке,  $Q = \frac{I \cdot w}{j_{\text{доп}}}$ , которую подходящим образом

(исходя из конструктивных особенностей) можно разбить на ширину обмотки  $b_{\text{обм}}$  и толщину намотки  $h_{\text{обм}}$  с учетом коэффициента ее заполнения медью  $K_{\text{зап}}$  так, чтобы вы-

полнилось соотношение  $b_{\text{обм}} \cdot h_{\text{обм}} = \frac{Q}{K_{\text{зап}}} = \frac{I \cdot w}{j_{\text{доп}} \cdot K_{\text{зап}}}$ . Далее, если задано максимальное

напряжение, прилагаемое к обмотке управления  $U_m$ , то в принципе можно определить диаметр провода  $d_{\text{пр}}$  так, чтобы, будучи уложенным в обмотку сечением  $b_{\text{обм}} \times h_{\text{обм}}$  с учетом суммарной его длины, он имел бы сопротивление  $R = U_m/I$ . При этом индуктивным сопротивлением обмотки можно пренебречь.

Оценим применимость данных принципов расчета привода для рассматриваемого числового примера. Исходя из принципа соразмерности геометрических параметров проектируемого привода и диска и задавшись для численного примера значениями параметров  $\delta = 1,4$  мм;  $d = 1$  мм;  $\alpha_0 = 0,08$  рад;  $B_{\text{доп}} = 0,8$  Тл;  $j = 5 \cdot 10^6$  А/м, по (8) находим  $I \cdot w = 254,777$  ампер-витков. По (9) находим  $S_0 = 31,1$  мм<sup>2</sup>,  $b_{\text{обм}} \times h_{\text{обм}} = 72,8$  мм<sup>2</sup> ( $K_{\text{зап}} = 0,7$ ). Например, размеры магнитного полюса  $S_0 = 5$  мм  $\times$  6,22 мм = 31,1 мм<sup>2</sup>, а сечение обмотки  $Q = 8$  мм  $\times$  9,1 мм. Исходя из полученных значений и задавая максимальное напряжение питания равным, например,  $U_m = 5$  В, при токе  $I = 0,17$  А (материал провода обмотки – медь, сопротивление обмотки 29,4 Ом), получаем следующие параметры обмотки:  $d_{\text{пр}} = 0,25$  мм,  $S_{\text{пр}} = 0,0491$  мм<sup>2</sup>,  $w = Q/S_{\text{пр}} = 1483$  витка. При этом индуктивное сопротивление обмотки составляет примерно  $1,97 \cdot 10^{-10}$  Гн, что подтверждает пренебрежимо малую величину индуктивного сопротивления.

В целом результаты проведенных расчетов показывают принципиальную реализуемость конструкции предложенного привода.

### Заключение

Полученные в ходе расчетов значения геометрических размеров упругого подвеса, геометрических размеров полюсов привода, электрических и геометрических параметров обмотки подтверждают реализуемость предложенной конструкции упругого подвеса подвижного элемента осциллятора и привода, а также методики расчета их элементов. Поскольку в статье рассматриваются угловые перемещения существенно малой амплитуды по сравнению с  $2\pi$  рад, то целесообразно привод выполнить многополюсным. Например, для  $\alpha_m = 0,03$  рад, принимая 3-кратный запас для полюсов привода и элементов конструкции на краю диска по его периметру, получим  $2\pi/(3 \cdot 0,03) = 70$  пар полюсов. Соответственно, эффективность привода может быть повышена в 70 раз.

Описанный в статье осциллятор был использован при проектировании модуляционного датчика пламени, что позволило увеличить его быстродействие с единиц секунд до сотых долей секунды.

### Литература

1. Справочник конструктора точного приборостроения / Г.А. Веркович, Е.Н. Головенкин, В.А. Голубков и др.; Под общ. ред. К.Н. Явленского, Б.П. Тимофеева, Е.Е. Чаадаевой. – Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1989. – 792 с.
2. Андреева Л.Е. Упругие элементы приборов. – М.: Машгиз, 1981. – 391 с.
3. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. – 9-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1996. – 638 с.

*Буслаева Маргарита Михайловна* – Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева, аспирант, margo\_busl@mail.ru