УДК 681.5

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ УСЛОВИЙ КАЧЕСТВЕННОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ОЦЕНКИ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Е.Ю. Рабыш, В.В. Григорьев, С.В. Быстров, А.В. Спорягин

На основе прямого метода Ляпунова и условий качественной экспоненциальной неустойчивости найдены оценки динамических показателей качества переходных процессов, позволившие создавать эффективные процедуры аналитического анализа многомерных неустойчивых непрерывных и дискретных систем управления.

Ключевые слова: качественная экспоненциальная неустойчивость, оценки качества, непрерывные и дискретные системы, анализ поведения неустойчивых систем, потеря управления.

Введение

Одной из актуальных проблем теории управления является анализ поведения неустойчивых систем управления (систем с параметрическими нарушениями). Результаты этого анализа являются ценными для принятия решений при выходе из строя автоматической системы управления, когда неустойчивая система управления может представлять собой существенную угрозу, опасность и для человека, и для окружающей среды. При проектировании такой опасной системы управления необходимо позаботиться о том, чтобы при потере управления, вызванной той или иной причиной, срабатывала система защиты и сигнализации, основанная на динамических свойствах самой системы управления и обеспечивающая минимизацию потерь, связанных с таким инцидентом. Для этого используется понятие качественной экспоненциальной неустойчивости, тесно связанной с качественными показателями процессов неустойчивых систем управления благодаря введению условий, ограничивающих фактически значения скорости изменения нормы вектора состояния системы, что непосредственно связано со степенью расходимости переходных процессов [1–4].

Постановка задачи

Пусть поведение непрерывной динамической системы описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t)\right), \tag{1}$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния динамической системы; $x(0) = x_0 \in R^n$ – вектор начальных состояний; $t \geq 0$ – время; $f(x)$ – n-мерная нелинейная вектор-функция векторного аргумента, такая, что при любых $x_0 \in R^n$ решение $x \in R^n$ уравнения (1) существует и единственно.

Непрерывная система (1) с положением равновесия $x = 0$ называется качественно экспоненциально (β, r) неустойчивой, если существуют такие параметры r $(r > 0)$ и β $(\beta > r)$, что для любых траекторий движения системы, исходящих из произвольных начальных условий $x_0 \in R^n$, в любой момент времени $t \geq 0$ выполняется условие

$$\left\| x(t) - e^{\beta \cdot t} \cdot x_0 \right\| \leq \rho \cdot \left(e^{[\beta + r] \cdot t} - e^{\beta \cdot t} \right) \cdot \left\| x_0 \right\|, \tag{2}$$

где $\rho \geq 1$. Здесь норма вектора задается соотношением

$$\|x\| = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right]^{1/2},$$

где x_i – i-ая компонента вектора состояния x.

Пусть поведение дискретной динамической системы описывается разностным уравнением

$$x(m+1) = f\left(x(m)\right), \tag{3}$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния динамической системы; $x(0) = x_0 \in R^n$ – вектор начальных состояний; $m = 0, 1, 2...$ – номер интервала дискретности; $f(x)$ – n-мерная нелинейная вектор-функция векторного аргумента, такая, что при любых $x_0 \in R^n$ решение $x \in R^n$ уравнения (1) существует и единственно. Дискретная система (3) с положением равновесия $x = 0$ называется качественно экспоненциально (β, r) неустойчивой, если существуют такие параметры r $(r > 0)$ и β $(\beta > 1 + r)$, что для любых траекторий движения системы, исходящих из произвольных начальных условий $x_0 \in R^n$, при которых для любого номера интервала дискретности $m \geq 0$ выполняется условие

$$\left\| x(m) - \beta^m \cdot x_0 \right\| \leq \rho \cdot \left((\beta + r)^m - \beta^m \right) \cdot \left\| x_0 \right\|, \tag{4}$$

где $\rho \geq 1$. Параметр β подобен коэффициенту сноса и для неустойчивых систем определяет среднюю скорость расходимости траекторий движения от начального состояния. Параметр r подобен коэффициенту диффузии и определяет отклонения траекторий движения от усредненной траектории.

