

doi: 10.17586/2226-1494-2024-24-2-306-313

УДК 621.372.54

От конструирования вейвлетов на основе производных функции Гаусса к синтезу фильтров с конечной импульсной характеристикой

Владимир Ильич Семенов¹, Сергей Геннадьевич Чумаров²✉^{1,2} Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова, Чебоксары, 428015, Российская Федерация¹ syundyukovo@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8968-7459>² chumarov@mail.ru ✉, <https://orcid.org/0000-0002-4946-3685>

Аннотация

Введение. Для непрерывного вейвлет-преобразования традиционно используются вейвлеты на основе производных функции Гаусса, а для кратномасштабного анализа — вейвлеты Добеши. Разработка алгоритмов прямого и обратного непрерывного вейвлет-преобразования в частотной области позволила в настоящей работе синтезировать цифровые фильтры с конечной импульсной характеристикой методом, отличным от существующих. Качество синтезированных фильтров проверялось декомпозицией и последующей реконструкцией сигналов. Для этого синтезировались несколько фильтров, полностью покрывающих частотный диапазон сигнала. Так как вейвлеты являются полосовыми фильтрами, авторы назвали фильтры вейвлетами. Чем точнее реконструированный сигнал повторяет форму оригинального сигнала, тем лучше вейвлет, сконструированный тем или иным методом. Сравнение точности реконструкции сигналов показывает, что лучший результат преобразования получается при применении именно синтезированных вейвлетов. **Метод.** Импульсные характеристики фильтров с конечной импульсной характеристикой синтезируются таким образом, чтобы их амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) были схожи на АЧХ вейвлетов на основе производных функции Гаусса большого порядка. Чем больше порядок фильтра, тем ближе АЧХ к прямоугольной форме. **Основные результаты.** Предложены алгоритмы прямого и обратного вейвлет-преобразования сигнала в частотной области с применением вейвлетов на основе производных функции Гаусса. Профилирование программы синтеза показало, что время вейвлет-преобразования с использованием быстрого преобразования Фурье в 15 000 раз меньше, чем при прямом численном интегрировании для экспериментальной выборки сигнала в 32 768 отсчетов. Эти алгоритмы можно использовать для вейвлетов с прямоугольной АЧХ. При этом время численного вычисления уменьшается еще в два раза. Точность реконструкции сравнивалась для вейвлетов на основе производных второго порядка, вейвлетов Добеши, и вейвлетов с прямоугольной АЧХ. Точность реконструкции оказалась наивысшей для вейвлетов с прямоугольной АЧХ. В работе представлены импульсные характеристики двухполосного, трехполосного цифровых фильтров и их АЧХ. **Обсуждение.** Использование предложенного метода конструирования вейвлетов наиболее предпочтительно ввиду его относительной простоты и возможности синтезировать многополосные фильтры с любой формой АЧХ. При синтезе существующими методами можно получить лишь «короткую» переходную полосу только для «длинных» импульсных характеристик, то для сконструированных предложенным методом вейвлетов даже для фильтров очень маленьких порядков переходные полосы практически отсутствуют. Цифровые фильтры с конечной импульсной характеристикой с прямоугольной АЧХ имеют большой коэффициент ослабления в полосе задерживания по сравнению существующими фильтрами с конечной импульсной характеристикой и могут быть использованы для обработки одномерных и двумерных сигналов.

Ключевые слова

вейвлет-преобразование, импульсная характеристика, реконструкция, кратномасштабный анализ, алгоритм Малла, амплитудно-частотная характеристика, синтез, цифровой фильтр

Ссылка для цитирования: Семенов В.И., Чумаров С.Г. От конструирования вейвлетов на основе производных функции Гаусса к синтезу фильтров с конечной импульсной характеристикой // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2024. Т. 24, № 2. С. 306–313. doi: 10.17586/2226-1494-2024-24-2-306-313

From the construction of wavelets based on derivatives of the Gaussian function to the synthesis of filters with a finite impulse response

Vladimir I. Semenov¹, Sergey G. Chumarov²✉

^{1,2} Chuvash State University named after I.N. Ulyanov, Cheboksary, 428015, Russian Federation

¹ syundyukovo@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8968-7459>

² chumarov@mail.ru✉, <https://orcid.org/0000-0002-4946-3685>

Abstract

For continuous wavelet transformation, wavelets based on derivatives of the Gauss function are used, and for multiscale analysis, Daubechies wavelets are used. The development of algorithms for forward and inverse continuous wavelet transform in the frequency domain made it possible in this work to synthesize digital filters with a finite impulse response (FIR) different from existing methods. The quality of the synthesized filters was checked by decomposition and subsequent reconstruction of the signals. To do this, several filters were synthesized that completely cover the frequency range of the signal. Since wavelets are bandpass filters, the authors called the filters wavelets. The more precisely the reconstructed signal repeats the shape of the original signal, the better the wavelet constructed by one method or another. A comparison of the accuracy of signal reconstruction shows that the best conversion result is obtained by using synthesized wavelets. The impulse responses of the FIR filters are synthesized so that their frequency response are similar to the frequency responses of wavelets based on derivatives of the Gaussian function of a large order. The greater the filter order, the closer the frequency response is to a square-wave shape. Algorithms for forward and inverse wavelet transformation of a signal in the frequency domain using wavelets based on derivatives of the Gauss function are proposed. Profiling of the program shows that the time of the wavelet transforms using the fast Fourier transform is 15,000 times less than with the direct numerical integration for sampling the signal of 32,768 samples. These algorithms can be used for wavelets with a square-wave frequency response. At the same time, the numerical calculation time is halved. The accuracy of the reconstruction was compared for wavelets based on second-order derivatives, Daubechies wavelets, and wavelets with a square-wave frequency response. The reconstruction accuracy is highest for the latest wavelets. The use of the wavelet construction method is preferable since this method is relatively simple and it is easy to synthesize multiband filters with any form of frequency response. If, when synthesizing using existing methods, a short transition band can be obtained only for long impulse responses, while the transition band using the method of constructing wavelets is absent even for filters of very small orders. The paper presents the impulse responses of two-band, three-band digital filters and their frequency response. FIR digital filters with a square-wave frequency response have a higher delay-band attenuation coefficient compared to existing filters, do not have transition band, and can be used to process one-dimensional and two-dimensional signals.

