

АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ И РОБОТОТЕХНИКА
AUTOMATIC CONTROL AND ROBOTICS

doi: 10.17586/2226-1494-2023-23-3-455-464

УДК 62-50

Анализ частотно-робастных многомерных динамических систем

Роман Оморович Оморов¹, Акылай Акунова², Таалайбек Абакирович Акунов³✉^{1,2,3} Институт машиноведения и автоматизации Национальной академии наук Кыргызской Республики, Бишкек, 720071, Кыргызская Республика¹ romano_ip@list.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3555-1323>² aakunova@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0684-4063>³ takunov@mail.ru✉, <https://orcid.org/0000-0002-0923-9777>

Аннотация

Введение. Рассмотрена задача исследования чувствительности эллипсоидных частотных показателей качества многомерных динамических систем к вариациям параметров. **Метод.** Для решения задачи использован аппарат функций чувствительности экстремальных элементов сингулярного разложения вещественнозначных передаточных матриц. **Основные результаты.** Совместное использование аппарата частотной чувствительности с методом пространства состояний позволило построить модели чувствительности. На основе полученных моделей определены эллипсоидные оценки функций частотной чувствительности по состоянию, выходу и ошибке линейных многомерных непрерывных систем в форме мажорант и минорант этих функций. Для вычислений применено сингулярное разложение матриц, составленных из функций частотной параметрической чувствительности. Полученные эллипсоидные оценки благодаря содержательным возможностям сингулярного разложения матриц обладают свойством минимальной достаточности. Такой подход позволяет использовать элементы левого сингулярного базиса, соответствующих экстремальным сингулярным числам, для выделения в пространствах состояния, выхода и ошибки подпространства, характеризующиеся для каждого значения частоты наибольшей и наименьшей по норме вариацией амплитудно-частотной характеристики. Использование правого сингулярного базиса дало возможность в пространстве параметров выделить подпространства, порождающие наибольшую и наименьшую по норме вариацию амплитудно-частотной характеристики. **Обсуждение.** Предложенный подход решил проблему «оптимального номинала — выбора номинального значения вектора первичных физических параметров агрегатов объекта управления, доставляющих многомерному управляемому процессу наименьшее значение эллипсоидных оценок функций частотной чувствительности. К таким параметрам относятся: размеры различных деталей и характеристики точности их изготовления, физические свойства материалов, а также различные величины, определяющие их конструктивное исполнение. Подход позволил осуществить сравнение протекания многомерных управляемых процессов по эллипсоидным оценкам частотной параметрической чувствительности.

Ключевые слова

линейная многомерная система, эллипсоидная оценка, частотная параметрическая чувствительность, модель чувствительности, сингулярное разложение

Ссылка для цитирования: Оморов Р.О., Акунова А., Акунов Т.А. Анализ частотно-робастных многомерных динамических систем // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2023. Т. 23, № 3. С. 455–464. doi: 10.17586/2226-1494-2023-23-3-455-464

Analysis of frequency-robust multivariable dynamical systems

Roman O. Omorov¹, Akylai Akunova², Taalalibek A. Akunov³✉^{1,2,3} Machinery Researching and Automatics Institute of Kyrgyz Republic National Academy of Sciences, Bishkek, 720071, Kyrgyz Republic¹ romano_ip@list.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3555-1323>² aakunova@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0684-4063>³ takunov@mail.ru✉, <https://orcid.org/0000-0002-0923-9777>

© Оморов Р.О., Акунова А., Акунов Т.А., 2023

Abstract

We consider the problem of studying the sensitivity of ellipsoidal frequency estimates of quality of multivariable dynamic systems to parameter variations. To solve the problem, we use the apparatus of sensitivity functions of extreme elements of singular value decomposition of real-valued transfer matrices. The joint usage of the apparatus of frequency sensitivity with the method of state space allowed us to construct the models of sensitivity. On the basis of the obtained models, the ellipsoidal estimates of the frequency sensitivity functions for the state, output and error of linear multivariable continuous systems in the form of the majorant and minorant of these functions have been determined. The singular value decomposition of matrices composed of frequency parametric sensitivity functions has been applied to the calculations. The obtained ellipsoidal estimates have the property of minimum sufficiency due to the substantial possibilities of the singular value decomposition of matrices. This approach made it possible to use the elements of the left singular basis corresponding to the extreme singular values, to select in the state, output, and error spaces the subspaces characterized for each frequency value by the largest and smallest normal variation of the amplitude-frequency response. Using the right singular basis made it possible to identify the subspaces in the parameter space which produce the largest and the smallest normal variation of the amplitude-frequency response. The proposed approach has solved the problem of the “optimal nominal” — the choice of the nominal value of the vector of primary physical parameters of the control object aggregates that deliver the smallest value of ellipsoidal estimates of the frequency sensitivity functions to the multivariable controlled process. Such parameters include: dimensions of various parts and characteristics of their manufacturing accuracy, physical properties of materials as well as various values determining their design. The approach made it possible to compare the course of multidimensional controlled processes by ellipsoidal estimates of the frequency parameter sensitivity.

Keywords

linear multivariable system, ellipsoidal estimate, frequency parametric sensitivity, sensitivity model, singular value decomposition

For citation: Omorov R.O., Akunova A., Akunov T.A. Analysis of frequency-robust multivariable dynamical systems. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2023, vol. 23, no. 3, pp. 455–464 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2023-23-3-455-464

Введение. Постановка задачи

В развитии современной теории управления наблюдается повышенный интерес [1–4] к проблемам робастности и грубости (малочувствительности) систем. Вопросам робастности, с которыми тесно связана проблема грубости, посвящены работы ученых и исследователей многих стран мира. Традиционное понимание грубости и робастности в современных научных работах определяет робастность [4, 5] как способность систем сохранять те или иные свойства не единственной системы, а множества систем, определенных тем или иным способом, а грубость как свойство систем сохранять качественную картину разбиения фазового пространства на траектории при малом возмущении топологии, при рассмотрении близких по виду уравнений систем.

Концепция подобия, используемая при конструировании частотных передаточных матриц [6–12], сводит исследование вынужденных составляющих переменных многомерной системы к анализу линейной алгебраической задачи, связывающей вектор данной переменной с вектором начального состояния источника экзогенного гармонического воздействия с помощью критериальной матрицы, параметризованной частотой воздействия. Последнее обстоятельство позволяет задачу оценки и обеспечения робастности многомерных систем при гармоническом экзогенном воздействии, под которой понимается малая чувствительность частотных показателей качества к вариациям параметров структурных компонентов систем, свести к проблеме робастности линейной алгебраической задачи. Использование сингулярного разложения частотных передаточных матриц многомерных систем позволяет на экстремальных элементах алгебраического спектра сингулярных

чисел и базисов построить мажорантные и минорантные амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) исследуемых систем по состоянию, выходу и ошибке.

Выделим постановку задачи оценки параметрической чувствительности континуума АЧХ многомерных систем управления по состоянию, выходу и ошибке. Оценка подпространств состоит из анализа максимальной и минимальной чувствительностей, для чего введены эллипсоидные оценки частотных функций чувствительности по состоянию, выходу и ошибке в виде скалярных мажорант и минорант этих функций. Конструирование оценок осуществим с использованием сингулярного разложения [13] матриц частотной чувствительности.

Предложенный подход позволит решить проблему выбора номинального значения вектора параметров (к числу которых относятся размеры деталей и характеристики точности их изготовления, физические свойства материалов, а также величины, определяющие их конструктивное исполнение) агрегатов объекта управления, доставляющих многомерному управляемому процессу наименьшее значение эллипсоидных оценок частотных функций чувствительности, а также осуществить сравнение протекания многомерных управляемых процессов по эллипсоидным оценкам частотной параметрической чувствительности. За базовый показатель частотной робастности принято частотное число обусловленности критериальной матрицы линейной алгебраической задачи, в качестве которой использована частотная передаточная матрица вход–выход многомерной системы.

