3 АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

УДК 681.513.6

АДАПТИВНЫЙ РЕГУЛЯТОР СТАБИЛИЗАЦИИ ПРОСТОЙ СТРУКТУРЫ[1]

В.О. Никифоров, Д.Н. Герасимов

Для линейного стационарного многомерного объекта, представленного нижней треугольной канонической формой, предложен адаптивный регулятор стабилизации. Особенностью предложенного регулятора является простота его структуры – регулятор содержит всего один настраиваемый параметр и один простой алгоритм адаптации интегрального типа. Представлены робастные модификации регулятора, приведены результаты моделирования.

Ключевые слова: линейный объект, нижняя треугольная форма, адаптивное и робастное управление.

Введение

В современной теории адаптивного управления предложено решение многих сложных задач: адаптивного управления линейными объектами по выходу с использованием схемы расширенной ошибки [1–3] или алгоритмов адаптации высокого порядка [4–6], адаптивного управления нелинейными объектами с использованием итеративной процедуры синтеза «обратного обхода интеграторов» [3, 7, 8], робастного управления в условиях внешних возмущений [3, 9], адаптивной компенсации заранее неизвестных детерминированных возмущений [6, 10, 11] и т.д.

Одним из основных недостатков большинства предложенных систем адаптивного управления является сложная структура адаптивных регуляторов. Так, динамический порядок адаптивного регулятора с расширенной ошибкой равен $2n(n-m+2)-1$ (где n – степень знаменателя передаточной функции объекта управления, а m – степень числителя передаточной функции), а для расчета сигнала управления требуется выполнение $10n+3$ операций умножения и одной операции деления [3]. Очевидно, что реализация на практике регуляторов высокого динамического порядка, содержащих большое число нелинейных элементов (перемножения и деления), весьма затруднительна, несмотря на практические успехи развития микропроцессорных систем управления. В связи с этим одной из актуальных задач современной теории адаптивного управления является синтез достаточно простых и эффективных алгоритмов адаптивного управления.

Для линейного стационарного многомерного объекта с неизвестными параметрами, представленного нижней треугольной канонической формой, предложен регулятор адаптивной стабилизации простой структуры: адаптивный регулятор содержит всего один настраиваемый параметр и один простой алгоритм адаптации интегрального типа. Принцип построения регулятора основан на использовании идеи «большого коэффициента усиления». Представлены также робастные модификации регулятора, обеспечивающие ограниченность траекторий замкнутой системы, действующей в условиях внешних возмущений.

Постановка задачи

Рассматривается линейный объект управления вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{e}_n \mathbf{u}, \tag{1}$$

где $\mathbf{x} \in R^n$ – вектор состояния, доступный для прямых измерений, $\mathbf{e}_i$ – n-мерный единичный вектор с единицей на i-м месте, u – сигнал управления, а матрица системы имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ a_{n-11} & a_{n-12} & a_{n-13} & \dots & 1 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Параметры матрицы a_{ij} считаются неизвестными. Пара $(\mathbf{A}, \mathbf{e}_n)$ является полностью управляемой, а пара $(\mathbf{e}_1^T, \mathbf{A})$ – полностью наблюдаемой. Требуется синтезировать стабилизирующее управление в форме обратной связи по состоянию, обеспечивающее выполнение целевого условия

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = 0 . \tag{3}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (соглашение №14.B37.21.0406)

Вспомогательный результат

Утверждение 1. *Для пары* $n \times n$ *матриц* $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{G}(\theta)$, *где* $\mathbf{B}$ *– произвольная нижняя треугольная матрица, т.е.*

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

с постоянными коэффициентами $b_{i,j}$, *а* $\mathbf{G}(\theta)$ *– сопровождающая матрица характеристического полинома от комплексной переменной* p *в форме бинома Ньютона*

$$D(p,\theta) = \left(p+\theta\right)^n = p^n + C_{n-1}\theta p^{n-1} + C_{n-2}\theta^2 p^{n-2} + \ldots + C_1\theta^{n-1} p + \theta^n, \quad (4)$$

т.е.

$$\mathbf{G}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\theta^n & -C_1\theta^{n-1} & \dots & -C_{n-1}\theta \end{bmatrix}, \quad (5)$$

существует такое число $\theta_0 > 0$, *что для всех* $\theta > \theta_0$ *матрица*

$$\mathbf{S} = \mathbf{B} + \mathbf{G}(\theta)$$

является гурвицевой.

В формулах (4) и (5) C_{n-j} – коэффициент бинома Ньютона степени n, стоящий при j-й степени переменной θ (при этом $C_n = 1$ и $C_0 = 1$).