Под критическим временем переходного процесса в непрерывных и дискретных динамических системах соответственно будем понимать значение $t = t_c$, такое, что

$$\|x(t)\| = \delta_c \cdot \|x_0\|, \tag{5}$$

$$\|x(m)\| = \delta_c \cdot \|x_0\|, \tag{6}$$

т.е. момент времени, в который переходной процесс выходит за заданную критическую δ_c-окрестность начального положения ($\delta_c > 1$). Выбор относительной величины окрестности δ_c определяется требованиями конкретной задачи и зависит от технологических параметров объекта управления. При этом критическое время переходного процесса для неустойчивых систем характеризует среднюю степень расходимости переходных процессов.

Под выбросом в непрерывных и дискретных динамических системах будем понимать величины σ_0 $(\sigma_0 \geq 1)$, определяемые соответственно уравнениями

$$\sigma_0 = \frac{\max_{t \in [0,\infty)} x_m(t)}{\|x_0\|}, \tag{7}$$

$$\sigma_0 = \frac{\max_{m \in [0,\infty)} x_m(m)}{\|x_0\|}, \tag{8}$$

где x_m – миноранта $\|x\|$, т.е. функция, ограничивающая снизу текущие значения нормы вектора состояния, так, что $x_m \leq \|x\|$ для любого момента времени. Выброс косвенно характеризует колебательность в неустойчивой динамической системе, т.е. разброс от средней степени расходимости. При значении σ_0, стремящимся к бесконечности, процесс носит монотонный характер.

Ставится задача на основе достаточных условий качественной экспоненциальной неустойчивости (2) и (4) для непрерывных и дискретных динамических систем, задаваемых уравнениями (1) и (3) соответственно, отыскать оценки динамических показателей качества в виде критического времени переходного процесса и выброса, которые совместно с достаточными условиями качественной экспоненциальной неустойчивости позволяли бы создать эффективные численные процедуры анализа неустойчивых динамических систем.

Основные результаты

В дальнейшем для оценки процессов будем использовать квадратичную функцию Ляпунова вида:

$$V(x) = x^T \cdot P \cdot x,$$

где P – симметрическая положительно определенная $n \times n$ матрица. Будем говорить, что функция Ляпунова квадратичная, если эта функция является выпуклой положительно однородной степени 2 и выполняется соотношение Релея:

$$\tilde{n}_1 \cdot \|x\|^2 \leq V(x) \leq \tilde{n}_2 \cdot \|x\|^2,$$

где значения $\tilde{n}_1$ и $\tilde{n}_2$ являются минимальным и максимальным собственными числами матрицы P соответственно. Выпуклая положительно однородная функция степени 2 обладает следующими свойствами:

$$V(0) = 0, V(\gamma x) = \gamma^2 V(x),$$

при любых $\gamma > 0$ и при любых $x_0 \in R^n$.

Непрерывная система (1) с положением равновесия $x = 0$ качественно экспоненциально (β, r) неустойчива, если существуют такая квадратичная функция Ляпунова и такие параметры r $(r > 0)$ и β $(\beta > r)$, что для любых траекторий движения системы, исходящих из произвольных начальных условий $x_0 \in R^n$, в любой момент времени $t \geq 0$ выполняется условие

$$V\left(\frac{d}{dt}x(t) - \beta \cdot x(t)\right) \leq r^2 \cdot V(x(t)).$$

Дискретная система (3) с положением равновесия $x = 0$ качественно экспоненциально (β, r) неустойчива, если существуют такая квадратичная функция Ляпунова и такие параметры r $(r > 0)$ и β