Keywords

wavelet transform, impulse response, reconstruction, multiscale analysis, Mallat algorithm, frequency response, synthesis, digital filter

For citation: Semenov V.I., Chumarov S.G. From the construction of wavelets based on derivatives of the Gaussian function to the synthesis of filters with a finite impulse response. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2024, vol. 24, no. 2, pp. 306–313 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2024-24-2-306-313

Введение

Проектирование цифровых фильтров является актуальной задачей [1–4] в различных областях техники и технологий. Среди множества методов синтеза фильтров можно выделить методы, основанные на использовании вейвлетов [5]. Вейвлет-преобразование подразделяется на непрерывное и дискретное [6]. Семейство вейвлет-функций $\psi_{ab}(t)$ генерируется из одной, «материнской», функции $\varphi(t)$ при помощи растяжения (сжатия) и сдвига за счет операции сдвига во времени b и изменения временного масштаба a

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \varphi\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

Для заданных значений параметров a и b функция $\psi_{ab}(t)$ и есть вейвлет. В частотной области спектры вейвлетов похожи на всплески (волны) с пиком на частоте ω и полосой $\Delta\omega$, т. е. имеют вид полосового фильтра. Полоса $\Delta\omega$ уменьшается с ростом параметра

a . Следовательно, вейвлеты локализованы как во временной, так и в частотной областях. Масштабный множитель a , который можно определить как величину, обратную частоте, является основной характеристикой вейвлет-преобразования. Если масштабный коэффициент a изменяется кратно 2^n (n — целое число), то вейвлет-преобразование является дискретным, а при произвольном сколь угодно малом изменении масштабного коэффициента a — непрерывным. Для анализа сигналов непрерывное вейвлет-преобразование более удобно. Его некоторая избыточность, связанная с непрерывным изменением масштабного коэффициента a и параметра сдвига b , становится положительным качеством, так как позволяет более полно и четко представить, и проанализировать информацию в данных.

Целью работы является синтез фильтров с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтров), имеющих более большой коэффициент ослабления в полосе задерживания по сравнению существующими в настоящее время КИХ-фильтрами и с очень короткой переходной полосой.

Методы синтеза КИХ-фильтров и конструирования вейвлетов

Синтез КИХ-фильтров и конструирование вейвлетов производится независимо друг от друга, несмотря на то что вейвлеты с самым большим масштабным коэффициентом являются фильтрами нижних частот, со средним значением — полосовыми фильтрами, а с самым меньшим — фильтрами верхних частот.

Для синтеза КИХ-фильтров с линейной фазой используются методы: взвешивания с помощью окна, частотной выборки, а также расчета оптимальных (по Чебышеву) фильтров. Идеальные частотные характеристики цифровых фильтров нереализуемы. Возможна лишь их аппроксимация с той или иной степенью точности. Синтез цифровых фильтров включает несколько этапов, которые для каждого метода отличаются [7]. Аппроксимируемая и аппроксимирующая функции должны соответствовать определенным требованиям.

Конструирование вейвлетов производится другими методами. При конструировании вейвлетов нужно иметь в виду, что график исходной функции должен осциллировать (быть знакопеременным) вокруг нуля на оси времени и иметь нулевую площадь

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (1)$$

Так же, для того чтобы анализировать более тонкую (высокочастотную) структуру сигнала, подавляя медленно изменяющиеся его составляющие, должны быть равны нулю все первые n моментов

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n \psi(t) dt = 0. \quad (2)$$

Для дискретного вейвлет-преобразования используются две импульсные характеристики (ИХ), соответствующие фильтрам низких и высоких частот, которые называются масштабирующей функцией или вейвлетом. Достаточно определить коэффициенты ИХ низких частот и вычислить коэффициенты вейвлета через них. Задача конструирования семейства вейвлетов с первыми n моментами была решена И. Добеши [8]. Такие вейвлеты называются вейвлетами Добеши n -го порядка (dbN). Для получения вейвлетов необходимо решить систему уравнений с учетом формул (1) и (2) для дискретного варианта, сдвиговой ортогональности и нормировки. Вейвлетом Добеши 1-го порядка является вейвлет Хаара. У вейвлета Хаара только два коэффициента ИХ. С увеличением порядка вейвлета Добеши количество коэффициентов увеличивается. Эти вейвлеты применяются для кратномасштабного анализа сигналов [9].

Для непрерывного вейвлет-преобразования используются вейвлеты на основе функции Гаусса. Такие вейвлеты являются симметричными функциями и имеют производные n -порядка [8–10]. В работах [11, 12] использовано вейвлет-преобразование на основе функции Гаусса в частотной области с применением быстрого преобразования Фурье (БПФ) только для анализа сигналов. В [13] отмечено, что с применением вейвлетов на основе функции Гаусса анализ не является ортого-

нальным, вейвлеты не имеет компактного носителя, отсутствует масштабирующая функция и возможность реконструкции не гарантирована. В работах [14–16] разработан алгоритм кратномасштабного анализа с использованием вейвлетов на основе производных функции Гаусса.

