УДК 681.51.015

УПРАВЛЕНИЕ ПО ВЫХОДУ ЛИНЕЙНЫМ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛЕННЫМ ОБЪЕКТОМ В УСЛОВИЯХ ВОЗМУЩАЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ И НЕУЧТЕННОЙ ДИНАМИКИ

А.А. Бобцов, С.В. Шаветов

Статья является развитием исследования, опубликованного в [1]. В [1] был проведен анализ работоспособности метода последовательного компенсатора для стабилизации по выходу линейного параметрически неопределенного объекта, функционирующего в условиях неучтенной динамики. В этой работе рассматривается возможность использования метода последовательного компенсатора для компенсации возмущающего воздействия для линейного параметрически неопределенного объекта, функционирующего в условиях неучтенной динамики.
Ключевые слова: управление по выходу, неучтенная динамика, компенсация возмущающих воздействий, параметрическая неопределенность.

Введение. Постановка задачи

Проблема анализа систем с неучтенной динамикой или сингулярными возмущениями является актуальной задачей современной теории автоматического управления. Например, описание объекта управления может содержать малоинерционные звенья, слабым влиянием которых на динамику основного процесса пренебрегают на этапе синтеза регулятора. Однако такого рода пренебрежение может пагубно сказаться на устойчивой работе системы управления. Данная статья является развитием результата, опубликованного в [1]. В [1] был проведен анализ работоспособности метода последовательного компенсатора (подробнее см., например, [2–4]) для стабилизации линейного объекта в условиях неучтенной асимптотически устойчивой динамики.

Были найдены условия, для которых алгоритм управления, построенный на базе метода последовательного компенсатора, переводит выходную переменную объекта в нулевое положение для любых начальных условий. Заметим, что задача анализа систем с неучтенной динамикой или сингулярными возмущениями не является новой, и ей посвящено достаточно большое число работ как российских, так и зарубежных ученых (см., например, [5 – 11]). Например, в обзоре [5] представлены основные результаты, полученные при исследованиях сингулярно возмущенных задач управления, начиная с 1982 г. В [5] достаточно кратко были проанализированы методы оптимального и H_∞ управления, подходы управления распределенными системами, итеративные процедуры, а также интересующие нас в большей мере алгоритмы управления в условиях неопределенности и т.д. Также анализ и синтез методов адаптивного управления в условиях неучтенной динамики был проведен в монографии [6]. Однако, насколько известно авторам данной статьи, исследования методов адаптивного и робастного управления по выходу параметрически неопределенными объектами с компенсацией возмущающих воздействий и в условиях неучтенной динамики ранее не проводились.

В этой работе, в развитие [1], проводится анализ работоспособности метода последовательного компенсатора для стабилизации по выходу линейного параметрически неопределенного объекта с компенсацией ограниченных возмущений. Рассмотрим линейный объект управления вида

$$\begin{cases} \dot{\chi}_1(t) = A_\chi \chi_1(t) + b_\chi(v(t) + w(t)), \\ y(t) = c_\chi^{\mathrm{T}} \chi_1(t), \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \mu\dot{\chi}_2(t) = F_\chi \chi_2(t) + qu(t), \\ v(t) = l^{\mathrm{T}} \chi_2(t), \end{cases} \tag{2}$$

где $\chi_1(t) \in R^n$ – вектор переменных состояния системы (1); $\chi_2(t) \in R^r$ – вектор переменных состояния системы (2); $y(t) \in R$ – измеряемая выходная переменная объекта; функция $v(t) \in R$ – не измеряется; $u(t) \in R$ – сигнал управления; A_χ, F_χ, b_χ, c_χ, q и l – матрицы и векторы соответствующей размерности с неизвестными коэффициентами; как и в [1, 6] будем полагать, что $-F_\chi l = q$; уравнение (2) представляет асимптотически устойчивую динамику (т.е. матрица F_χ гурвицева), которая не учитывается при синтезе закона управления; число $\mu > 0$ определяет быстродействие системы (2); $w(t)$ – ограниченное возмущающее воздействие.

