

УДК 536.6

ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ПРИЕМНИКОВ ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕПЛОПЕРЕНОСА

Н.В. Пилипенко

Рассмотрен численно-алгоритмический метод получения динамических характеристик различных типов тепломеров на основе дифференциально-разностных моделей теплопереноса. Приведен способ уменьшения порядка передаточных функций по известным каналам воздействия на тепломер.

Ключевые слова: нестационарная теплотметрия, динамические характеристики тепломеров, дифференциально-разностная модель теплопереноса.

Введение

К динамическим характеристикам различных типов приемников тепловых потоков (ПТП) будем относить как переходную, импульсно-переходную, амплитудно- и фазочастотную, так и переходную матрицу, характеризующую тепловые связи в ПТП, матричную импульсно-переходную передаточную функцию, определяющую соотношения входов \vec{U} и выходов \vec{Y} , а также матрицу передаточных функций.

Нами были получены перечисленные динамические характеристики для всех пространственных ПТП, схемы и топологии которых приведены в [1]. Для получения переходных, импульсно-переходных, амплитудно- и фазочастотных характеристик была использована дифференциально-разностная модель (ДРМ) теплопереноса в ПТП [1], из которой определены матрицы обратных связей F и управления G . При известных значениях F и G , а также матрицы измерений H , которая показывает, в каких точках ПТП измеряется температура $t(\tau)$, получение указанных характеристик с помощью программного комплекса (ПК) MATLAB не вызывает затруднений.

На динамические характеристики существенное влияние оказывают условия размещения различных ПТП на объекте исследования. При одномерном теплопереносе в системе ПТП–объект переходная характеристика одного и того же ПТП может меняться значительно. В качестве примера на рис. 1 показаны переходная, импульсно-переходная, амплитудно- и фазочастотные характеристики однородного градиентного ПТП с различными граничными условиями (ГУ) на тыльной стороне. При этом толщина ПТП $\delta = 5 \cdot 10^{-3}$ м, теплопроводность $\lambda = 15$ Вт/(м·К), температуропроводность $a = 3,8 \cdot 10^{-6}$ м²/с. Как видно из рис. 1, времена установившегося теплового режима ПТП в случаях ГУ-2 и ГУ-3 отличаются более, чем на порядок. В связи с этим при постановке эксперимента необходимо тщательно анализировать условия размещения ПТП, величину контактного теплового сопротивления и другие особенности.

Остановимся более подробно на остальных динамических характеристиках.

Методы получения динамических характеристик

Основной динамической характеристикой ПТП в пространстве его состояний является переходная матрица $\Phi(\tau, \tau_0)$, которую необходимо рассматривать на значительном промежутке времени $\Delta\tau = \tau - \tau_0$. Она имеет размерность $(n \times n)$ и записывается в виде