Алгоритм численного вычисления прямого вейвлет-преобразования в частотной области с применением вейвлетов на основе производных функции Гаусса включает следующие шаги.

Шаг 1. Вычисление коэффициентов тригонометрического ряда $a_1(n)$ сигнала $S(k)$ с использованием прямого БПФ:

$$a_1(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(k) \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right),$$

где k — номер отсчета; N — число отсчетов (выборка).

Шаг 2. Вычисление коэффициентов тригонометрического ряда $b_1(n)$ сигнала $S(k)$ с использованием прямого БПФ:

$$b_1(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(k) \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right).$$

Шаг 3. Вычисление коэффициентов тригонометрического ряда $a_2(n)$ вейвлета $\psi(k)$ с использованием прямого БПФ:

$$a_2(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \psi(k) \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right).$$

Шаг 4. Вычисление коэффициентов тригонометрического ряда $b_2(n)$ вейвлета $\psi(k)$ с использованием прямого БПФ:

$$b_2(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \psi(k) \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right).$$

Шаг 5. Вычисление комплексно-сопряженного спектра:

$$c_1(n) = a_1(n)a_2(n) + b_1(n)b_2(n); \quad (3)$$

$$c_2(n) = b_1(n)a_2(n) - a_1(n)b_2(n). \quad (4)$$

Большинство непрерывных вейвлетов — четные или нечетные функции. Для четных вейвлетов ряд составлен из одних косинусов, а для нечетных — из одних синусов.

Для четных вейвлетов $b_2(n) = 0$ и

$$c_1(n) = a_1(n)a_2(n); \quad (5)$$

$$c_2(n) = b_1(n)a_2(n). \quad (6)$$

Для нечетных вейвлетов $a_2(n) = 0$ и

$$c_1(n) = b_1(n)b_2; \quad (7)$$

$$c_2(n) = -(n)b_2(n). \quad (8)$$

Шаг 6. Для четного вейвлета с $M + 1$ разными масштабными коэффициентами вейвлет-спектр $W(a, b)$ (матрица вейвлет-коэффициентов $((M + 1) \times N)$ для входного анализируемого сигнала длиной N отсчетов

рассчитывается путем вычисления M обратных преобразований Фурье от комплексно-сопряженного спектра (5), (6) по формуле:

$$W(a, b) = \sum_{k=0}^{N-1} (c_1(k) + ic_2(k)) \exp\left(i \frac{2\pi nk}{N}\right).$$

Шаг 7. Для нечетного вейвлета с $M + 1$ разными масштабными коэффициентами вейвлет-спектр $W(a, b)$ (матрица вейвлет-коэффициентов $((M + 1) \times N)$ для входного анализируемого сигнала длиной N отсчетов рассчитывается с помощью вычисления M обратных преобразований Фурье из комплексно-сопряженного спектра (7), (8) по формуле:

$$W(a, b) = \sum_{k=0}^{N-1} (c_1(k) + ic_2(k)) \exp\left(i \frac{2\pi nk}{N}\right).$$

Для четных вейвлетов не выполняются шаги 4 и 7, для нечетных — шаги 3 и 6. Вычисление коэффициентов $a_2(n)$ и $b_2(n)$ производится только с вейвлетом, а не с исследуемым сигналом. В связи с этим возможно заранее вычислить их и результаты расчетов хранить в запоминающем устройстве. Благодаря четности (нечетности) непрерывных вейвлетов количество умножений и сложений уменьшается по формулам (5)–(8) в два раза для каждого масштаба. Также уменьшается в два раза количество памяти, необходимой для хранения фурье-коэффициентов вейвлетов для каждого масштаба.

Так как необходимо декомпозировать сигнал на несколько уровней, то шаги 3–7 надо выполнить столько же раз. Например, если в строке изображения размером 512×512 пикселей имеется 512 отсчетов, то для одной строки количество уровней разложения равно 9, а для всех строк и всех столбцов 9 необходимо умножить на 512. Если цветное изображение в формате RGB, то общее количество уровней разложения будет равно 2754. В отличие от алгоритма Малла, кратномасштабный анализ с применением БПФ можно производить с коэффициентом изменения масштаба меньшего двух. В связи с этим необходимо найти алгоритм, позволяющий увеличить скорость вычисления, чем при использовании БПФ. Такой алгоритм создан с применением дискретного преобразования Фурье и представлен после использования алгоритма численного вычисления обратного вейвлет-преобразования.

Алгоритм численного вычисления обратного вейвлет-преобразования в частотной области с применением вейвлетов на основе производных функции Гаусса включает следующие шаги.

Шаг 1. Вычисление коэффициентов тригонометрического ряда $a_1(n)$ вейвлет-спектра $W(a, b)$ с использованием прямого БПФ по формуле:

$$a_1(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W(a, k) \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right).$$

Шаг 2. Вычисление коэффициентов тригонометрического ряда $b_1(n)$ вейвлет-спектра $W(a, b)$ с использованием прямого БПФ по формуле:

$$b_1(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W(a, k) \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right).$$

Шаг 3. Вычисление коэффициентов тригонометрического ряда $a_2(n)$ вейвлета $\psi(t)$ с использованием прямого БПФ по формуле:

$$a_2(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \psi(k) \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right).$$

Шаг 4. Вычисление коэффициентов тригонометрического ряда $b_2(n)$ вейвлета $\psi(t)$ с использованием прямого БПФ по формуле:

$$b_2(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \psi(k) \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right).$$

Шаг 5. Вычисление комплексно-сопряженного спектра по формулам (3), (4). Для четных вейвлетов — по формулам (5), (6); для нечетных — по (7), (8).