$(\beta > 1 + r)$, что для любых траекторий движения системы, исходящих из произвольных начальных условий $x_0 \in R^n$, для любого номера интервала дискретности $m \geq 0$ выполняется условие

$$V\left(x(m+1) - \beta \cdot x(m)\right) \leq r^2 \cdot V\left(x(m)\right).$$

Утверждение 1. Оценки критического времени переходного процесса и выброса для непрерывных динамических систем имеют вид

$$t_c = \frac{1}{\beta} \cdot \ln(\delta_c), \quad (9)$$

$$\sigma_0 = (\rho+1) \cdot e^{\frac{\beta}{r} \cdot \ln\left(\frac{(\rho+1)\cdot\beta}{\rho\cdot(\beta+r)}\right)} - \rho \cdot e^{\frac{(\beta+r)}{r} \cdot \ln\left(\frac{(\rho+1)\cdot\beta}{\rho\cdot(\beta+r)}\right)}. \quad (10)$$

Утверждение 2. Оценки критического времени переходного процесса и выброса для дискретных динамических систем имеют вид

$$t_c = T \cdot \log_\beta(\delta_c), \quad (11)$$

$$\sigma_0 = (\rho+1) \cdot \beta^{\log_{\left(\frac{\beta+r}{r}\right)}\left(\frac{(\rho+1)\cdot\ln\beta}{\rho\cdot\ln(\beta+r)}\right)} - \rho \cdot (\beta+r)^{\log_{\left(\frac{\beta+r}{r}\right)}\left(\frac{(\rho+1)\cdot\ln\beta}{\rho\cdot\ln(\beta+r)}\right)}. \quad (12)$$

Здесь T – интервал квантования.

Доказательства утверждений приведены в Приложении.

Приведем алгоритм аналитического анализа динамических свойств неустойчивых непрерывных и дискретных систем с исходными данными – матрицей описания замкнутой системы F_u.

1. По заданным показателям качества t_c и σ_0 при $\rho = 1$ определить значения параметров β и r.

3. Как для непрерывных, так и для дискретных систем проверить выполнение условия:

$$\max_i \lambda_i \leq 0, i = 1, 2, .., n, \quad (13)$$

где λ_i определяется из характеристического уравнения

$$\det\left[\left[(F_u - \beta I)^T (F_u - \beta I) - r^2 I\right] - \lambda_i\right] = 0,$$

где I – единичная $n \times n$ матрица. Если условие (13) выполняется, то выполняются и заданные оценки качества переходных процессов.

Для демонстрации эффективности предлагаемого алгоритма представим результаты математического моделирования системы, динамика которой описывается уравнением

$$x(m+1) = F_u x(m), \quad (14)$$

где матрица описания F_u имеет вид

$$F_u = \begin{bmatrix} 1{,}078 & 0 & 0 & 0{,}013 \\ 0 & 1{,}077 & 0{,}011 & 0 \\ 0{,}012 & 0 & 1{,}081 & 0 \\ 0 & 0{,}014 & 0 & 1{,}082 \end{bmatrix}$$

с интервалом квантования T=0,1 с.

Проанализируем исходную неустойчивую систему управления, при этом возьмем параметры качества

$$t_c = 3, \ \delta_c = 10, \ \sigma_0 = 5, \quad (15)$$

используя которые, находим:

$$\beta = 1{,}08, \ r = 0{,}0158.$$

Проверим выполнение условия (13):

$$\max_i \lambda_i = -0{,}00003 \leq 0,$$

т.е. проверяемое условие выполняется, таким образом, и заданные показатели качества тоже должны выполняться. Теперь проверим удовлетворение другим показателям качества:

$$t_c = 3, \ \delta_c = 10, \ \sigma_0 = 20, \quad (16)$$

откуда находим параметры:

$$\beta = 1{,}08, \ r = 0{,}0106.$$

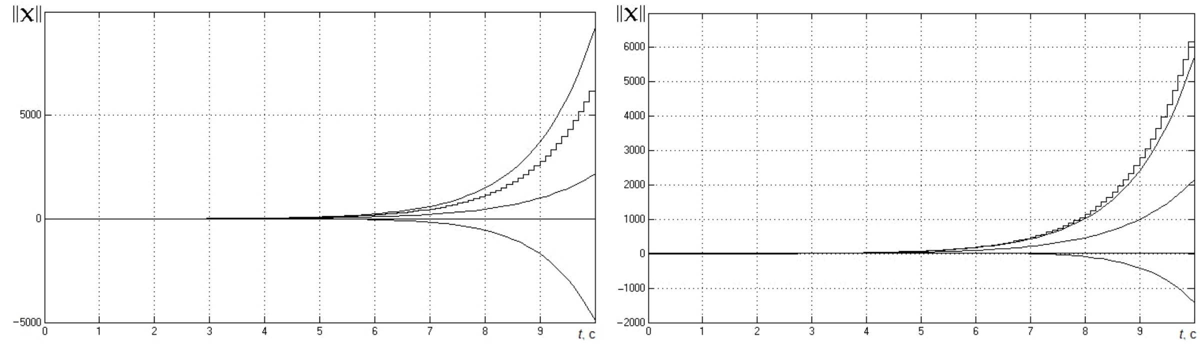
Проверим выполнение условия (13):

$$\max_i \lambda_i = 0{,}0001 > 0,$$

т.е. проверяемое условие не выполняется, таким образом, и заданные показатели качества тоже не должны выполняться. Желаемые оценочные трубки и реакция системы управления (14) на начальные отклонения

$$x_0^T = [0,50,50,50,5]$$

представлены на рисунке. Рисунок подтверждает справедливость полученных заключений.



а б

Рисунок. Оценочная трубка из условия качественной экспоненциальной неустойчивости построенная: (а) – по параметрам качества (15); (б) – по параметрам качества (16)

Заключение

Полученные оценки динамических показателей качества в виде критического времени переходного процесса и выброса совместно с достаточными условиями качественной экспоненциальной неустойчивости позволили создать эффективные численные процедуры анализа неустойчивых непрерывных и дискретных динамических систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 09-08-00857-а «Методология применения теории качественной устойчивости при проектировании систем управления адаптивной оптикой»).

Приложение. Доказательства утверждений

Доказательство утверждения 1

Из свойств нормы:

$$\left\| \|x(t)\| - \|e^{\beta\cdot t} x_0\| \right\| \le \left\| x(t) - e^{\beta\cdot t} x_0 \right\|,$$

$$\left\| e^{\beta\cdot t} x_0 \right\| = e^{\beta\cdot t} \|x_0\|,$$

откуда, учитывая (2), получим:

$$\left\| \|x(t)\| - e^{\beta\cdot t} \|x_0\| \right\| \le \rho\cdot\left(e^{[\beta+r]\cdot t} - e^{\beta\cdot t}\right)\cdot\|x_0\|, \qquad (\text{П}.1)$$

из которого при $r = 0$ получим:

$$\|x(t)\| = e^{\beta\cdot t}\|x_0\|,$$

разрешив которое относительно t, с учетом (5) получим:

$$t_c = \frac{1}{\beta}\cdot\ln(\delta_c). \qquad (\text{П}.2)$$

Рассмотрим миноранту из неравенства (П.1):

$$\max_t x_m(t) = (\rho+1)\cdot e^{\beta\cdot t_\sigma}\|x_0\| - \rho\cdot e^{[\beta+r]\cdot t_\sigma}\cdot\|x_0\|. \qquad (3)$$

Чтобы найти t_σ, возьмем производную по времени и, приравняв к нулю, разрешим относительно t_σ:

$$t_\sigma = \frac{1}{r}\ln\left(\frac{(\rho+1)\beta}{\rho(\beta+r)}\right). \qquad (\text{П}.44)$$

Подставив (П.3) и (П.4) в (7), получим

$$\sigma_0 = (\rho+1)\cdot e^{\frac{\beta}{r}\cdot\ln\left(\frac{(\rho+1)\cdot\beta}{\rho\cdot(\beta+r)}\right)} - \rho\cdot e^{\frac{(\beta+r)}{r}\cdot\ln\left(\frac{(\rho+1)\cdot\beta}{\rho\cdot(\beta+r)}\right)}. \qquad (\text{П}.55)$$

Равенства (П.2) и (П.5) соответствуют равенствам (9) и (10), что и требовалось доказать.