Целью данной работы является синтез управляющего воздействия с использованием метода последовательного компенсатора, парирующего влияние внешнего ограниченного возмущающего воздействия $w(t)$. Или иными словами, требуется найти функцию $u(t)$, для которой выходная переменная $y(t)$ сойдется в некоторую малую область и останется в ней.

Основной результат

Следуя [1], перепишем систему (1), (2) в форме вход–выход:

$$a(p)y(t) = b(p)(v(t) + w(t)), \tag{3}$$

$$d(p)v(t) = c(p)u(t), \tag{4}$$

где $p = d/dt$ – оператор дифференцирования; измеряется выходная переменная $y = y(t)$ (но не ее производные); $b(p) = b_m p^m + ... + b_1 p + b_0$, $a(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0$, $d(p) = d_r p^r + d_{r-1}p^{r-1} + ... + d_1 p + d_0$, $c(p) = d(0)$ – полиномы с неизвестными параметрами; $m \le n-1$; передаточная функция $\dfrac{b(p)}{a(p)}$ имеет относительную степень $\rho = n - m$; полином $b(p)$ гурвицев, коэффициент $b_m > 0$.

Выберем закон управления следующим образом:

$$u = -(k+\gamma)\alpha(p)\xi_1, \tag{5}$$

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \sigma\xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = \sigma\xi_3, \\ ... \\ \dot{\xi}_{\rho-1} = \sigma(-k_1\xi_1 - k_2\xi_2 - ... - k_{\rho-1}\xi_{\rho-1} + k_1 y), \end{cases} \tag{6}$$

где число $k > 0$ и полином $\alpha(p)$ степени $\rho - 1$ выбираются так, чтобы передаточная функция $H(p) = \dfrac{\alpha(p)b(p)}{a(p) + k\alpha(p)b(p)}$ была строго вещественно положительной, положительный параметр γ служит для компенсации возмущающего воздействия $w(t)$, число $\sigma > k$, а коэффициенты k_i рассчитываются из требований асимптотической устойчивости системы (6) при нулевом входе $y(t)$. В отличие от [1], в управление вида (5) добавлен дополнительный параметр γ.

Замечание 1. На практике расчет коэффициента $k>0$, обеспечивающего выполнение условий строгой вещественной положительности передаточной функции $H(p)=\dfrac{\alpha(p)b(p)}{a(p)+k\alpha(p)b(p)}$, может быть осуществлен в случае известных границ на коэффициенты полиномов $a(p)$ и $b(p)$.

Как было доказано в [2], технически реализуемый алгоритм (5), (6) обеспечивает асимптотическую сходимость к нулю переменной $y(t)$ в отсутствии возмущений и в случае $\mu=0$ (т.е. при отсутствии неучтенной динамики). При $\mu>0$ и $w(t)=0$ в [1] были найдены аналитические условия применимости закона управления (5), (6) для стабилизации объекта (1), (2). Однако случай компенсации возмущений для системы (1), (2) при $\mu>0$ рассматривается впервые. Иными словами, требуется найти ограничения на числа μ и σ, при которых для системы (1) – (6) выполнено целевое условие

$$\left|y(t)\right|\le\varepsilon \text{ при } \infty>t\ge t_1,$$

где ε – некоторое, в общем случае малое, число.