Появление тенденции «робастизации» в развитии теории управления неслучайно, она продиктована необходимостью рассмотрения современных сложных систем управления (не только традиционных систем

автоматического управления, а более широкого класса синергетических систем управления различной природы) в динамике, со всеми возможными изменениями и возмущениями в реальных условиях функционирования и развития (эволюции). В настоящее время наиболее рассмотрены и решены вопросы робастной устойчивости.

Первые работы по анализу и синтезу грубых (малочувствительных) систем были связаны с развитием теории чувствительности [1]. К настоящему времени недостаточно рассмотрены вопросы построения робастных и грубых нелинейных систем управления.

При этом для инженерных применений необходимо рассмотреть и большие (конечные) возмущения, т. е. вопросы робастности и грубости в большом. Отметим, что на практике модели и параметры возмущений могут быть не только известны, но и неопределенны.

Методы частотного направления робастной устойчивости

Иследуем новый взгляд на традиционные методы и средства исследования многомерных систем управления, в особенности в частотном направлении теории робастности для многомерных систем. К их числу относятся частотные передаточные матрицы и конструируемые на их основе частотные характеристики. Задача конструирования частотных передаточных матриц решена с помощью использования концепции подобия вынужденной составляющей состояния многомерной системы и состояния источника конечномерного экзогенного воздействия. При этом матрица преобразования подобия найдена как решение матричного уравнения Сильвестра.

Рассмотрим линейную многомерную непрерывную систему

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{g}(t); \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0; \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (1)$$

где $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ — вектора состояния и выхода; $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{g}(t) - \mathbf{y}(t)$ — ошибка по выходу; $\mathbf{g}(t)$ — экзогенное конечномерное воздействие; $\mathbf{x} \in R^n$; $\mathbf{g}, \mathbf{y} \in R^m$; $\mathbf{C}^T \in R^{n \times m}$; $\mathbf{G}, \mathbf{C} \in R^{n \times m}$; $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{C}$ — матрицы состояния, входа и выхода системы (1) соответственно.

Как известно, пользователей проектируемых систем интересуют такие частотные показатели, как полоса пропускания отношения вход–выход на уровне заданного значения АЧХ, показатель колебательности, полоса пропускания отношения вход–ошибка на уровне требуемого значения относительной частотной ошибки и др.

Для конструирования частотных передаточных матриц воспользуемся положениями следующего утверждения.

Утверждение 1. Пусть $\mathbf{g}(t)$ — конечномерное задающее воздействие, которое генерируется с помощью автономной конечномерной системы минимальной размерности

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{E}\mathbf{z}(t); \mathbf{z}(0); \mathbf{g}(t) = \mathbf{P}\mathbf{z}(t); \mathbf{P}\mathbf{P}^T = \mathbf{I}; \\ \mathbf{z}(t) &= \exp(\mathbf{E}t)\mathbf{z}(0) \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mathbf{z} \in R^l$, $\mathbf{E} \in R^{l \times l}$, $\mathbf{P} \in R^{m \times l}$, $\mathbf{g} \in R^m$. Тогда справедливы выражения:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \exp(\mathbf{F}t)\mathbf{x}(0) + (\mathbf{T}\exp(\mathbf{E}t) - \exp(\mathbf{F}t)\mathbf{T})\mathbf{z}(0), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}\exp(\mathbf{F}t)\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}(\mathbf{T}\exp(\mathbf{E}t) - \exp(\mathbf{F}t)\mathbf{T})\mathbf{z}(0), \\ \boldsymbol{\varepsilon}(t) &= \mathbf{g}(t) - \mathbf{y}(t) = \\ &= (\mathbf{P} - \mathbf{C}\mathbf{T})\exp(\mathbf{E}t)\mathbf{z}(0) - \mathbf{C}\exp(\mathbf{F}t)(\mathbf{x}(0) - \mathbf{T}\mathbf{z}(0)), \end{aligned}$$

где матрица \mathbf{T} удовлетворяет матричному уравнению Сильвестра

$$\mathbf{T}\mathbf{E} = \mathbf{F}\mathbf{T} = \mathbf{G}\mathbf{P}. \quad \square \quad (3)$$

Доказательство Утверждения приведено в работах [6–8, 11, 12].

Для построения мажоранты и миноранты АЧХ по выходу $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t, \omega)$ и ошибке $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}(t, \omega)$ многомерной непрерывной системы (1) используем модельное представление (2) источника внешнего векторного гармонического воздействия с матричными компонентами

$$\mathbf{E} = \text{diag} \left\{ \mathbf{E}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}; i = \overline{1, m} \right\}; \mathbf{P} = \mathbf{I}_{m \times m} \otimes [1 \quad 0],$$

где $\mathbf{I}_{m \times m}$ — единичная ($m \times m$)-матрица; ω — частота внешнего гармонического воздействия, приложенного ко всем входам системы (1); \otimes — символ кронекеровского произведения матриц. Применим данные положения для следующего утверждения.

Утверждение 2. Мажоранты $M_{yM}(\omega)$, $\delta_M(\omega)$ и миноранты $M_{ym}(\omega)$, $\delta_m(\omega)$ АЧХ по выходу $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t, \omega)$ и ошибке $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}(t, \omega)$ многомерной непрерывной системы удовлетворяют оценочным неравенствам, принимающим для внешнего векторного гармонического воздействия вид

$$\begin{aligned} M_{ym}(\omega) &\leq \frac{\|\mathbf{y}(t, \omega)\|}{\|\mathbf{z}(0)\|} = \frac{\|\mathbf{y}(\omega)\|}{\|\mathbf{z}(0)\|} \leq M_{yM}(\omega), \forall \omega, M_{ym}(\omega), \\ &M_{yM}(\omega) \in \sigma_\alpha\{\mathbf{C}\mathbf{T}(\omega)\}, \\ \delta_m(\omega) &\leq \frac{\|\boldsymbol{\varepsilon}(t, \omega)\|}{\|\mathbf{z}(0)\|} = \frac{\|\boldsymbol{\varepsilon}(\omega)\|}{\|\mathbf{z}(0)\|} \leq \delta_M(\omega), \forall \omega, \delta_m(\omega), \\ &\delta_M(\omega) \in \sigma_\alpha\{\mathbf{P} - \mathbf{C}\mathbf{T}(\omega)\}, \end{aligned}$$

где $\sigma_\alpha\{*\}$ — алгебраический спектр сингулярных чисел матриц (*); $(\circ)_M$ и $(\circ)_m$ — максимальное и минимальное значения сингулярных чисел; $\mathbf{T}(\omega)$ — частотная передаточная матрица, которая путем решения уравнения Сильвестра (3) принимает вид

$$\mathbf{T}(\omega) = -(\omega^2\mathbf{I} + \mathbf{F}^2)^{-1} \text{row}\{\mathbf{F}\mathbf{G}_i \quad \omega\mathbf{G}_i\}; i = \overline{1, m};$$

где $\text{row}\{(\circ)_i, i = \overline{1, m}\}$ — строчная матричная структура с элементами $(\circ)_i$ в строке; ω — частота задающего внешнего векторного гармонического воздействия. \square

Доказательство Утверждения приведено в [6–9].