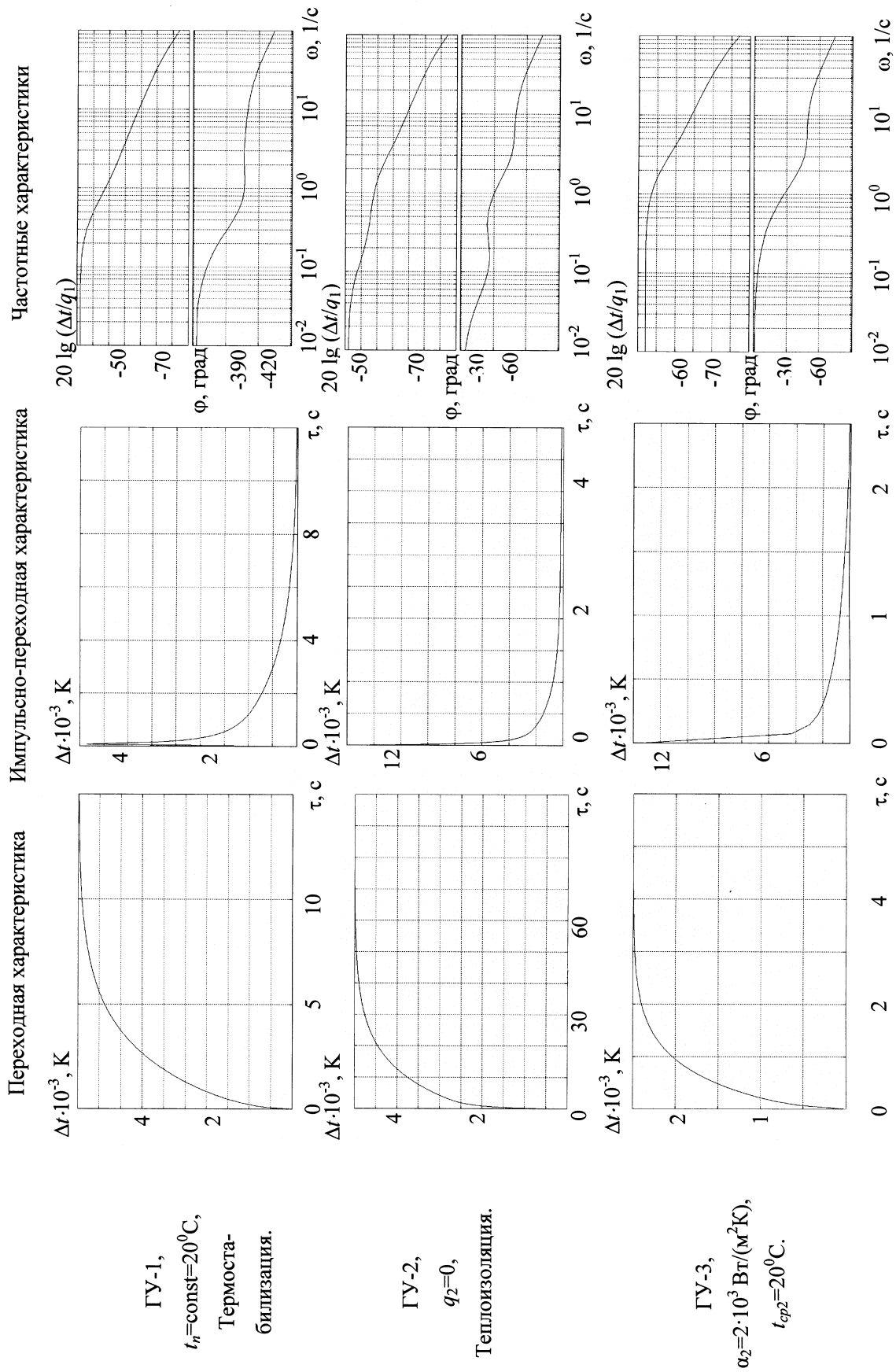


Рис. 1. Динамические характеристики однородного градиентного ПТП с различными ГУ на тыльной стороне

$$\Phi(\tau, \tau_0) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(\tau, \tau_0) & \cdot & \varphi_{1n}(\tau, \tau_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{n1}(\tau, \tau_0) & \cdot & \varphi_{nn}(\tau, \tau_0) \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Элемент $\varphi_{ij}(\tau, \tau_0)$ представляет собой переходный процесс по температуре i -го блока ПТП от единичного начального условия по температуре j -го блока, протекающий в свободной системе $\dot{\vec{T}}(\tau) = \vec{F}\vec{T}$ при нулевых начальных условиях по температурам остальных блоков. Таким образом, переходная матрица количественно отражает тепловые связи в ПТП самых сложных конструкций.

В практических расчетах используется дискретная форма переходной матрицы в следующем виде:

$$\Phi_k = \begin{vmatrix} \varphi_{11,k} & \cdot & \varphi_{1n,k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{n1,k} & \cdot & \varphi_{nn,k} \end{vmatrix}, \quad (2)$$

где $\Phi_k = \Phi(\tau_k, \tau_0) = \Phi(k\Delta\tau, 0)$, а $\varphi_{ij}(\tau, \tau_0) = \varphi_{ij}(\tau_k, \tau_0) = \varphi_{ij}(k\Delta\tau, 0) = \varphi_{ij,k}$.

Для вычисления Φ_k используется следующий способ [2, 3]: если для момента времени $\tau_0 = 0$ ($k=0$) установить единичное начальное t_{j_0} условие для j -ой составляющей вектора состояния \vec{T}_0 , а все остальные положить равными 0, то полученные в результате решения свободной системы значения t_i ($i=1, 2, \dots, n$) вектора \vec{T}_k будут j -м столбцом матрицы Φ_k . Если подобную операцию выполнить n раз ($j=1, 2, \dots, n$), то будут получены все n столбцов матрицы Φ_k .

Математическую модель ПТП как компонента теплоизмерительной системы составляют уравнения теплопереноса и измерений [1]:

$$\dot{\vec{T}}(\tau) = \vec{F}\vec{T}(\tau) + \vec{G}\vec{U}(\tau), \quad (3)$$

$$\vec{Y}(\tau) = \vec{H}\vec{T}(\tau), \quad (4)$$

где \vec{T}, \vec{Y} и \vec{U} – векторы состояния, измерения и управления.