Доказательство. Пусть

$$R(p) = \det\left(p\mathbf{I} - \mathbf{B}\right) = p^n + r_{n-1}p^{n-1} + \ldots r_1 p + r_0 \quad (6)$$

– характеристический полином матрицы $\mathbf{B}$, а r_j – его постоянные коэффициенты. Тогда можно показать, что характеристический полином $N(p,\theta)$ матрицы $\mathbf{S}$ можно представить в следующем виде:

$$N(p,\theta) = \det\left(p\mathbf{I} - \mathbf{S}\right) = \det\left(p\mathbf{I} - \mathbf{B} - \mathbf{G}(\theta)\right) = p^n + \left(C_{n-1}\theta + r_{n-1}\right)p^{n-1} +$$
$$\left(C_{n-2}\theta^2 + r_{n-2} + \alpha_{n-2}(\bar{r}, \bar{\theta}_1, \bar{C}_1)\right)p^{n-2} + \left(C_{n-3}\theta^3 + r_{n-3} + \alpha_{n-3}(\bar{r}, \bar{\theta}_2, \bar{C}_2)\right)p^{n-3} + \ldots$$
$$\ldots + \left(C_1\theta^{n-1} + r_1 + \alpha_1(\bar{r}, \bar{\theta}_{n-2}, \bar{C}_{n-2})\right)p + \theta^n + r_0 + \alpha_0(\bar{r}, \bar{\theta}_{n-1}, \bar{C}_{n-1}),$$

где $\bar{r}$ – множество всех коэффициентов характеристического полинома (6); $\bar{\theta}_j$ – множество всех степеней θ^j ($j = \overline{0, j}$); $\bar{C}_j$ – множество всех коэффициентов C_{n-j} ($j = \overline{1, n-1}$); $\alpha_{n-j}(\bar{r}, \bar{\theta}_{j-1}, \bar{C}_{j-1})$ – сумма соответствующих коэффициентов r_i, степеней θ^i и коэффициентов C_i.

Так как члены α_{n-j} содержат настраиваемые коэффициенты θ степени $j-1$, а стоящие с ними в скобках при тех же степенях комплексной переменной p коэффициенты гурвицева характеристического полинома $D(p,\theta)$ содержат настраиваемые коэффициенты θ степени j, то справедливо следующее равенство:

$$\lim_{\theta\to\infty} N(p,\theta) = D(p,\theta).$$

Последнее означает, что полином $N(p,\theta)$ является гурвицевым при бесконечно больших значениях коэффициента θ. Однако свойство экспоненциальной устойчивости (задаваемое гурвицевым полиномом $D(p,\theta)$) является грубым, т.е. выполняется при некоторых отклонениях коэффициентов характеристического полинома от их номинальных значений. По этой причине полином $N(p,\theta)$ будет гурвицевым при конечных значениях достаточно большого коэффициента θ. Утверждение доказано.

Структура регулятора

Сформируем адаптивный регулятор в виде

$$u = -\theta^n x_1 - C_1\theta^{n-1}x_2 - \ldots - C_{n-2}\theta^2 x_{n-2} - C_{n-1}\theta x_n, \quad (7)$$

где постоянные коэффициенты C_j – коэффициенты характеристического полинома (4) (т.е. коэффициенты бинома Ньютона), а настраиваемый параметр θ генерируется алгоритмом адаптации

$$\dot{\theta} = \gamma x_1^2 \qquad (8)$$

с постоянным положительным коэффициентом усиления γ.

Замечание. Управление (7) может быть записано в «свернутой» форме, минимизирующей при практической реализации число операций взаимного перемножения настраиваемого параметра θ:

$$u = -\theta\left(C_{n-1}x_n + \theta\left(C_{n-2}x_{n-1} + \theta\left(C_{n-3}x_{n-2} + \ldots \theta x_1\right)\right)\right). \qquad (9)$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. *Адаптивный регулятор* (7), (8) *при любых* $\gamma > 0$ *и* $\theta(0)$ *обеспечивает для объекта управления* (1) *с произвольными начальными условиями* $x(0)$ *выполнение целевого условия* (3).