Проведем ряд преобразований. Подставляя (5) в (4), получаем:

$$v=\frac{c(p)}{d(p)}(-(k+\gamma)\alpha(p)\xi_1)=-(k+\gamma)\alpha(p)\frac{c(p)}{d(p)}\xi_1=-(k+\gamma)\alpha(p)\hat{y}=-(k+\gamma)\alpha(p)(y-\varepsilon_1), \tag{7}$$

где $\hat{y}=\dfrac{c(p)}{d(p)}\xi_1$ и $\varepsilon_1=y-\hat{y}$. Тогда для (3) имеем:

$$y=\frac{b(p)}{a(p)}(v+w)=-(k+\gamma)\frac{\alpha(p)b(p)}{a(p)}(y-\varepsilon_1)+\frac{b(p)}{a(p)}w=$$

$$=(k+\gamma)\frac{\alpha(p)b(p)}{a(p)+k\alpha(p)b(p)}\varepsilon_1+\frac{\alpha(p)b(p)}{a(p)+k\alpha(p)b(p)}\varphi(t)-\gamma\frac{\alpha(p)b(p)}{a(p)+k\alpha(p)b(p)}y, \tag{8}$$

где $\varphi(t)=\dfrac{1}{\alpha(p)}w(t)$.

Теперь представим модель вход–выход (8) в виде модели вход–состояние–выход

$$\dot{x}=Ax+(k+\gamma)b\varepsilon_1+b(\varphi-\gamma y), \tag{9}$$

$$y=c^{\mathrm{T}}x, \tag{10}$$

где $x\in R^n$ – вектор переменных состояния модели (9); A, b, g и c – матрицы перехода от модели вход–выход к модели вход–состояние–выход, причем в силу известной леммы Якубовича–Калмана (см., например, [6, 7]) можно указать симметрическую положительно определенную матрицу P, удовлетворяющую двум следующим матричным уравнениям:

$$A^{\mathrm{T}}P+PA=-Q_1,\ Pb=c, \tag{11}$$

где $Q_1=Q_1^{\mathrm{T}}$ – некоторая положительно определенная матрица.

Перепишем (6) и (7) в векторно-матричной форме:

$$\dot{\xi}=\sigma(\Gamma\xi+dk_1y),\ \xi_1=h^{\mathrm{T}}\xi, \tag{12}$$

$$\mu\dot{z}=Fz+q\xi_1,\ \hat{y}=l^{\mathrm{T}}z, \tag{13}$$

где $\xi\in R^{\rho-1}$ и $z\in R^r$ – векторы переменных состояния моделей (12) и (13) соответственно; матрица $\Gamma=\begin{bmatrix}0&1&0&...&0\\0&0&1&...&0\\0&0&0&...&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-k_1&-k_2&-k_3&...&-k_{\rho-1}\end{bmatrix}$ – гурвицева в силу расчета коэффициентов k_i модели (6), $d=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$, $h=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$; F, q и l – матрицы перехода от модели вход–выход к модели вход–состояние–выход, причем, как уже допускалось ранее, следуя [1, 5], будем полагать, что $-Fl=q$.

Введем в рассмотрение векторы отклонений

$$\eta_1 = ly - z\,, \tag{14}$$

$$\eta_2 = hy - \xi\,. \tag{15}$$

Дифференцируя уравнения (14) и (15), получаем

$$\dot\eta_1 = l\dot y - \mu^{-1}Fz - \mu^{-1}q\xi_1 = \quad l\dot y - \mu^{-1}F(ly - \eta_1) - \mu^{-1}q(y - \varepsilon_2) = l\dot y + \mu^{-1}F\eta_1 + \mu^{-1}q\varepsilon_2\,, \tag{16}$$

$$\varepsilon_1 = y - \hat y = l^{\mathrm{T}}\eta_1\,, \tag{17}$$

$$\dot\eta_2 = h\dot y - \sigma(\Gamma(hy - \eta_2) + dk_1 y) = h\dot y + \sigma\Gamma\eta_2 - \sigma(dk_1 + \Gamma h)y = h\dot y + \sigma\Gamma\eta_2\,, \tag{18}$$

$$\varepsilon_2 = y - \xi_1 = h^{\mathrm{T}}\eta_2\,, \tag{19}$$

где $dk_1 = -\Gamma h$ и $-Fl = q$.