Соотношения «вход $\vec{U}(\tau)$ –выход $\vec{Y}(\tau)$ » для системы (3) характеризуются матричной импульсной переходной характеристикой $\Omega(\tau, 0)$. Она описывает переходные процессы в теплоизмерительной системе с нулевыми начальными условиями по различным выходам y_j ($j=1, 2, \dots, m$) (измеренным температурам или их перепадам), вызванные единичными воздействиями – тепловыми потоками $q_1(\tau) = \delta(\tau-0)$ или $q_2(\tau) = \delta(\tau-0)$, где $\delta(\tau-0)$ – δ -функция Дирака. В случае ПТП с $j = m$ измерениями и двумя граничными условиями на рабочей и тыльной поверхностях размерность $\Omega(\tau, 0)$ составляет $m \times 2$.

Известно, что матричная импульсно-переходная характеристика в дискретной форме $\Omega_k = \Omega(\tau_k, 0)$ выражается через матрицы измерения \vec{H} , переходную \vec{F} и управления \vec{G} следующим образом [4]:

$$\Omega_k = \vec{H}\Phi_k\vec{G} = \begin{vmatrix} \Omega_{11,k} & \Omega_{12,k} \\ \vdots & \vdots \\ \Omega_{m1,k} & \Omega_{m2,k} \end{vmatrix}, \quad (5)$$

где $\Omega_{j1,k}$ и $\Omega_{j2,k}$ – импульсно-переходные характеристики по различным выходам ПТП от единичных входных воздействий $q_1(\tau)=\delta(\tau-0)$ или $q_2(\tau)=\delta(\tau-0)$. Как правило, практический интерес вызывает составляющие $\Omega_{j1,k}$ по каналам воздействия $q_1(\tau)$.

Для получения передаточных функций ПТП преобразуем его модель (3) по Лапласу:

$$s\vec{T}(s)=F\vec{T}(s)+G\vec{U}(s),$$

$$\vec{Y}(s)=H\vec{T}(s),$$

откуда получим

$$\vec{T}(s)=[sI-F]^{-1}\times G\vec{U}(s), \quad (6)$$

$$\vec{Y}(s)=H[sI-F]^{-1}\times G\vec{U}(s), \quad (7)$$

где $\vec{T}(s)$, $\vec{Y}(s)$, $\vec{U}(s)$ – изображения по Лапласу векторов $\vec{T}(\tau)$, $\vec{Y}(\tau)$, $\vec{U}(\tau)$ соответственно.

Уравнение (6) определяет следующий вид матрицы $W(s)$ передаточных функций ПТП:

$$W(s) = \underset{(m \times 2)}{H} \underset{(m \times n)}{[sI - F]^{-1}} \cdot \underset{(n \times n)}{G} = \underset{(n \times 2)}{G} \begin{vmatrix} W_{11}(s) & \cdot & W_{12}(s) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ W_{m1}(s) & \cdot & W_{m2}(s) \end{vmatrix}, \quad (8)$$

где $W_{j1}(s)$ – передаточная функция по каналу воздействия $q_1(\tau) \rightarrow y_j(\tau)$; $W_{j2}(s)$ – то же по каналу $q_2(\tau) \rightarrow y_j(\tau)$; $y_j(\tau)$ – j -я составляющая вектора измерения $\vec{Y}(\tau)$ ($j=1, 2, \dots, m$).

Матрица передаточных функций $W(s)$ имеет такую же структуру и размерность, как и рассмотренная выше матричная импульсно-переходная характеристика $\Omega(\tau, 0)$. Вид $W(s)$ при постоянном составе вектора входных воздействий $\vec{U}(\tau)=|q_1(\tau) \ q_2(\tau)|^T$ определяется, в основном, составом вектора измерений $\vec{Y}(\tau)$.

Так как в качестве модели ПТП используется ДРМ в виде системы (3) обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, то передаточные функции измерительных каналов ПТП $W_{j1}(s)$ и $W_{j2}(s)$ имеют классическую форму в виде соотношения полиномов от комплексного параметра s :

$$W(s) = \frac{\beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \dots + \beta_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \alpha_n}, \quad (9)$$

в котором порядок полинома числителя на единицу меньше порядка полинома знаменателя.