Шаг 6. Для четного вейвлета путем $M + 1$ обратных преобразований Фурье от комплексно-сопряженного по формулам (5), (6) вычисляется функция S'_m :

$$S'_m(n) = \sum_{k=0}^{N-1} (c_1(k) + ic_2(k)) \exp\left(i \frac{2\pi nk}{N}\right),$$

где $N = 2^m$, $M = m$. Здесь и далее символ « \prime » не означает дифференцирование.

Шаг 7. Для нечетного вейвлета путем $M + 1$ обратных преобразований Фурье от комплексно-сопряженного спектра по формулам (7), (8) вычисляется функция S'_m :

$$S'_m(n) = \sum_{k=0}^{N-1} (c_1(k) + ic_2(k)) \exp\left(i \frac{2\pi nk}{N}\right),$$

где $N = 2^m$, $M = m$.

Шаг 8. Нормализующий коэффициент обратного вейвлет-преобразования C в разработанном алгоритме вычисляется из аналога теоремы Парсеваля для вейвлет-коэффициентов:

$$\int S(t) S^*(t) dt = C^{-1} \int W(a, b) W^*(a, b) \frac{dad b}{a^2}.$$

Шаг 9. По формуле $S(n) = C \sum_{m=0}^m S'_m(n)$ реконструируется сигнал.

Вычисление коэффициентов $a_2(n)$ и $b_2(n)$ производится только для вейвлетов, а не для исследуемого сигнала. Исходя из этого, они могут быть вычислены заранее, а результаты расчетов могут храниться в запоминающем устройстве. Для четных вейвлетов не выполняются шаги 4 и 7, для нечетных — шаги 3 и 6. Количество необходимой памяти для хранения вейвлет-коэффициентов из-за четности или нечетности в два раза меньше для каждого масштабного коэффициента a . Так же, как для алгоритма численного вычисления прямого вейвлет-преобразования, количество преобразований Фурье при обратном вейвлет-преобразовании может быть очень большим.

При конструировании строго ортогональных вейвлетов с прямоугольной амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) ширину полосы пропускания надо подбирать, для того чтобы добротность была одинаковой для всех уровней разложения. В некоторых случаях, когда разрешающая способность вейвлетов должна

быть высокой, можно сконструировать вейвлеты с переменной добротностью.

Аналитическую формулу для предложенного вейвлета невозможно получить в прямом виде, так как он рассчитывается в результате численного решения [17]. Например, вейвлеты Добеши также получаются в результате численного вычисления. Предложенные алгоритмы численного вычисления прямого и обратного вейвлет-преобразований в частотной области подобны оконному преобразованию Фурье, если вместо вейвлета использовать окна постоянной ширины на основе производных функций Гаусса.

Сравнение точности реконструкции сигналов с применением различных вейвлетов

Для наглядной демонстрации точности сравним результат декомпозиции и реконструкции прямоугольного одинарного импульса длительностью 36 единиц для выборки 1024 отсчетов. Получим результат декомпозиции и реконструкции двух прямоугольных импульсов с очень большой разницей амплитуд. Точно восстановить сигнал прямоугольной формы наиболее трудная задача, потому что спектр такого сигнала плохо уменьшается на высоких частотах, а для пологих сигналов спектр более уже, и поэтому такие сигналы точнее реконструируются. Форма прямоугольного сигнала наиболее сильно искажается около краев. Можно судить о точности по тому, как сильно отличается форма прямоугольника после реконструкции.

При использовании вейвлетов на основе производных функции Гаусса форма реконструированного сигнала не точно повторяет оригинальный прямоугольный импульс, т. е. импульс немного смещается вниз. На рис. 1, *a* представлена часть участка слева от прямоугольного импульса после декомпозиции на 10 уровней и последующей реконструкции со всеми уровнями с использованием вейвлета Добеши (db2) в алгоритме Малла. На рис. 1, *b* представлена эта же часть участка, но реконструированная с использованием вейвлета, сконструированного в частотной области. На рис. 1, *a* представлена только часть левого края импульса, что-

бы было видно, насколько отличаются значения реконструированного сигнала от нуля. В верхней части импульса значение его равно единице и потому, если показывать импульс, то рядом нельзя будет увидеть ничего, кроме прямой линии, кажущейся равной нулю. В логарифмическом масштабе график нельзя построить, так как есть отрицательные величины. На рис. 1, *a* видно, что нули отличаются в среднем на $2 \cdot 10^{-13}$. При увеличении порядка вейвлета Добеши это отличие еще больше, например, для вейвлета db40 разница доходит до 10^{-6} . Очевидно, это связано с необходимостью решать большее число уравнений для получения первых моментов нулевого порядка у вейвлетов Добеши. На рис. 1, *b* представлена часть участка слева от прямоугольного импульса после декомпозиции на 10 уровней и последующей реконструкции со всеми уровнями с использованием вейвлета, сконструированного в частотной области. Видно, что точность реконструкции импульса намного выше. Здесь отличие от нуля почти в тысячи раз меньше, чем при обработке с использованием алгоритма Малла, поэтому можно сказать, что преобразование строго ортогональное.