Таким образом, имеем систему дифференциальных уравнений

$$\dot x = Ax + (k+\gamma)b\varepsilon_1 + b(\phi - \gamma\, y)\,,\ \ y = c^{\mathrm{T}}x\,, \tag{20}$$

$$\dot\eta_1 = l\dot y + \mu^{-1}F\eta_1 + \mu^{-1}q\varepsilon_2\,,\ \ \varepsilon_1 = l^{\mathrm{T}}\eta_1\,, \tag{21}$$

$$\dot\eta_2 = h\dot y + \sigma\Gamma\eta_2\,,\ \ \varepsilon_2 = h^{\mathrm{T}}\eta_2\,. \tag{22}$$

Положительно определенные матрицы $R = R^{\mathrm{T}}$ и $N = N^{\mathrm{T}}$ удовлетворяют уравнениям Ляпунова:

$$F^{\mathrm{T}}R + RF = -Q_2\,, \tag{23}$$

$$\Gamma^{\mathrm{T}}N + N\Gamma = -Q_3\,, \tag{24}$$

где $Q_2 = Q_2^{\mathrm{T}}$ и $Q_3 = Q_3^{\mathrm{T}}$ – положительно определенные матрицы.

Условия работоспособности закона управления (5), (6) для стабилизации системы (1), (2), (20)–(22) приведены в следующей теореме.

Теорема. Пусть для стабилизации системы (1), (2) используется закон управления (5), (6). Пусть число k *обеспечивает строгую вещественную положительность передаточной функции* $H(p) = \dfrac{\alpha(p)b(p)}{a(p) + k\alpha(p)b(p)}$. *Пусть положительные числа* μ, γ, β *и* $0 \le \theta < 1$ *удовлетворяют условиям*

$$-\mu^{-1}\eta_1^{\mathrm{T}}Q_2\eta_1 + \delta^{-1}k^2(l^{\mathrm{T}}\eta_1)^2 + (\eta_1^{\mathrm{T}}Rq)^2 + \delta^{-1}(\eta_1^{\mathrm{T}}Rl)^2 + (k+\gamma)(\eta_1^{\mathrm{T}}Rlc^{\mathrm{T}}b)^2 + (k+\gamma)(l^{\mathrm{T}}\eta_1)^2 + \delta(l^{\mathrm{T}}\eta_1)^2 +$$
$$+\beta\mu^{-1}(\eta_1^{\mathrm{T}}Rlc^{\mathrm{T}}b)^2 + \gamma(\eta_1^{\mathrm{T}}Rlc^{\mathrm{T}}b)^2 \le -\eta_1^{\mathrm{T}}Q\eta_1 < 0\,, \tag{25}$$

$$-x^{\mathrm{T}}Q_1x + \delta x^{\mathrm{T}}Pbb^{\mathrm{T}}Px + 2\delta(c^{\mathrm{T}}Ax)^2 \le -x^{\mathrm{T}}Qx < 0\,,\ \ \delta = \delta(\mu) = \mu^{\theta} \tag{26}$$

для всех $x \ne 0$ *и* $\eta_1 \ne 0$.

Тогда для всех σ, *удовлетворяющих неравенству*

$$-\sigma\eta_2^{\mathrm{T}}Q_3\eta_2 + \mu^{-2}(h^{\mathrm{T}}\eta_2)^2 + \delta^{-1}(\eta_2^{\mathrm{T}}Nh)^2 + \gamma(\eta_2^{\mathrm{T}}Nhc^{\mathrm{T}}b)^2 + \delta^{-1}(k+\gamma)^2(\eta_2^{\mathrm{T}}Nhc^{\mathrm{T}}b)^2 \le -\eta_2^{\mathrm{T}}Q\eta_2 < 0\,, \tag{27}$$

при $\eta_2 \ne 0$ *выполнено целевое условие* $|y(t)| \le \varepsilon$ *при* $\infty > t \ge t_1$.