Мажоранты и миноранты АЧХ по выходу $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t, \omega)$ и ошибке $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}(t, \omega)$ в Утверждении 2 получим [6] с помощью сведения исследования многомерных систем управления к векторно-матрично-

му представлению, параметризованному скалярами t и ω .

$$\mathbf{k}(\tau) = \mathbf{P}(\tau)\chi(\tau), \forall \tau, \tau = t, \omega, \quad (4)$$

где $\mathbf{k} \in R^p$, $\chi \in R^v$, $\mathbf{P} \in R^{p \times v}$ — некоторая критериальная матрица; τ — принимает смысл непрерывного времени t ; ω — частоты источника внешнего гармонического воздействия.

Пусть матрица $\mathbf{P}(\tau)$ имеет в силу сингулярного разложения представление

$$\mathbf{P}(\tau) = \mathbf{U}(\tau)\mathbf{\Sigma}(\tau)\mathbf{V}^T(\tau), \quad (5)$$

где $\mathbf{\Sigma}(\tau) - (\rho \times v)$ — диагональная матрица, имеющая на главной диагонали сингулярные числа матрицы $\mathbf{P}(\tau)$; $\mathbf{U}(\tau)$ и $\mathbf{V}(\tau)$ — ортогональные матрицы $(\rho \times \rho)$ и $(v \times v)$, столбцы которых образуют левый и правый сингулярные базисы матрицы $\mathbf{P}(\tau)$. Если в (5) перейти к евклидовым векторным нормам, то становятся справедливыми оценочные неравенства

$$\alpha_m(\tau) \leq \|\mathbf{k}(\tau)\|/\|\chi(\tau)\| \leq \alpha_M(\tau), \forall \tau, \quad (6)$$

где $\alpha_m(\tau)$, $\alpha_M(\tau)$ — экстремальные элементы алгебраического спектра $\sigma_\alpha\{\mathbf{P}(\tau)\}$ сингулярных чисел матрицы $\mathbf{P}(\tau)$. Наибольшее и наименьшее сингулярные числа $\alpha_M(\tau)$, $\alpha_m(\tau)$ матрицы $\mathbf{P}(\tau)$ в (6) однозначно определяют на матрице правых сингулярных векторов $\mathbf{V}(\tau)$ те из них, которые на сфере $\|\chi(\tau)\| = \text{fix}$ отображаются в наибольшую и наименьшую полуоси эллипсоида, получаемого с помощью (4), причем длины этих полуосей $\alpha_M(\tau)\|\chi(\tau)\|$ и $\alpha_m(\tau)\|\chi(\tau)\|$ соответственно.

Таким образом, знание алгебраических спектров сингулярных чисел $M_{ym}(\omega)$, $M_{yM} \in \sigma_\alpha\{\mathbf{CT}(\omega)\}$ позволило охватить практически весь круг проблем исследования многомерных систем при гармоническом внешнем воздействии в установившемся режиме в скалярной постановке. Использование правого и левого сингулярного базисов в сингулярном разложении матриц $\mathbf{CT}(\omega)$ и $\mathbf{P-CT}(\omega)$ дало возможность получить прозрачную геометрическую интерпретацию.

Конструирование частотных передаточных матриц непрерывных многомерных систем для случая многочастотного экзогенного воздействия

Источник непрерывного многочастотного векторного гармонического воздействия (2) будет иметь в качестве матрицы состояния матрицу определенного вида для случая вещественнозначного воздействия.

Утверждение 3. Для непрерывного многочастотного вещественнозначного векторного гармонического воздействия матрица $\mathbf{T}(\Omega)$ как решение уравнения Сильвестра

$$\mathbf{T}(\Omega)\mathbf{E}(\Omega) - \mathbf{F}\mathbf{T}(\Omega) = \mathbf{G}\mathbf{P}$$

может быть записана в форме

$$\mathbf{T}(\Omega) = \text{row}\{\mathbf{T}_{2i-1} \quad \mathbf{T}_{2i}\} = \text{row}\{-(\omega_i^2\mathbf{I} + \mathbf{F}^2)^{-1}[\mathbf{F}\mathbf{G}_i \quad \omega_i\mathbf{G}_i], i = \overline{1, m}\}. \quad (7)$$

Доказательство Утверждения приведено в работах [6–8, 11, 12].

Утверждения 1–3 служат для построения мажоранты и миноранты АЧХ по выходу $y(t)$ и ошибке $\varepsilon(t)$ многомерной непрерывной системы, а также для случая многочастотного векторного гармонического воздействия. При этом исходным условием для их вычислений является сведение исследуемой проблемы к линейной алгебраической задаче вида (4), связывающей вектор начального состояния $\mathbf{z}(0)$ источника внешнего гармонического воздействия с выходом и ошибкой, а матрица, подлежащая сингулярному разложению, как указано в Утверждении 2, принимает вид СТ и Р–СТ.

Оценка робастности непрерывных многомерных систем. Частотные критерии робастности

В проблемно ориентированном виде робастность в настоящей работе понимается как малая чувствительность качества процессов в многомерных непрерывных системах к вариациям параметров их структурных элементов при векторном гармоническом внешнем воздействии.

В связи с этим исследуем параметрическую чувствительность частотных показателей качества многомерных непрерывных систем при условии, что диапазон вариаций параметров системы допускает применение аппарата теории чувствительности в пределах возможностей функций чувствительности первого порядка.

Робастность как малая чувствительность линейной алгебраической задачи

Оценки частотных характеристик многомерных непрерывных систем в форме мажорант и минорант получим с помощью сведения проблемы к линейной алгебраической задаче. Учитывая данное обстоятельство становится естественным рассмотрение робастности многомерных систем при внешнем векторном гармоническом воздействии как малой чувствительности линейной алгебраической задачи

$$\mathbf{k}(\tau, \mathbf{q}) = \mathbf{P}(\tau, \mathbf{q})\chi(0), \chi(0) = \chi(t = 0), \quad (8)$$

\mathbf{q} — p -мерный вектор изменяющихся квазистационарных параметров с номинальным значением \mathbf{q}_0 , для которого

$$\mathbf{k}(t, \omega, \mathbf{q} = \mathbf{q}_0) = \mathbf{k}(t, \omega); \mathbf{P}(t, \omega, \mathbf{q} = \mathbf{q}_0) = \mathbf{P}(t, \omega). \quad (9)$$

При гармоническом экзогенном воздействии исследование линейной алгебраической задачи (8) может быть сведено к исследованию стационарной по t задаче

$$\mathbf{k}(\omega, \mathbf{q}) = \mathbf{P}(\omega)\chi(0). \quad (10)$$

Таким образом, опираясь на описывающие линейную алгебраическую задачу соотношения (8)–(10), осуществим анализ чувствительности линейной алгебраической задачи (10) к вариации ее векторных и матричных компонентов, порождаемых вариацией $\Delta\mathbf{q}$

вектора первичных физических параметров \mathbf{q} относительно номинального значения \mathbf{q}_0 в двух постановках.

В первой постановке векторные элементы (10) представим в левом и правом сингулярных базисах матрицы $\mathbf{\Pi}(\omega)$. При этом задача исследования чувствительности (10) заключается в анализе чувствительности сингулярных чисел [14], а также элементов левого и правого сингулярных базисов $\mathbf{\Pi}(\omega)$.

Во второй постановке оценим норму приращения $\Delta\mathbf{k}(\omega)$ вектора $\mathbf{k}(\omega)$, порожденного приращениями $\Delta\mathbf{\Pi}(\omega)$ матрицы $\mathbf{\Pi}(\omega)$ и $\Delta\chi(0)$ вектора $\chi(0)$ относительно их номинальных реализаций, порожденных вариациями совокупности первичных параметров. В такой постановке переход от норм приращений к их относительным значениям имеет вид

$$\delta(\circ) \triangleq \|\Delta(\circ)\|/\|(\circ)\|,$$

который позволит оценить относительную ошибку решения линейной задачи (10) в прямой или инверсной формах с помощью числа обусловленности $C\{\mathbf{\Pi}(\omega)\}$ матрицы $\mathbf{\Pi}(\omega)$ [15, 16].