На рис. 2 представлен импульс, амплитуда которого в 10^{15} раз меньше, чем соседний прямоугольный импульс. Этот импульс деформирован из-за того, что при декомпозиции и последующей реконструкции нули рядом с большим импульсом не точно равны нулю (рис. 1, *b*). При реконструкции двух импульсов с разницей в 10^{15} с использованием алгоритма Малла, малый импульс нельзя увидеть, так как погрешность вычисления почти в 1000 раз больше, чем этот импульс. График будет такой же, как на рис. 1, *a*. Можно сказать, что малый импульс «утопает» в шуме вычисления.

Импульсные и амплитудно-частотные характеристики синтезированных КИХ-фильтров методом конструирования вейвлетов

Для того чтобы удостовериться, что метод конструирования вейвлетов можно использовать для синтеза цифровых КИХ-фильтров, выполнено исследование по свертке ИХ с различными сигналами. При вейвлет-пре-

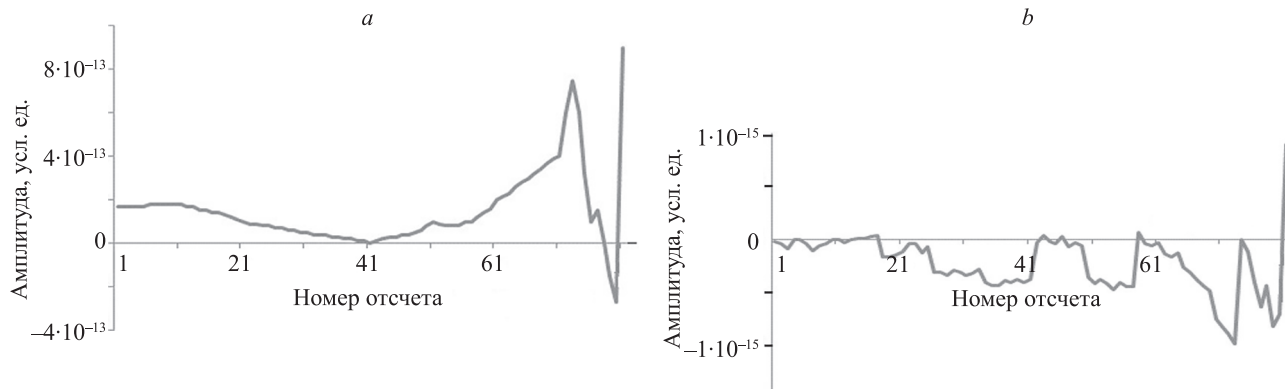


Рис. 1. Часть участка слева от прямоугольного импульса, реконструированного с использованием вейвлетов Добеши (db2) (*a*) и с прямоугольной амплитудно-частотной характеристикой (*b*)

Fig. 1. The part of the section to the left of the rectangular pulse reconstructed using a Daubechies wavelet (db2) (*a*) and a wavelet with a rectangular frequency response (*b*)

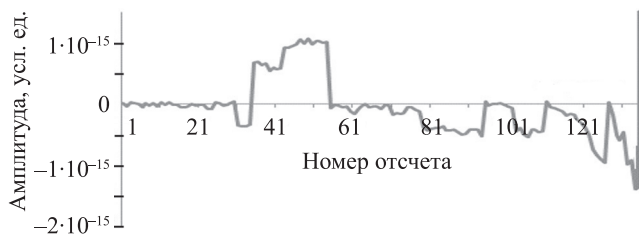


Рис. 2. Импульс, у которого амплитуда в 10^{15} раз меньше, чем соседний прямоугольный импульс после обработки с использованием вейвлета, сконструированного в частотной области

Fig. 2. An impulse with amplitude 10^{15} times smaller than the neighboring rectangular pulse after processing using a wavelet constructed in the frequency domain

образовании сигнала обычно длины N вейвлета (ИХ) и сигнала L равны. В результате необходимо вычислить свертку ИХ с сигналом в несколько раз большей длины, так как при цифровой фильтрации так чаще всего происходит. Если пропустить сигнал через различные фильтры, у которых суммарная полоса частот превышает диапазон частот сигнала, то при суммировании всех отсчетов, прошедших через каждый фильтр, полученный выходной сигнал должен быть пропорционален входному сигналу или тождественен. Это условие передачи сигнала без искажений, т. е. выходной сигнал должен быть копией входного сигнала. Например, были вычислены свертки ИХ с сигналом для фильтра нижних частот, двух полосовых и высокочастотных фильтров с одинаковой полосой пропускания, которые полностью перекрывали интервал $[0, f_d/2]$. Даже для сигнала, представляющего одиночный импульс, сумма всех сверток давала точную копию входного сигнала. Длина ИХ N равна 128 отсчетам, а длина сигнала L — 1024 отсчетам. Длительность импульса равна 28 отсчетам. После суммирования всех отсчетов, прошедших от каждого фильтра, получилось, что импульс и амплитуда равны длительности 28 отсчетов, вид сигнала — прямоугольной формы. Для того чтобы соблюдалось условие физической реализуемости фильтров, отсчеты выходного сигнала учитывались, начиная с половины длины ИХ.

И при других соотношениях N и L выходной сигнал при свертке входного сигнала с ИХ фильтров нижних частот, двух полосовых и высоких частот с одинаковой полосой пропускания является копией входного сигнала. Так же вычислялась свертка ИХ фильтров с зашумленным сигналом. Во всех случаях наблюдалось увеличение отношения сигнал/шум. Исследования показали, что синтезированные ИХ можно использовать для фильтрации сигналов.