Доказательство утверждения 2

Из свойств нормы

$$\left\| \|x(m)\| - \|\beta^m x_0\| \right\| \le \left\| x(m) - \beta^m x_0 \right\|,$$

$$\left\| \beta^m x_0 \right\| = \beta^m \|x_0\| \text{ при } \beta \ge 0,$$

откуда, учитывая (4), получим

$$\left\| \|x(m)\| - \beta^m \|x_0\| \right\| \le \rho \cdot \left((\beta + r)^m - \beta^m \right) \cdot \|x_0\|, \qquad (\text{П.6})$$

из которого при $r = 0$ получим:

$$\left\| x(m) \right\| = \beta^m \|x_0\|,$$

разрешив которое относительно m, с учетом (6) и $t = mT$ получим

$$t_c = T \cdot \log_\beta(\delta_c). \qquad (\text{П.7})$$

Рассмотрим миноранту из неравенства (П.6):

$$\max_m x_m(m) = (\rho+1) \cdot \beta^{m_\sigma} \|x_0\| - \rho \cdot (\beta + r)^{m_\sigma} \cdot \|x_0\|. \qquad (\text{П.8})$$

Чтобы найти m_σ, возьмем производную по времени и, приравняв к нулю, разрешим относительно m_σ:

$$m_\sigma = \log_{\left(\frac{\beta+r}{r}\right)} \left(\frac{(\rho+1)\ln\beta}{\rho \ln(\beta + r)} \right). \qquad (\text{П.9})$$

Подставив (П.8) и (П.9) в (8), получим

$$\sigma_0 = (\rho+1) \cdot \beta^{\log_{\left(\frac{\beta+r}{r}\right)}\left(\frac{(\rho+1)\cdot\ln\beta}{\rho\cdot\ln(\beta+r)}\right)} - \rho \cdot (\beta + r)^{\log_{\left(\frac{\beta+r}{r}\right)}\left(\frac{(\rho+1)\cdot\ln\beta}{\rho\cdot\ln(\beta+r)}\right)}. \qquad (\text{П10})$$

Равенства (П.7) и (П.5) соответствуют равенствам (11) и (12), что и требовалось доказать.

Литература

1. Бобцов А.А., Быстров С.В., Григорьев В.В., Мансурова О.К., Мотылькова М.М. Качественная устойчивость и неустойчивость непрерывных и дискретных динамических систем // Труды 2-й Российской мультиконференции по проблемам управления. – СПб: ФГУП ЦНИИ «Электроприбор», 2008. – С. 41–43.
2. Рабыш Е.Ю., Григорьев В.В., Быстров С.В. Анализ поведения неустойчивых непрерывных и дискретных динамических систем // Сборник статей I международной заочной научно-технической конференции «Информационные технологии. Радиоэлектроника. Телекоммуникации». – Тольятти: Изд-во ПВГУС, 2011. – С. 263–270.
3. Grigoryev V.V., Mansurova O.K. Qualitative Exponential Stability and Instability of Dynamical System // Preprints of 5-th IFAK Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS'01). – St.Petersburg: IPME RAS, 2001. – P. 899–902.
4. Grigoryev V.V., Michailov S.V. Analysis and Synthesis Methods Based on Lyapunov's Method // Abstracts the Second Int. Conf. D. Eq. and Appl. – St. Petersburg: SPBSPU, 1998. – P. 37–38.

Рабыш Евгений Юрьевич – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, Rabysh@yandex.ru

Григорьев Валерий Владимирович – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, доктор технических наук, профессор, grigvv@yandex.ru

Быстров Сергей Владимирович – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, доцент, sbystrov@mail.ru

Спорягин Анатолий Владимирович – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, Avsporyagin@yandex.ru