Конструирование функций чувствительности мажорантных и минорантных частотных характеристик непрерывных многомерных систем

При конструировании функций параметрической чувствительности мажорантных и минорантных частотных характеристик непрерывной многомерной системы предположим, что зависящее от вектора параметров \mathbf{q} векторно-матричное представление последней имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{q})\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{g}(t); \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(\mathbf{q})\mathbf{x}(t), \quad (11)$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{q})|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} = \mathbf{F}$; $\mathbf{G}(\mathbf{q})|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} = \mathbf{G}$; $\mathbf{C}(\mathbf{q})|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} = \mathbf{C}$.

Очевидно, зависимость от вектора параметров \mathbf{q} матричных элементов непрерывной многомерной системы (11) порождает зависимость от этого вектора мажорантных и минорантных АЧХ системы.

Ограничимся в дальнейшем АЧХ отношения вход-выход и относительной частотной ошибкой. Тогда для мажорантных и минорантных АЧХ системы (11) запишем

$$M_{yM}(\omega, \mathbf{q}) = \alpha_M \{\mathbf{\Pi}_y(\omega, \mathbf{q}) = \mathbf{C}(\mathbf{q})\mathbf{T}(\omega, \mathbf{q})\}, \quad (12)$$

$$M_{ym}(\omega, \mathbf{q}) = \alpha_m \{\mathbf{\Pi}_y(\omega, \mathbf{q}) = \mathbf{C}(\mathbf{q})\mathbf{T}(\omega, \mathbf{q})\}, \quad (13)$$

$$\delta_M(\omega, \mathbf{q}) = \alpha_M \{\mathbf{\Pi}_\varepsilon(\omega, \mathbf{q}) = \mathbf{P} - \mathbf{C}(\mathbf{q})\mathbf{T}(\omega, \mathbf{q})\}, \quad (14)$$

$$\delta_m(\omega, \mathbf{q}) = \alpha_m \{\mathbf{\Pi}_\varepsilon(\omega, \mathbf{q}) = \mathbf{P} - \mathbf{C}(\mathbf{q})\mathbf{T}(\omega, \mathbf{q})\}. \quad (15)$$

В выражениях (12)–(15) матрица $\mathbf{T}(\omega, \mathbf{q})$ является решением матричного уравнения Сильвестра

$$\mathbf{T}(\omega, \mathbf{q})\mathbf{E}(\mathbf{q}) - \mathbf{F}(\mathbf{q})\mathbf{T}(\omega, \mathbf{q}) = \mathbf{G}\mathbf{P}(\mathbf{q}). \quad (16)$$

Функции чувствительности мажорантных и минорантных частотных характеристик (12)–(15) к вариации j -го элемента \mathbf{q}_j вектора параметров \mathbf{q} в силу определения получают представления:

$$M_{yMq_j}(\omega) \triangleq \frac{\partial}{\partial q_j} M_{yM}(\omega, \mathbf{q})|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} = \frac{\partial}{\partial q_j} \alpha_M \{\mathbf{\Pi}_y(\omega, \mathbf{q})\}|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0}, \quad (17)$$

$$M_{ymq_j}(\omega) \triangleq \frac{\partial}{\partial q_j} M_{ym}(\omega, \mathbf{q})|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} = \frac{\partial}{\partial q_j} \alpha_m \{\mathbf{\Pi}_y(\omega, \mathbf{q})\}|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0}, \quad (18)$$

$$\delta_{Mq_j}(\omega) \triangleq \frac{\partial}{\partial q_j} \delta_M(\omega, \mathbf{q})|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} = \frac{\partial}{\partial q_j} \alpha_M \{\mathbf{\Pi}_\varepsilon(\omega, \mathbf{q})\}|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0}, \quad (19)$$

$$\delta_{mq_j}(\omega) \triangleq \frac{\partial}{\partial q_j} \delta_m(\omega, \mathbf{q})|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} = \frac{\partial}{\partial q_j} \alpha_m \{\mathbf{\Pi}_\varepsilon(\omega, \mathbf{q})\}|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0}. \quad (20)$$

Видно, что функции чувствительности (17)–(20) оказываются заданными на функциях чувствительности [14] элементов сингулярного разложения соответствующих критериальных матриц. Все функции (17)–(20) зависят от частоты ω внешнего гармонического воздействия $\mathbf{g}(t)$ многомерной непрерывной системы (1), а потому они справедливо могут быть названы частотными функциями чувствительности.

Алгоритм 1 оценки чувствительности мажорантных и минорантных частотных характеристик состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Решим уравнение Сильвестра при номинальном значении $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ вектора параметров относительно матрицы $\mathbf{T}(\omega)$. Выполним конструирование критериальных матриц

$$\mathbf{\Pi}_y(\omega) = \mathbf{C}\mathbf{T}(\omega); \mathbf{\Pi}_\varepsilon(\omega) = \mathbf{P} - \mathbf{C}\mathbf{T}(\omega). \quad (21)$$

Шаг 2. Осуществим конструирование сингулярных разложений матриц (21)

$$\mathbf{\Pi}_y(\omega) = \mathbf{U}(\omega)\mathbf{\Sigma}(\omega)\mathbf{V}^T(\omega); \mathbf{\Pi}_\varepsilon(\omega) = \mathbf{U}_\varepsilon(\omega)\mathbf{\Sigma}_\varepsilon(\omega)\mathbf{V}_\varepsilon^T(\omega). \quad (22)$$

Шаг 3. Вычислим матрицы чувствительности $\mathbf{\Pi}_{yq_j}(\omega)$ и $\mathbf{\Pi}_{\varepsilon q_j}(\omega)$ с помощью соотношений

$$\mathbf{\Pi}_{yq_j}(\omega) = \mathbf{C}_{q_j}\mathbf{T}(\omega) + \mathbf{C}\mathbf{T}_{q_j}(\omega); \mathbf{\Pi}_{\varepsilon q_j}(\omega) = -\mathbf{\Pi}_{yq_j}(\omega), \quad (23)$$

где $\mathbf{T}_{q_j}(\omega)$ — матрица сепаратной чувствительности вычисляется с помощью матричного уравнения Сильвестра

$$\mathbf{T}_{q_j}(\omega)\mathbf{E}(\omega) + \mathbf{F}\mathbf{T}_{q_j}(\omega) = \mathbf{G}_{q_j}\mathbf{P} + \mathbf{F}_{q_j}\mathbf{T}(\omega). \quad (24)$$

Шаг 4. Сконструируем матрицы $\mathbf{S}_{y_j}(\omega)$ и $\mathbf{S}_{\varepsilon_j}(\omega)$ исходя из соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{y_j}(\omega) &= \mathbf{U}^T(\omega)\mathbf{\Pi}_{yq_j}(\omega)\mathbf{V}(\omega); \\ \mathbf{S}_{\varepsilon_j}(\omega) &= \mathbf{U}_{\varepsilon_j}^T(\omega)\mathbf{\Pi}_{\varepsilon q_j}(\omega)\mathbf{V}_{\varepsilon_j}(\omega). \end{aligned} \quad (25)$$

Шаг 5. Выполним конструирование функций чувствительности мажорантных и минорантных АЧХ вход-выход и относительной частотной ошибки с помощью (17)–(20)

$$M_{yMq_j}(\omega) = (\mathbf{S}_{y_j}(\omega))_{MM}; M_{ymq_j}(\omega) = (\mathbf{S}_{y_j}(\omega))_{mm}. \quad (26)$$

$$\delta_{Mq_j}(\omega) = (\mathbf{S}_{\varepsilon_j}(\omega))_{MM}; \delta_{mq_j}(\omega) = (\mathbf{S}_{\varepsilon_j}(\omega))_{mm}. \quad (27)$$