Этим же методом допустимо синтезировать ИХ многополосных фильтров. На рис. 3 показана часть симметричной ИХ для фильтра с двумя полосами пропускания и АЧХ этого фильтра. Если бы была только одна полоса низких частот, то ИХ была бы гладкой функцией. Наличие второй полосы накладывает на функцию низких частот быстро осциллирующую функцию, т. е. ИХ равна сумме двух ИХ, полученных для каждого по отдельности фильтров. На графиках АЧХ рис. 3–5 частоты нормированы.

На рис. 4 представлена часть антисимметричной ИХ для фильтра с тремя полосами пропускания и АЧХ этого фильтра.

На рис. 3 и 4 видно, что АЧХ имеют прямоугольную форму, и нет пульсаций в полосе пропускания и задерживания. Независимо от длины ИХ переходной полосы нет.

На рис. 5 показана часть симметричной ИХ для фильтра с треугольной АЧХ и АЧХ этого фильтра. Видно, что на рис. 5 также нет переходной полосы.

Рассмотренные цифровые фильтры можно использовать для обработки изображений по строкам и столбцам. Двумерную свертку лучше выполнять в частотной области с применением БПФ, так как в этом случае скорость и точность вычисления возрастает из-за того, что уменьшается количество операций умножений и сложений. При синтезе фильтров не надо задавать максимально допустимое отклонение от единицы в полосе пропускания и максимально допустимое отклонение от нуля в полосе задерживания. Достаточно задать частоты среза для каждого фильтра отдельно. Синтез фильтров осуществлять относительно просто. Не надо применять различные окна и программы оптимизации.

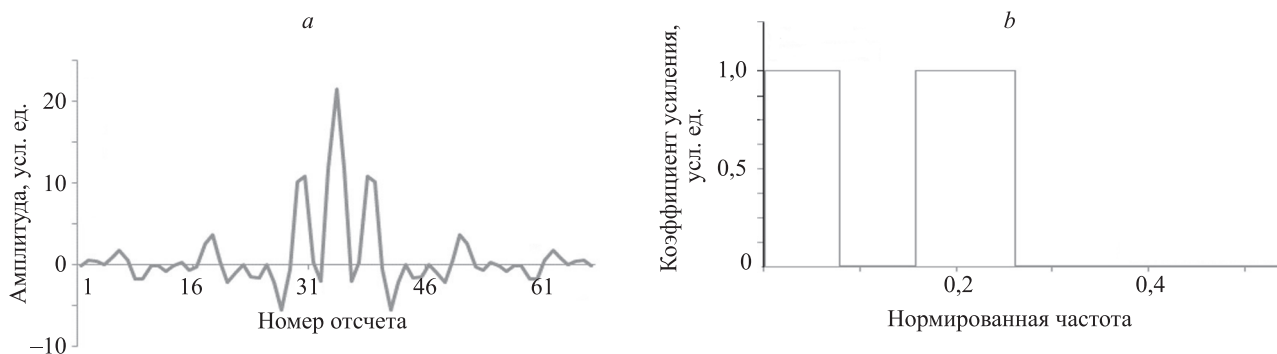


Рис. 3. Симметричная импульсная характеристика (а) и амплитудно-частотная характеристика (b) фильтра с двумя полосами пропускания

Fig. 3. Symmetrical pulse response (a) and frequency response of a two-band filter (b)

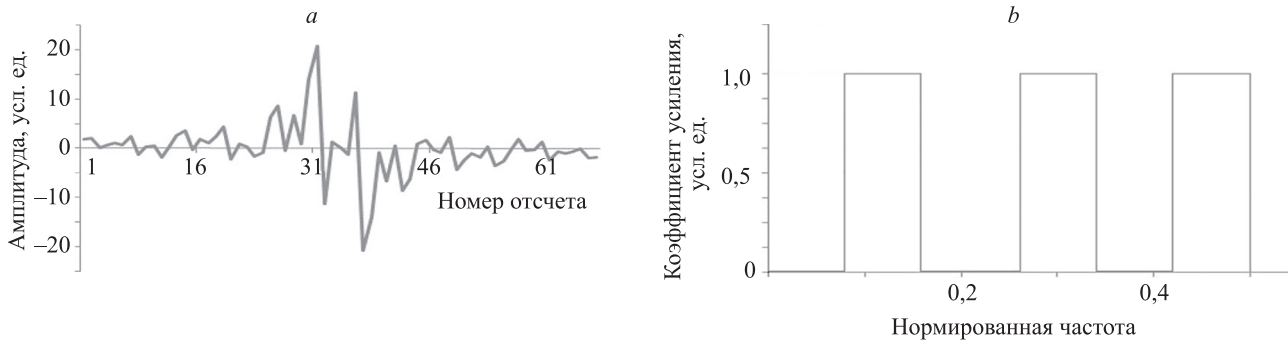


Рис. 4. Антисимметричная импульсная характеристика (a) и амплитудно-частотная характеристика (b) фильтра с тремя полосами пропускания

Fig. 4. Antisymmetrical pulse response (a) and frequency response (b) of a three-band filter