Доказательство. Нетрудно убедиться, что матрица замкнутой системы, состоящей из объекта (1) и регулятора (7), имеет вид

$$\mathbf{A} + \mathbf{e}_n\left[-\theta^n, -C_1\theta^{n-1}, \ldots -C_{n-2}\theta^2, -C_{n-1}\theta\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ a_{n-11} & a_{n-12} & a_{n-13} & \ldots & 1 \\ a_{n1} - \theta^n & a_{n2} - C_1\theta^{n-1} & a_{n3} - C_2\theta^{n-2} & \ldots & a_{nn} - C_{n-1}\theta \end{bmatrix}.$$

Иначе говоря, по своей структуре она соответствует матрице $\mathbf{S}$ из утверждения 1. В силу полной наблюдаемости пары $\left(\mathbf{e}_1^T, \mathbf{A}\right)$ измерения переменной x_1, использующегося в алгоритме адаптации, достаточно для установления факта неустойчивости объекта управления. Так как переменная x_1 входит в алгоритм адаптации в четной (второй) степени, то любое ненулевое значение x_1 будет приводить к росту настраиваемого параметра θ, который, в соответствии с утверждением 1, будет расти до тех пор, пока характеристический полином замкнутой системы не станет гурвицевым. Объект управления является линейным, поэтому никаких требований на скорость настройки параметров не накладывается, и стабилизация замкнутого объекта управления может быть обеспечена при любых $\gamma > 0$. Утверждение доказано.

Таким образом, предложен достаточно простой регулятор (7) (или (9)) всего с одним настраиваемым параметром θ, генерируемым алгоритмом адаптации (8). Другими словами, показано, что для адаптивной стабилизации n-мерного динамического объекта, представленного в канонической нижней треугольной форме, можно использовать динамический регулятор первого порядка (в соответствии с порядком алгоритма адаптации (8)), содержащий в своей структуре n операций умножения (для «свернутой» формы (9)).

Робастная модификация

Рассмотрим объект управления, подверженный влиянию внешнего возмущения:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{e}_n\mathbf{u} + \delta, \qquad (10)$$

где $\delta = \delta(t)$ – заранее неизвестное ограниченное возмущение, а матрица $\mathbf{A}$ имеет вид (2). Поставим задачу обеспечения ограниченности всех траекторий объекта (1) и выполнения целевого условия

$$\left|x(t)\right| \le \Delta \quad \text{для всех } t > T_0 > 0, \qquad (11)$$

где Δ – произвольное наперед заданное положительное число.

Используя идеи робастного адаптивного управления [3], в случае возмущенного объекта (10) для достижения целевого условия (11) можно использовать регулятор (7) с модифицированным алгоритмом адаптации с параметрической обратной связью:

$$\dot{\theta} = -\sigma\theta + \gamma x_1^2, \qquad (12)$$

где σ – произвольное (малое) положительное число (коэффициент параметрической обратной связи).

Можно также показать, что для достижения целевого условия (11) можно использовать статический регулятор (7), параметры которого рассчитываются по формуле

$$\theta = \gamma x_1^2.$$

Результаты моделирования

Рассмотрим неустойчивый объект управления

$$\dot{x}_1 = 0{,}1x_1 + x_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + x_3,$$

$$\dot{x}_3 = 0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 - x_3 + u,$$

где числовые значения параметров при координатах вектора состояния считаются неизвестными. Для адаптивной стабилизации объекта используем адаптивный регулятор вида

$$u = -\theta^3 x_1 - 3\theta^2 x_2 - 3\theta x_3, \qquad (13)$$
$$\dot{\theta} = \gamma x_1^2 .$$

Результаты моделирования процессов стабилизации при $\gamma = 1$ и $x(0) = [1, 0, 0]^T$ приведены на рис. 1 и демонстрируют выполнение целевого условия (3).

Пусть теперь на вход объекта в соответствии с формулой (10) вместе с управлением поступает неизмеряемое возмущение $\delta(t) = 3\sin 2t$. Тогда для выполнения целевого условия (11) предлагается регулятор (13) с робастным алгоритмом адаптации (12). Результаты моделирования переходных процессов в замкнутой системе, подверженной влиянию внешнего возмущения при $\gamma = 1$, $\sigma = 0{,}1$ и $x(0) = [1, 0, 0]^T$, приведены на рис. 2 и демонстрируют небольшую установившуюся ошибку стабилизации, которая может быть уменьшена за счет увеличения коэффициента γ.

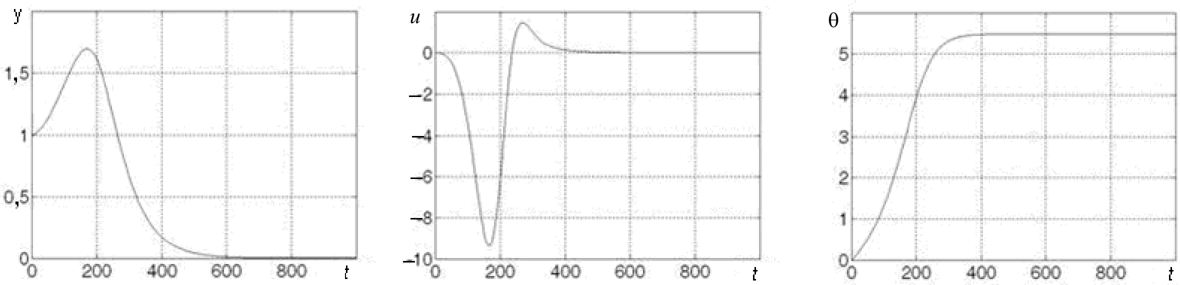

Рис. 1. Процессы в адаптивной системе стабилизации выходной переменной объекта (11) с регулятором (12) и алгоритмом адаптации (13) при $\gamma = 1$ и $x(0) = [1, 0, 0]^T$