Шаг 6. Вычислим конечные вариации мажорантных и минорантных частотных характеристик многомерной

непрерывной системы (1), порожденных конечной вариацией $\Delta \mathbf{q}_j$ j -го компонента \mathbf{q}_j вектора параметров \mathbf{q}

$$\Delta M_{yM_j}(\omega) = M_{yM_j}(\omega)\Delta \mathbf{q}_j; \Delta M_{ym_j}(\omega) = M_{ym_j}(\omega)\Delta \mathbf{q}_j, \quad (28)$$

$$\Delta \delta_{M_j}(\omega) = \delta_{M_j}(\omega)\Delta \mathbf{q}_j; \Delta \delta_{m_j}(\omega) = \delta_{m_j}(\omega)\Delta \mathbf{q}_j. \quad (29)$$

Замечание. В связи с тем, что существует аналогичное (7) явное вещественнозначное решение матричного уравнения Сильвестра (16)

$$\mathbf{T}(\omega, \mathbf{q}) = -(\omega^2 \mathbf{I} + \mathbf{F}^2(\mathbf{q}))^{-1} \text{row}\{[\mathbf{F}(\mathbf{q})\mathbf{G}_i(\mathbf{q}) \times \omega \mathbf{G}_i(\mathbf{q}), i = 1, m]\}, \quad (30)$$

то альтернативой вычислению матрицы сепаратной чувствительности \mathbf{T}_{q_j} в шаге 3 алгоритма с помощью решения матричного уравнения (24) является непосредственное дифференцирование (30) по \mathbf{q}_j , что дает для \mathbf{T}_{q_j} представление

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{q_j}(\omega) = & -(\omega^2 \mathbf{I} + \mathbf{F}^2)^{-1}(\mathbf{F}_j \mathbf{F} + \mathbf{F} \mathbf{F}_j) \times \\ & \times (\omega^2 \mathbf{I} + \mathbf{F}^2)^{-1} \text{row}\{[\mathbf{F} \mathbf{G}_i \quad \omega \mathbf{G}_i], i = 1, m\} - \\ & - (\omega^2 \mathbf{I} + \mathbf{F}^2)^{-1} \text{row}\{[\mathbf{F}_j \mathbf{G}_i + \mathbf{F} \mathbf{G}_j \quad \omega \mathbf{G}_j], i = 1, m\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Заметим, что полученные частотные функции чувствительности непрерывных многомерных систем (31) содержательно подобны функциям траекторной чувствительности во временной области [17].

Чувствительность линейной алгебраической задачи к вариациям совокупности параметров. Частотные числа обусловленности

Рассмотрим возмущение линейной алгебраической задачи, порожденное приращением $\Delta \mathbf{q}$ совокупности первичных физических параметров, приводящих к вариации $\Delta \mathbf{\Pi}(t, \omega, \mathbf{q}_0, \Delta \mathbf{q})$ матрицы $\mathbf{\Pi}(t, \omega, \mathbf{q}_0) \triangleq \mathbf{\Pi}(t, \omega)$, а также приращением $\Delta \chi(0)$ вектора $\chi(0)$ начального состояния источника экзогенного гармонического воздействия. Вариации $\Delta \mathbf{\Pi}(t, \omega, \mathbf{q}_0, \Delta \mathbf{q})$ и $\Delta \chi(0)$ порождают вариацию $\Delta \mathbf{\kappa}(t, \omega)$, определяемую векторно-матричным соотношением

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{\kappa}(t, \omega) = & \Delta \mathbf{\Pi}(t, \omega, \mathbf{q}_0, \Delta \mathbf{q})\chi(0) + \\ & + \mathbf{\Pi}(t, \omega)\Delta \chi(0) + \Delta \mathbf{\Pi}(t, \omega, \mathbf{q}_0, \Delta \mathbf{q})\Delta \chi(0). \end{aligned} \quad (32)$$

Переход в (32) к соотношению по согласованным матричным и векторным нормам приводит к неравенству

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{\kappa}(t, \omega)\| \leq & \|\Delta \mathbf{\Pi}(t, \omega, \mathbf{q}_0, \Delta \mathbf{q})\| \cdot \|\chi(0)\| + \\ & + \|\mathbf{\Pi}(t, \omega)\| \cdot \|\Delta \chi(0)\| + \|\Delta \mathbf{\Pi}(t, \omega, \mathbf{q}_0, \Delta \mathbf{q})\| \cdot \|\Delta \chi(0)\|. \end{aligned} \quad (33)$$

Введем в рассмотрение относительные значения вариаций векторных и матричных компонентов линейной задачи (33), определив их соотношениями

$$\begin{aligned} \delta_{\kappa}(t, \omega) \triangleq & \frac{\|\Delta \mathbf{\kappa}(t, \omega)\|}{\|\mathbf{\kappa}(t, \omega)\|}; \delta_{\chi}(0) \triangleq \frac{\|\Delta \chi(0)\|}{\|\chi(0)\|}, \\ \delta_{\Pi}(t, \omega) \triangleq & \frac{\|\Delta \mathbf{\Pi}(t, \omega, \mathbf{q}_0, \Delta \mathbf{q})\|}{\|\mathbf{\Pi}(t, \omega)\|}. \end{aligned} \quad (34)$$

Сформулируем на основе рассмотрения номинальной версии линейной алгебраической задачи оценку

$$\|\Delta \mathbf{\kappa}(t, \omega)\| \geq \frac{\|\chi(0)\|}{\|\mathbf{\Pi}^+(t, \omega)\|}, \quad (35)$$

где $(\circ)^+$ — матрица псевдообратная исходной (\circ) .

Видно, что выражения (33)–(35) позволяют сконструировать оценку

$$\begin{aligned} \delta_{\kappa}(t, \omega) \leq & \|\mathbf{\Pi}(t, \omega)\| \cdot \|\mathbf{\Pi}^+(t, \omega)\| \{\delta_{\chi}(0) + \\ & + \delta_{\Pi}(t, \omega) + \delta_{\chi}(0)\delta_{\Pi}(t, \omega)\}. \end{aligned} \quad (36)$$

Мультипликативная конструкция из матричных норм $\|\mathbf{\Pi}(t, \omega)\| \cdot \|\mathbf{\Pi}^+(t, \omega)\|$ представляет собой число обусловленности $C\{\mathbf{\Pi}(t, \omega)\}$ матрицы $\mathbf{\Pi}(t, \omega)$. В связи с этим, используя обозначения

$$C\{\mathbf{\Pi}(t, \omega)\} \triangleq \|\mathbf{\Pi}(t, \omega)\| \cdot \|\mathbf{\Pi}^+(t, \omega)\|, \quad (37)$$

неравенство (36) запишем в виде

$$\begin{aligned} \delta_{\kappa}(t, \omega) \leq & C\{\mathbf{\Pi}(t, \omega)\} \times \\ & \times \{\delta_{\chi}(0) + \delta_{\Pi}(t, \omega) + \delta_{\chi}(0)\delta_{\Pi}(t, \omega)\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Неравенство (38) определяет число обусловленности критериальной матрицы $\mathbf{\Pi}(t, \omega)$ линейной алгебраической задачи, как один из скалярных неинвариантов представляет собой коэффициент усиления относительных погрешностей при возмущении векторных и матричных компонентов линейной задачи. Величина числа обусловленности учитывает его определение (37) и зависит от используемых матричных норм. Причем выбор этих норм и степень их согласованности с векторными нормами определяет уровень достаточности оценки, задаваемой в форме (38). Наименьшую степень достаточности доставляет композиция спектральных матричных и евклидовых векторных норм. В работе использована данная композиция согласованных норм.