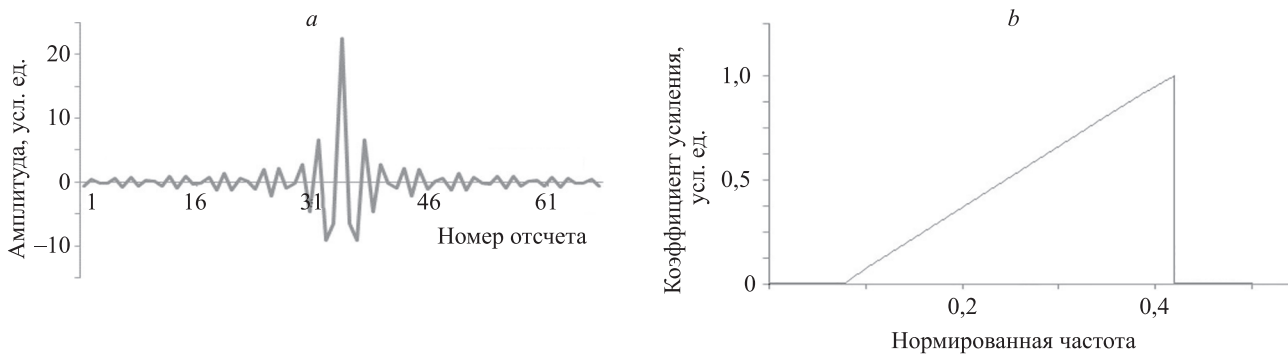


Рис. 5. Симметричная импульсная характеристика (a) и амплитудно-частотная характеристика (b) фильтра с треугольной амплитудно-частотной характеристикой

Fig. 5. Symmetrical impulse response (a) and frequency response (b) of a filter with a triangular frequency response

Заключение

Сконструированные вейвлеты с прямоугольной амплитудно-частотной характеристикой позволяют более точно реконструировать одномерные и двумерные сигналы, чем вейвлеты Добеши, используемые при кратномасштабном анализе в алгоритме Малла. Также полученные вейвлеты позволяют быстрее, чем в алгоритме Малла, производить декомпозицию и реконструкцию сигналов. Метод конструирования вейвлетов можно использовать для синтеза цифровых фильтров с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтров) и с линейной фазочастотной характеристикой. По сравнению с существующими методами синтеза КИХ-фильтров, использование метода конструирования вейвлетов более предпочтителен, так как этот метод относительно прост, но вместе с тем позволяет получать фильтры с прямоугольной амплитудно-частотной характеристикой. Коэффициент прямоугольности полученных частотных характеристик равен единице, т. е. нет пе-

реходной полосы независимо от длины импульсной характеристики. Если при синтезе существующими методами можно получить короткую переходную полосу только для длинных импульсных характеристик, то методом конструирования вейвлетов даже для фильтров очень маленьких порядков нет переходной полосы. Также пульсации в полосе пропускания и задерживания фильтров, синтезированных методом конструирования вейвлетов на несколько порядков ниже, чем у фильтров, синтезированных существующими методами. Относительно легко получить многополосные фильтры с любой формой амплитудно-частотной характеристики. Коэффициент усиления может меняться в разных полосах пропускания различным образом. Можно построить ступенчатые, линейные или гиперболические зависимости частотной характеристики. Немаловажно и то, что для синтеза фильтров не надо тратить много времени, потому что по сравнению с существующими методами многие этапы проектирования отсутствуют.

Литература

1. Palani S. Design of finite impulse response (FIR) digital filters // *Discrete Time Systems and Signal Processing*. Springer, Cham, 2023. P. 591–732. https://doi.org/10.1007/978-3-031-32421-5_5
2. Berber S. Theory of the design, and operation of digital filters // *Discrete Communication Systems*. Oxford University Press, 2021. P. 797–823. <https://doi.org/10.1093/oso/9780198860792.003.0016>
3. Kennedy H.L. Lecture notes on the design of low-pass digital filters with wireless-communication applications // *arXiv*. 2022. arXiv:2211.07123. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2211.07123>
4. Agrawal N., Kumar A., Bajaj V., Singh G.K. Design of digital IIR filter: A research survey // *Applied Acoustics*. 2021. V. 172. P. 107669. <https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2020.107669>
5. Penedo S.R.M., Netto M.L., Justo J.F. Designing digital filter banks using wavelets // *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*. 2019. P. 33. <https://doi.org/10.1186/s13634-019-0632-6>
6. Āuriš V., Semenov V.I., Chumarov S.G. Application of Continuous Fast Wavelet Transform for Signal Processing. London: Sciemcee Publishing, 2021. 181 p.
7. Солонина А.И., Клионский Д.М., Меркучева Т.В., Перов С.Н. Цифровая обработка сигналов и MATLAB: учеб. пособие. СПб.: БХВ-Петербург, 2013. 512 с.
8. Daubechies I. *Ten Lectures on Wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992. 357 p.
9. Mallat S.G. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. San Diego, CA, USA: Academic Press, 1999. 620 p.
10. Новиков Л.В. Основы вейвлет-анализа сигналов. М.: ИАНП РАН, 1999. 152 с.
11. Желтов П.В., Семенов В.И. Вейвлет-анализ акустического сигнала // *Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева*. 2008. № 4. С. 68–71.
12. Желтов П.В., Семенов В.И., Трофимова А.И., Шурбин А.К. Алгоритмы идентификации фонем и формирования слова в системах распознавания речи на основе вейвлет-преобразования // *Вестник Чувашского университета*. 2014. № 2. С. 98–102.
13. Шумарова О.С., Игнатъев С.А. Оптимальный выбор вида вейвлета при обработке сигнала с вихретокового датчика // *Вестник Саратовского государственного технического университета*. 2013. Т. 4. № 1(73). С. 128–132.
14. Āuriš V., Chumarov S.G., Mikheev G.M., Mikheev K.G., Semenov V.I. The orthogonal wavelets in the frequency domain used for the images filtering // *IEEE Access*. 2020. V. 8. P. 211125–211134. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3039373>
15. Āuriš V., Semenov V.I., Chumarov S.G.. Wavelets and digital filters designed and synthesized in the time and frequency domains // *Mathematical Biosciences and Engineering*. 2022. V. 19. N 3. P. 3056–3068. <https://doi.org/10.3934/mbe.2022141>
16. Āuriš V., Chumarov S.G., Semenov V.I. Increasing the speed of multiscale signal analysis in the frequency domain // *Electronics*. 2023. V. 12. N 3. P. 745. <https://doi.org/10.3390/electronics12030745>
17. Семенов В.И., Чумаров С.Г. Уменьшение времени обратного вейвлет-преобразования изображения с применением симметричного ортогонального вейвлета. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2023664790. 07.07.2023.