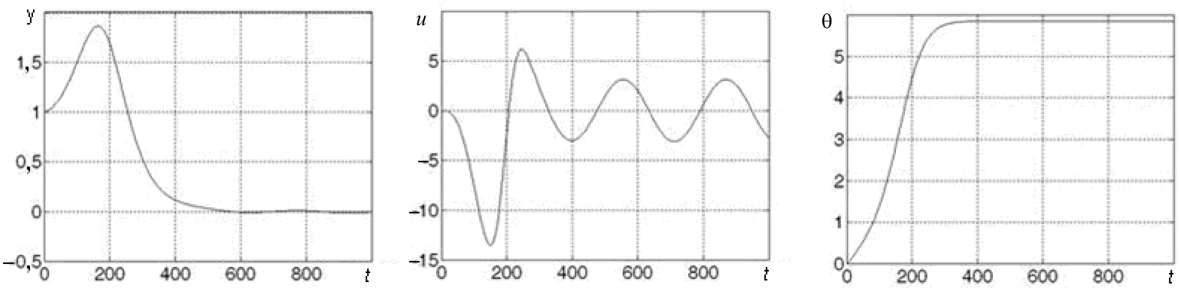

Рис. 2. Процессы в адаптивной системе стабилизации выходной переменной объекта (11) с регулятором (12) и алгоритмом адаптации (13) при действии возмущения $\delta(t) = 3\sin 2t$ и $\gamma = 1$ и $x(0) = [1, 0, 0]^T$

Заключение

В работе показано, что для адаптивной стабилизации n-мерного динамического объекта, представленного в канонической нижней треугольной форме, можно использовать адаптивный динамический регулятор первого порядка, содержащий в своей структуре n операций умножения. Насколько известно авторам, это наиболее простой (по критерию динамического порядка и числа используемых нелинейных операций) адаптивный регулятор стабилизации. Дальнейшее развитие предложенного подхода должно состоять в его расширении на задачи адаптивного слежения, а также управления динамическими объектами с неизмеряемым вектором состояния.

Литература

1. Narendra K.S., Annaswamy A.M. Stable Adaptive Systems. – Englewood Cliffs. N.J.: Prentice-Hall, 1989. – 495p.
2. Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Системы адаптивного управления с расширенной ошибкой // Автоматика и телемеханика. – 1994. – № 9. – С. 3–22.
3. Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. Серия «Анализ и синтез нелинейных систем» / Под ред. Г.А. Леонова и А.Л. Фрадкова. – СПб: Наука, 2000. – 549 с.
4. Morse A.S., Isidor A., Tarn T.J. (Eds.) Hight-order parameter tuners for adaptive control of nonlinear systems // Systems, Models and Feedback: Theory and Applications. – Birkhauser, 1992. – P. 339–264.

5. Nikiforov V.O. Robust high-order tuner of simplified structure // Automatica. – 1999. – V. 35. – № 8. – P. 1409–1415.
6. Никифоров В.О. Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. – СПб: Наука, 2003. – 282 с.
7. Kristic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P.V. Nonlinear and Adaptive control design. – N.Y.: John Wiley & Sons, 1995. – 563 p.
8. Никифоров В.О. Робастное управление линейным объектом по выходу // Автоматика и телемеханика. – 1998. – № 9. – С. 87–99.
9. Ioannou P.A., Kokotovic P.V. Instability analysis and improvement of robustness of adaptive control // Automatica. – 1984. – № 5. – P. 583–594.
10. Никифоров В.О. Адаптивная стабилизация линейного объекта, подверженного внешним детерминированным возмущениям // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1997. – № 2. – С.103–106.
11. Никифоров В.О. Адаптивная компенсация внешних детерминированных возмущений // Мехатроника, автоматизация и управление. – 2003. – № 5. – С. 8–12.

Никифоров Владимир Олегович – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, доктор технических наук, профессор, проректор, nikiforov@mail.ifmo.ru

Герасимов Дмитрий Николаевич – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, доцент, gerasimovdn@mail.ru