Если в дальнейшем ограничиваться входными–выходными отношениями непрерывной многомерной системы (1), то $\mathbf{\Pi}(\omega)$ оказывается частотной передаточной матрицей этого отношения. Экстремальные элементы ее алгебраического спектра сингулярных чисел являются мажорантной $M_{yM}(\omega)$ и минорантной $M_{ym}(\omega)$ АЧХ этого отношения. В связи со сказанным введем в рассмотрение число обусловленности $C_y(\omega)$ отношения вход–выход (частотной передаточной матрицы вход–выход), определенное соотношением

$$C_y(\omega) \triangleq \frac{M_{yM}(\omega)}{M_{ym}(\omega)}.$$

Отметим, что частотное число обусловленности $C_y(\omega)$ отношения вход–выход многомерных систем как функция частоты ω — элемент функционального пространства $L^p_{\Delta\Omega}$, где $p \rightarrow \infty$, $\Delta\Omega = [\omega: 0 \leq \omega \leq \infty]$ для непрерывных систем. Норма $\|C_y(\omega)\|_{p \rightarrow \infty}$ частотного числа обусловленности как элемента функционального пространства определим соотношением

$$\|C_y(\omega)\|_{\infty} = \sup_{\omega \in \Delta\Omega} C_y(\omega).$$

Дадим геометрическую интерпретацию, опираясь на линейную алгебраическую задачу (8), числу обусловленности отношения вход–выход. Матрица $\mathbf{P}(\tau, \omega)$ отображает сферу $\|\chi(0)\| = \text{const}$ в пространстве R^v в эллипсоид с полуосями длины $M_{yM}(\omega)\|\chi(0)\|$ и $M_{ym}(\omega)\|\chi(0)\|$ в пространстве R^m . Если норма числа обусловленности $\|C_y(\omega)\|_\infty$ близка к единице, что имеет место при $M_{yM}(\omega) \cong M_{ym}(\omega)$, то сфера в пространстве R^v отображается в сферу в пространстве R^m . Если норма числа обусловленности $\|C_y(\omega)\|_\infty$ значительно превышает единицу, то получаемый при отображении сферы $\|\chi(0)\| = \text{const}$ эллипсоид в R^m характеризуется в $\|C_y(\omega)\|_\infty$ — раз отличающимися по длине наибольшей и наименьшей полуосями. Стремление $\|C_y(\omega)\|_\infty$ к бесконечности свидетельствует о вырождении эллипсоида в прямую, а следовательно, о вырождении сложной системы (1), и система обнаруживает не полную управляемость по выходу. Таким образом, число обусловленности $C_y(\omega)$ формально являясь в (38) коэффициентом усиления относительной вариации передаточной частотной матрицы вход–выход, порожденной совокупностью исходных физических параметров, может быть хорошей характеристикой структурных свойств этого отношения [12].

Задача синтеза многомерных частотно-робастных непрерывных систем в классе хорошо обусловленных отношений вход–выход может быть решена методами обобщенного модального управления [8, 9], доставляющего матрице состояния системы модально-робастное представление. При этом в силу асимптотических свойств оценка частотного числа обусловленности отношения вход–выход во всем диапазоне частот экзогенного гармонического воздействия примет минимальное значение, степень отклонения которого от единицы определяется степенью отклонения от единицы числа обусловленности матрицы собственных векторов.

Пример. Рассмотрим использование частотных функций чувствительности мажорантных и минорантных частотных характеристик непрерывной многомерной системы для исследования чувствительности к параметрическим вариациям на примере непрерывной двухканальной фотоэлектрической следящей системы (ФЭСС) с прямыми антисимметричными связями между каналами. Модель вход–состояние–выход состоит из матриц

$$\mathbf{F}(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -20 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4(1+q) & 1 \\ -20(1+q) & 0 & -100 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 20 & -4(1+q) \\ 0 & 0 \\ 20 & 100 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

с номинальным значением $\bar{q} = 0$. Матрицы \mathbf{E} и \mathbf{P} источника внешнего гармонического воздействия для режима одночастотного гармонического возбуждения каждого входа системы имеют вид

$$\mathbf{E} = \text{diag}\{\mathbf{E}_{ii}; i = \overline{1, 2}\}, \mathbf{E}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Поставим задачу оценки чувствительности мажорантных и минорантных частотных характеристик к вариациям перекрестных связей между каналами ФЭСС.

На основании предложенного алгоритма 1 при номинальном значении параметра $\bar{q} = 0$ вычислим матрицы $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{C}$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -20 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ -20 & 0 & -100 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 20 & -4 \\ 0 & 0 \\ 20 & 100 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицы $\mathbf{F}_q, \mathbf{G}_q$ получим прямым дифференцированием матриц $\mathbf{F}(q)$ и $\mathbf{G}(q)$ по параметру q

$$\mathbf{F}_q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -20 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{G}_q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Приведем шаги оценки чувствительности мажорантных и минорантных частотных характеристик на основании алгоритма 1.

Шаг 1. Для заданного текущего значения частоты ω сконструируем вещественнозначное решение уравнение Сильвестра для $q = 0$ с помощью соотношения (30), которое примет вид:

$$\mathbf{T}(\omega) = -(\omega^2 \mathbf{I} + \mathbf{F}^2)^{-1} \text{row}\{\mathbf{F}\mathbf{G}_i \quad \omega \mathbf{G}_i\}, i = \overline{1, m}.$$

Выполним конструирование критериальных матриц $\mathbf{P}_y(\omega)$ и $\mathbf{P}_e(\omega)$ с помощью (21).

Шаг 2. Вычислим сингулярные разложения критериальных матриц в форме (22).

Шаг 3. Вычислим матрицу сепаратной чувствительности $\mathbf{T}_{q_j}(\omega)$, используя представление (31) и матрицы чувствительности $\mathbf{P}_{yq_j}(\omega)$ и $\mathbf{P}_{eq_j}(\omega)$ с помощью (23).

Шаг 4. Сконструируем матрицы $\mathbf{S}_{y_j}(\omega)$ и $\mathbf{S}_{e_j}(\omega)$ с помощью соотношений (25).

Шаг 5. Вычислим функции чувствительности мажорантных и минорантных АЧХ вход–выход и относительной частотной ошибки с помощью (26) и (27).

Шаг 6. Рассчитаем конечные вариации мажорантных и минорантных частотных характеристик вход–выход и относительной частотной ошибки (28) и (29).

На рис. 1 показаны кривые функций чувствительности $M_q(\omega)$ мажорантной (1) и минорантной (2) АЧХ вход–выход. Вычисление функций чувствительности выполнено в диапазоне частот ω , характеризующихся наиболее существенными изменениями, которые позволили обнаружить два резонансных пика.