Авторы

Семенов Владимир Ильич — кандидат технических наук, доцент, доцент, Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова, Чебоксары, 428015, Российская Федерация, [sc 57220088140](https://orcid.org/0000-0001-8968-7459), <https://orcid.org/0000-0001-8968-7459>, syundyukovo@yandex.ru

Чумаров Сергей Геннадьевич — кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой, Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова, Чебоксары, 428015, Российская Федерация, [sc 57212552735](https://orcid.org/0000-0002-4946-3685), <https://orcid.org/0000-0002-4946-3685>, chumarov@mail.ru

Статья поступила в редакцию 23.01.2024
Одобрена после рецензирования 26.02.2024
Принята к печати 24.03.2024

References

1. Palani S. Design of finite impulse response (FIR) digital filters. *Discrete Time Systems and Signal Processing*. Springer, Cham, 2023, pp. 591–732. https://doi.org/10.1007/978-3-031-32421-5_5
2. Berber S. Theory of the design, and operation of digital filters. *Discrete Communication Systems*. Oxford University Press, 2021, pp. 797–823. <https://doi.org/10.1093/oso/9780198860792.003.0016>
3. Kennedy H.L. Lecture notes on the design of low-pass digital filters with wireless-communication applications. *arXiv*, 2022, arXiv:2211.07123. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2211.07123>
4. Agrawal N., Kumar A., Bajaj V., Singh G.K. Design of digital IIR filter: A research survey. *Applied Acoustics*, 2021, vol. 172, pp. 107669. <https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2020.107669>
5. Penedo S.R.M., Netto M.L., Justo J.F. Designing digital filter banks using wavelets. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2019, pp. 33. <https://doi.org/10.1186/s13634-019-0632-6>
6. Āuriš V., Semenov V.I., Chumarov S.G. *Application of Continuous Fast Wavelet Transform for Signal Processing*. London, Sciemcee Publishing, 2021, 181 p.
7. Solonina A.I., Klionskii D.M., Merkucheva T.V., Perov S.N. *Digital Signal Processing and MATLAB*. St. Petersburg, BHV-Petersburg, 2013, 512 p. (in Russian)
8. Daubechies I. *Ten Lectures on Wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992, 357 p.
9. Mallat S.G. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. San Diego, CA, USA, Academic Press, 1999, 620 p.
10. Novikov L.V. *Basics of Wavelet Signal Analysis*. Moscow, The Institute for Analytical Instrumentation RAS, 1999, 152 p. (in Russian)
11. Zheltov P.V., Semyonov V.I. *Wavelet analysis of acoustic signals*. Vestnik of KNRTU a.n. A.N.Tupolev, 2008, no. 4, pp. 68–71. (in Russian)
12. Zheltov P., Semenov V., Trofimova A., Shurbin A. Algorithms for phoneme identification and forming the word in a speech recognition system based on wavelet-transform. *Bulletin of Chuvash University*, 2014, no. 2, pp. 98–102. (in Russian)
13. Shumarova O.S., Ignatyev S.A. Optimum choice of a wavelet when processing signals of eddy current sensors. *Vestnik SGTU*, 2013, vol. 4, no. 1(73), pp. 128–132. (in Russian)
14. Āuriš V., Chumarov S.G., Mikheev G.M., Mikheev K.G., Semenov V.I. The orthogonal wavelets in the frequency domain used for the images filtering. *IEEE Access*, 2020, vol. 8, pp. 211125–211134. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3039373>
15. Āuriš V., Semenov V.I., Chumarov S.G.. Wavelets and digital filters designed and synthesized in the time and frequency domains. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2022, vol. 19, no. 3, pp. 3056–3068. <https://doi.org/10.3934/mbe.2022141>
16. Āuriš V., Chumarov S.G., Semenov V.I. Increasing the speed of multiscale signal analysis in the frequency domain. *Electronics*, 2023, vol. 12, no. 3, pp. 745. <https://doi.org/10.3390/electronics12030745>
17. Semenov V.I., Chumarov S.G. Reducing the time of inverse wavelet transform of an image using a symmetric orthogonal wavelet. *Certificate of registration of a computer program RU 2023664790*, 07.07.2023. (in Russian)

Authors

Vladimir I. Semenov — PhD, Associate Professor, Associate Professor, Chuvash State University named after I.N. Ulyanov, Cheboksary, 428015, Russian Federation, [sc 57220088140](https://orcid.org/0000-0001-8968-7459), <https://orcid.org/0000-0001-8968-7459>, syundyukovo@yandex.ru

Sergey G. Chumarov — PhD, Associate Professor, Head of Department, Chuvash State University named after I.N. Ulyanov, Cheboksary, 428015, Russian Federation, [sc 57212552735](https://orcid.org/0000-0002-4946-3685), <https://orcid.org/0000-0002-4946-3685>, chumarov@mail.ru

Received 23.01.2024
Approved after reviewing 26.02.2024
Accepted 24.03.2024