Общей особенностью полиномов как числителя, так и знаменателя является высокий порядок передаточных функций (9) для большинства рассмотренных ПТП. Так как это обстоятельство, вызванное стремлением охватить излишний для реальных ПТП диапазон высоких частот входных воздействий, существенно усложняет дальнейшее использование передаточных функций, то было предложено провести программное уменьшение порядка указанных полиномов. Оно основано на эквивалентировании логарифмических частотных характеристик и в ПК MATLAB реализуется командами `balreal(sys)`, `minreal(sys)` и `modred(sys, elim)`, где `sys=ss(F, G, H, D)`, `elim` – вектор, указывающий на подлежащие удалению переменные вектора состояния [5].

Функция `balreal` возвращает сбалансированную реализацию модели в пространстве состояний (ss) с равными грамианами управляемости и наблюдаемости. Чтобы на выходе функции получить как новую сбалансированную модель `sysb`, так и вектор `g` с

диагональными элементами сбалансированного грамиана, необходимо выполнить команду

```
[sysb, g] = balreal(sys).
```

Если значения первых диагональных элементов сбалансированного грамиана g значительно больше последующих, то можно понизить порядок модели, удалив соответствующие малозначачие переменные состояния. Для этого применяется одна из двух модификаций функции `modred`:

```
rsys= modred(sysb, elim, 'mdc');
```

```
rsys= modred(sysb, elim, 'del').
```

В первом случае (`mdc`) гарантируется сохранение коэффициента передачи, так как метод заключается в приравнении производных удаляемых переменных состояния нулю и решении системы уравнений для определения установившихся значений. Во втором случае (`del`) просто удаляются переменные состояния, метод не гарантирует сохранение коэффициента передачи, но более точно аппроксимирует переходные процессы в модели.

Результаты имитационного моделирования

В качестве иллюстрации приведем результаты понижения порядка полинома передаточной функции $W(s)$ по каналу $q_1 \rightarrow \Delta t_{1-11} = t_1 - t_{11}$ для однородного градиентного ПТП с указанными выше свойствами [1]. Его исходная передаточная функция, полученная с использованием матриц F, G и H , имеет вид

$$W(s) = \frac{0,00051s^{10} + 0,15s^9 + 20s^8 + 1400s^7 + 6,2 \times 10^4 s^6 + 1,7 \times 10^6 s^5 + 2,7 \times 10^7 s^4 + 2,5 \times 10^8 s^3 + 1,2 \times 10^9 s^2 + 2,2 \times 10^9 s + 0,029}{s^{11} + 330s^{10} + 4,8 \times 10^4 s^9 + 3,9 \times 10^6 s^8 + 1,9 \times 10^8 s^7 + 6,1 \times 10^9 s^6 + 1,2 \times 10^{11} s^5 + 1,4 \times 10^{12} s^4 + 9,5 \times 10^{12} s^3 + 2,9 \times 10^{13} s^2 + 2,6 \times 10^{13} s + 0,012}, \quad (10)$$

а передаточные функции $W_{\text{mdc}}(s)$ и $W_{\text{del}}(s)$ упрощенных моделей, которые получены методами `mdc` и `del` команды `modred`, представляются в виде

$$W_{\text{mdc}}(s) = \frac{1,1 \times 10^{-5} s^2 + 0,00013s + 1,8 \times 10^{-15}}{s^2 + 1,6s + 7,1 \times 10^{-16}}, \quad (11)$$

$$W_{\text{del}}(s) = \frac{0,00021s + 3,2 \times 10^{-15}}{s^2 + 2,9s + 1,3 \times 10^{-15}}. \quad (12)$$

На рис. 2 представлены переходные и частотные характеристики моделей, описываемых передаточными функциями (11) и (12).

Заключение

В заключение отметим, что рассмотренные динамические характеристики различных типов ПТП позволили получить новые экспериментальные результаты при исследовании энергоемких технологических процессов и обеспечить энергоресурсосбережение [6].