На рис. 2 приведены кривые $M_{yM}(\omega)$ мажорантной (1) и $M_{ym}(\omega)$ минорантной (2) АЧХ ФЭСС при номинальном значении параметра $\bar{q} = 0$, а также соответствующие им кривые $M_{yM}(\omega, \mathbf{q})$ мажорантной (3) и

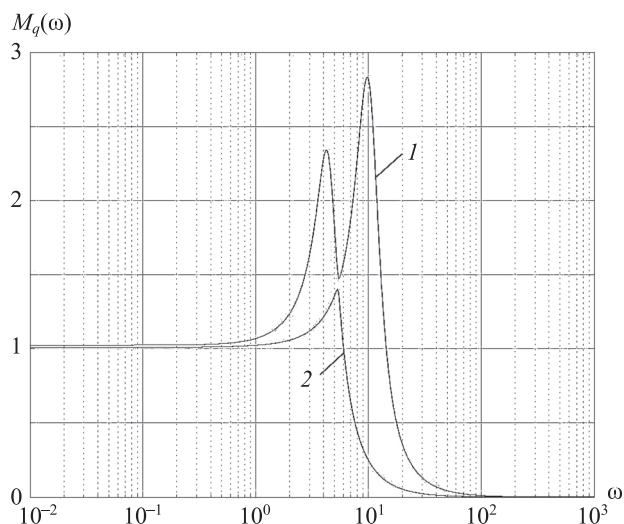


Рис. 1. Кривые функций чувствительности амплитудно-частотных характеристик: 1 — мажорантной $M_{yMq}(\omega)$ и 2 — минорантной $M_{ymq}(\omega)$

Fig. 1. Sensitivity function curves: 1 — majorant $M_{yMq}(\omega)$ and 2 — minorant $M_{ymq}(\omega)$ amplitude-frequency characteristics

$M_{ym}(\omega, \mathbf{q})$ минорантной (4) АЧХ с учетом их конечных вариаций, порожденных конечной вариацией Δq параметра q .

На рис. 2 знаками «*» и «°» отмечены мажоранта и миноранта частотного показателя колебательности.

На рис. 3 приведены кривые: $\delta_M(\omega)$ мажорантной (1) и $\delta_m(\omega)$ минорантной (2) относительной частотной ошибки ФЭСС при номинальном значении параметра $\bar{q} = 0$, а также соответствующие им кривые $\delta_M(\omega, \mathbf{q})$ мажорантной (3) и $\delta_m(\omega, \mathbf{q})$ минорантной (4) относи-

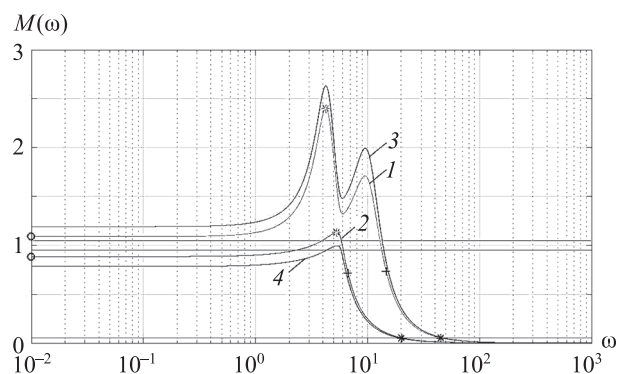


Рис. 2. Кривые амплитудно-частотных характеристик фотоэлектрической следящей системы: мажорантной (1) $M_{yM}(\omega)$ и минорантной (2) $M_{ym}(\omega)$ при номинальном значении параметра $\bar{q} = 0$; мажорантной (3), минорантной (4) при параметрических вариациях

Fig. 2. Amplitude-frequency response curves for: majorant (1) $M_{yM}(\omega)$ and minorant (2) $M_{ym}(\omega)$ photoelectric tracking system at nominal value of parameter $\bar{q} = 0$; majorant (3), minorant (4) at parametric variations

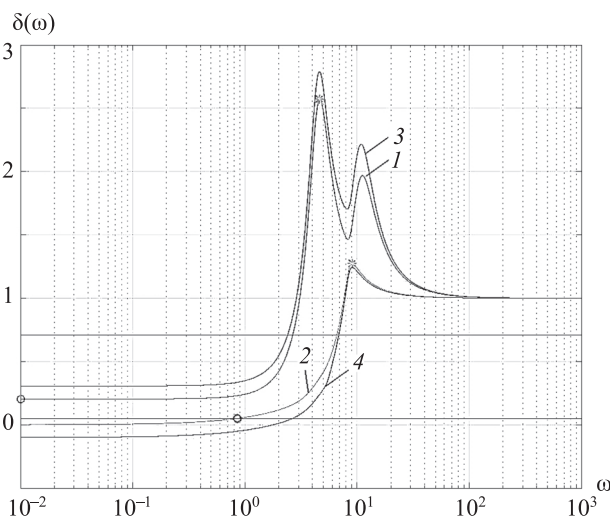


Рис. 3. Кривые $\delta_M(\omega)$ мажорантной (1) и $\delta_m(\omega)$ минорантной (2) относительной частотной ошибки при номинальном значении параметра $\bar{q} = 0$, мажорантной $\delta_M(\omega, \mathbf{q})$ (3) и минорантной $\delta_m(\omega, \mathbf{q})$ (4) относительной частотной ошибки, порожденных конечной вариацией Δq параметра q

Fig. 3. Curves of the majorant $\delta_M(\omega)$ (1) and minorant $\delta_m(\omega)$ (2) relative frequency error at the nominal value of the parameter $\bar{q} = 0$, majorant $\delta_M(\omega, \mathbf{q})$ (3) and minorant $\delta_m(\omega, \mathbf{q})$ (4) relative frequency error generated by the finite variation Δq of the parameter q

тельной частотной ошибки, порожденных конечной вариацией Δq параметра q .

На рис. 3 знаком «*» отмечены максимальное и минимальное значение относительной частотной ошибки, знаком «°» — мажоранта и миноранта полос пропускания многомерной системы на заданном уровне.

Функции чувствительности мажорант и минорант частотных характеристик позволяют оценить чувствительность таких частотных показателей качества как, например, мажоранты и миноранты показателя колебательности и полос пропускания.

Заключение

Решена задача исследования чувствительности эллипсоидных амплитудно-частотных характеристик многомерных динамических систем к вариациям параметров с помощью построения эллипсоидных оценок частотных функций чувствительности по состоянию, выходу и ошибке линейных многомерных непрерывных систем с использованием сингулярного разложения матриц, составленных из функций частотной параметрической чувствительности. Концепция подобия позволяет с единых алгоритмических позиций построить частотные передаточные матрицы многомерных систем для одночастотного и многочастотного случаев возбуждения входов систем гармоническим экзогенным воздействием для решения задачи синтеза частотно-робастных систем.

Литература

1. Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. Чувствительность систем управления. М.: Наука, 1981. 464 с.
2. Оморов Р.О. Робастность интервальных динамических систем. I. Робастность непрерывных линейных интервальных динамических систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 1995. № 1. С. 22–27.
3. Оморов Р.О. Робастность интервальных динамических систем. II. Робастность дискретных линейных интервальных динамических систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 1995. № 3. С. 3–7.
4. Оморов Р.О. Максимальная грубость динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1991. № 8. С. 36–45.
5. Оморов Р.О. Алгебраический метод исследования робастности интервальных динамических систем // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2020. Т. 20. № 3. С. 364–370. <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2020-20-3-364-370>
6. Ушаков А.В. Модальные оценки качества процессов управления многомерными системами при гармоническом внешнем воздействии // Автоматика и телемеханика. 1989. № 11. С. 76–85.
7. Акунов Т.А., Алишеров С., Оморов Р.О., Ушаков А.В. Модальные оценки качества процессов в линейных многомерных системах. Бишкек: Илим, 1991. 59 с.
8. Ушаков А.В. Обобщенное модальное управление // Известия вузов. Приборостроение. 2000. Т. 43. № 3. С. 8–16.
9. Акунов Т.А., Сударчиков С.А., Ушаков А.В. Обеспечение стабильности показателей качества в задачах управления динамическим объектом с интервальными параметрами при конечно-мерном экзогенном воздействии // Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. 2005. № 19. С. 60–66.
10. Бобцов А.А., Никифоров В.О., Пыркин А.А., Слита О.В., Ушаков А.В. Методы адаптивного и робастного управления нелинейными объектами в приборостроении. СПб.: НИУ ИТМО, 2013. 277 с.
11. Никифоров В.О., Ушаков А.В. Управление в условиях неопределенности: чувствительность, адаптация, робастность. СПб.: СПбГИТМО (ТУ), 2002. 232 с.
12. Дударенко Н.А., Нуйя О.С., Сержантова М.В., Слита О.В., Ушаков А.В. Математические основы теории систем: лекционный курс и практикум. СПб.: НИУ ИТМО, 2014. 292 с.
13. Хорн Р., Джонсон Дж. Матричный анализ. Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 655 с.
14. Акунов Т.А., Ушаков А.В. Анализ чувствительности эллипсоидных оценок многомерных процессов управления // Известия вузов. Приборостроение. 1991. № 8.
15. Дударенко Н.А., Ушаков А.В. Анализ вырождения сложной динамической системы с антропокомпонентами // Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. 2006. № 33. С. 62–68.
16. Akunova A., Akunov T.A., Ushakov A.V. Degeneration of complex systems under multifrequent input signal // Proc. of the 2nd International Conference. Control of Oscillations and Chaos. Proceedings (Cat. No.00TH8521). V. 1. 2000. P. 101–104. <https://doi.org/10.1109/coc.2000.873521>
17. Оморов Р.О., Акунов Т.А., Айдралиев А.О. Эллипсоидные оценки траекторной чувствительности многомерных процессов на основе обобщенной проблемы сингулярных чисел // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2022. Т. 22. № 2. С. 239–245. <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2022-22-2-239-245>

Авторы

Оморов Роман Оморович — доктор технических наук, профессор, член-корреспондент Национальной академии наук Кыргызской Республики, Институт машиноведения и автоматизации Национальной академии наук Кыргызской Республики, Бишкек, 720071, Кыргызская Республика, [sc 6602708366](https://orcid.org/0000-0003-3555-1323), [https://orcid.org/0000-0003-3555-1323](mailto:romano_ip@list.ru), romano_ip@list.ru

Акунова Акылай — кандидат технических наук, главный научный сотрудник, Институт машиноведения и автоматизации Национальной

References

1. Rozenvasser E.N., Iusupov R.M. *Sensitivity of Automatic Control Systems*. Moscow, Jenergija Publ., 1981, 464 p. (in Russian)
2. Omorov R.O. Robustness of interval dynamic systems. I. Robustness in continuous linear interval dynamic systems. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 1996, vol. 34, no. 3, pp. 69–74.
3. Omorov R.O. Robustness of interval dynamical systems. II. Robustness of discrete linear interval dynamical systems. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 1996, vol. 34, no. 4, pp. 1–5.
4. Omorov R.O. Maximal robustness of dynamical systems. *Automation and Remote Control*, 1991, vol. 52, no. 8, pp. 1061–1068.
5. Omorov R.O. Robustness research of interval dynamic systems by algebraic method. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2020, vol. 20, no. 3, pp. 364–370. (in Russian). <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2020-20-3-364-370>
6. Ushakov A.V. Model performance estimates of control processes in multidimensional systems with a harmonic exogenous signal. *Automation and Remote Control*, 1989, vol. 50 no. 11, pp. 1521–1528.
7. Akunov T.A., Alisherov S., Omorov R.O., Ushakov A.V. *Modal Estimations of Quality of Processes in Linear Multivariable Systems*. Bishkek, Ilim Publ., 1991, 59 p. (in Russian)
8. Ushakov A.V. Generalized modal control. *Journal of Instrument Engineering*, 2000, vol. 43, no. 3, pp. 8–16. (in Russian)
9. Akunov T.A., Sudarchikov S., Ushakov A.V. Ensuring the stability of quality indicators in the problems of controlling a dynamic object with interval parameters under a finite-dimensional exogenous action. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2005, no. 19, pp. 60–66. (in Russian)
10. Bobtsov A.A., Nikiforov V.O., Pyrkina A.A., Slita O.V., Ushakov A.V. *Methods of Adaptive and Robust Control of Non-Linear Objects in Instrument Engineering*. St. Petersburg, NIU ITMO, 2013, 277 p. (in Russian)
11. Nikiforov V.O., Ushakov A.V. *Control Under Uncertainty: Sensitivity, Adaptation, Robustness*. St. Petersburg, ITMO, 2002, 232 p. (in Russian)
12. Dudarenko N.A., Nuiia O.S., Serzhantova M.V., Slita O.V., Ushakov A.V. *Mathematical Foundations of Systems Theory: Lecture Course and Practical Training*. St. Petersburg, NIU ITMO, 2014, 292 p. (in Russian)
13. Horn R.A., Johnson Ch.R. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1985, 561 p.
14. Akunov T.A., Ushakov A.V. Sensitivity analysis of ellipsoid estimates of multivariate control processes. *Journal of Instrument Engineering*, 1991, no. 8. (in Russian)
15. Dudarenko N.A., Ushakov A.V. Analysis of the degeneration of a complex dynamic system with anthropocomponents. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2006, no. 33, pp. 62–68. (in Russian)
16. Akunova A., Akunov T.A., Ushakov A.V. Degeneration of complex systems under multifrequent input signal. *Proc. of the 2nd International Conference. Control of Oscillations and Chaos. Proceedings (Cat. No.00TH8521). V. 1*, 2000, pp. 101–104. <https://doi.org/10.1109/coc.2000.873521>
17. Omorov R.O., Akunov T.A., Aidraliev A.O. Ellipsoidal estimates of trajectory sensitivity of multi-dimensional processes based on generalized singular values problems. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, vol. 22, no. 2, pp. 239–245. (in Russian). <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2022-22-2-239-245>

Authors

Roman O. Omorov — D.Sc., Professor, Corresponding Member of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, Machinery Researching and Automatics Institute of Kyrgyz Republic National Academy of Sciences, Bishkek, 720071, Kyrgyz Republic, [sc 6602708366](https://orcid.org/0000-0003-3555-1323), [https://orcid.org/0000-0003-3555-1323](mailto:romano_ip@list.ru), romano_ip@list.ru

Akylai Akunova — PhD, Chief Researcher, Machinery Researching and Automatics Institute of Kyrgyz Republic National Academy of

академии наук Кыргызской Республики, Бишкек, 720071, Кыргызская Республика, [sc 7801308323](https://orcid.org/0000-0003-0684-4063), <https://orcid.org/0000-0003-0684-4063>, aakunova@mail.ru

Акунов Таалайбек Абакирович — кандидат технических наук, главный научный сотрудник, Институт машиноведения и автоматизации Национальной академии наук Кыргызской Республики, Бишкек, 720071, Кыргызская Республика, [sc 6508211498](https://orcid.org/0000-0002-0923-9777), <https://orcid.org/0000-0002-0923-9777>, takunov@mail.ru

Sciences, Bishkek, 720071, Kyrgyz Republic, [sc 7801308323](https://orcid.org/0000-0003-0684-4063), <https://orcid.org/0000-0003-0684-4063>, aakunova@mail.ru

Taalaibek A. Akunov — PhD, Chief Researcher, Machinery Researching and Automatics Institute of Kyrgyz Republic National Academy of Sciences, Bishkek, 720071, Kyrgyz Republic, [sc 6508211498](https://orcid.org/0000-0002-0923-9777), <https://orcid.org/0000-0002-0923-9777>, takunov@mail.ru

Статья поступила в редакцию 26.01.2023
Одобрена после рецензирования 28.03.2023
Принята к печати 27.05.2023

Received 26.01.2023
Approved after reviewing 28.03.2023
Accepted 27.05.2023



Работа доступна по лицензии
Creative Commons
«Attribution-NonCommercial»