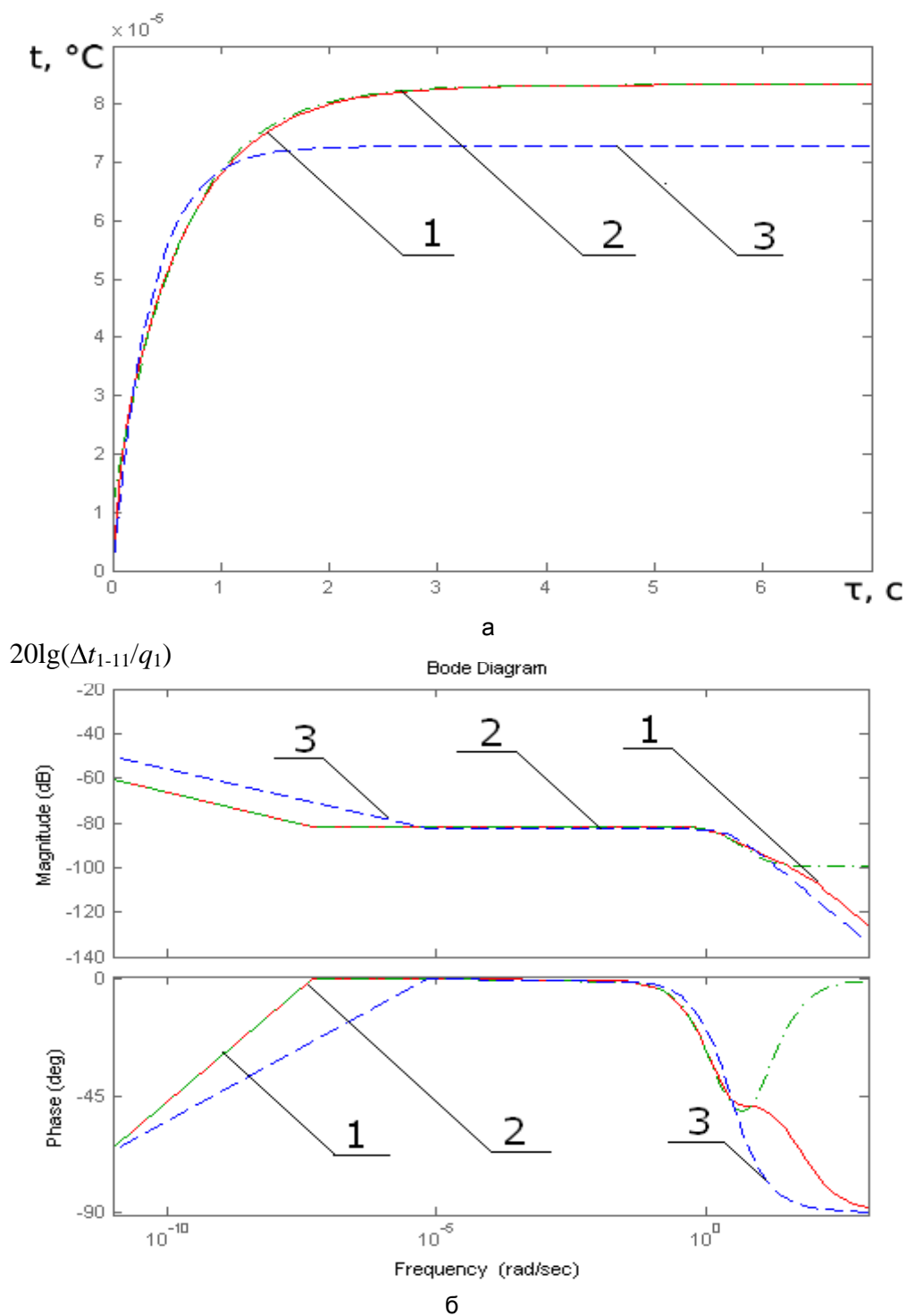


Рис. 2. Переходные (а) и частотные (б) характеристики ($q_1 \rightarrow \Delta t_{1-11}$):
 1 – полная модель; 2, 3 – упрощенные mdc и del модели

Литература

1. Pilipenko N. Parametrical Identification of Differential-difference Heat Transfer Models in Non-stationary Thermal Measurements // Heat Transfer Research. – 2008. – Vol. 39. – №. 4. – P. 311–315.
2. Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления. – М.: Наука, 1970. – 620 с.

3. Медич Дж. Статистические оптимальные линейные оценки и управление. – М.: Энергия, 1973. – 440 с.
4. Симбирский Д. Ф. Температурная диагностика двигателей. – Киев: Техника, 1976. – 208 с.
5. Дьяконов В.П. MATLAB 6.5 SP1/7.0 + Simulink 5/6 в математике и моделировании. – М.: Солон-Пресс, 2005. – 567с.
6. Пилипенко Н.В., Кириллов К.В. Определение нестационарных условий теплообмена в энергетических установках // Приборы. – 2008. – № 9. – С. 21–25.

Пилипенко Николай Васильевич – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, доцент, pilipenko@grv.ifmo.ru