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Заключение

Рассмотрена задача компенсации внешнего ограниченного возмущающего воздействия с использованием закона управления (5), (6) для линейной системы (1), (2). Показано, что алгоритм управления, опубликованный в [2–4] при выполнении условий (25)–(27) может быть успешно применен для компенсации ограниченного возмущения для линейного параметрически неопределенного объекта функционирующего в условиях неучтенной динамики. Очевидно, что условия (25) и (26) трудно проверить на практике. Однако авторы полагают, что данный результат может быть использован при решении конкретной прикладной задачи, когда известны области изменения параметров. В этом случае неравенства (25)–(27) будет проверить проще. Авторы также рассматривают данный результат как вспомогательный для решения задачи управления по выходу линейным объектом с неизвестными параметрами и относительной степенью. Для иллюстрации этого предположения рассмотрим линейный объект управления вида

$$a(p)y(t) = b(p)u(t)\,, \tag{28}$$

где относительная степень $\rho_{\min} \le \rho \le \rho_{\max}$ неизвестна, но известны числа $\rho_{\min}$ и $\rho_{\max}$. Целью управления является стабилизация системы (28). Выберем закон управления вида (5), (6)

$$u = -k\alpha(p)\xi_1\,, \tag{29}$$

где $\gamma = 0$ и ξ_1 рассчитывается в соответствии с выражением (6), а полином $\alpha(p)$ имеет размерность $\rho_{\min}$. Если $\rho > \rho_{\min}$, то регулятор вида (29), (6) не может гарантировать устойчивость замкнутой системы (28), (29), (6). Добавим в закон управления (29) слагаемое

$$u = -k\alpha(p)\frac{(T_2 p+1)^{\vartheta}}{(T_1 p+1)^{\vartheta}}\xi_1, \qquad (30)$$

где $\vartheta = \rho_{\max} - \rho_{\min}$. Тогда при $\rho = \rho_{\min}$ обеспечивается устойчивость замкнутой системы (28), (29), (6) в силу результатов, опубликованных в [2 – 4]. При $\rho = \rho_{\max}$ имеем

$$y(t) = \frac{b(p)(T_2 p+1)^{\vartheta}}{a(p)} v(t), \qquad (31)$$

$$v(t) = \frac{1}{(T_1 p+1)^{\vartheta}} u(t), \qquad (32)$$

где уравнение (32) представляет собой неучтенную динамику и управление можно выбирать в соответствии с уравнением (29).

При $\rho_{\min} < \rho < \rho_{\max}$ получаем

$$y(t) = \frac{b(p)(T_2 p+1)^{\vartheta}}{a(p)(T_1 p+1)^{\vartheta_1}} v(t), \qquad (33)$$

$$v(t) = \frac{1}{(T_1 p+1)^{\vartheta-\vartheta_1}} u(t), \qquad (34)$$

где $\rho = \vartheta_1 + \rho_{\min}$, и уравнение (34) снова представляет собой неучтенную динамику.

Легко видеть, что системы (31), (32) и (33), (34) аналогичны объекту (3), (4) при $w(t) = 0$. Также легко видеть, что уравнение (4) можно рассматривать как некоторый аналог обобщенного апериодического звена r-го порядка, а число μ является эквивалентом постоянной времени T_1 апериодического звена. Теперь вновь обратим внимание на неравенства (25)–(27). Очевидно, что в случае, когда параметры μ и σ можно варьировать, что, в свою очередь, для регулятора (30), (6) вполне реально, можно дать следующие рекомендации:

а) параметр μ^{-1}, а, следовательно, T_1^{-1} должен быть больше коэффициента k;

б) параметр σ должен быть больше μ^{-1}, а, следовательно, и много больше T_1^{-1}.

На практике, как показано в [2–4], можно настраивать коэффициент k по линейному закону до тех пор, пока переменная $y(t)$ не попадет в некоторую малую область, заданную разработчиком системы. Параметры T_1^{-1} и σ можно рассчитывать следующим образом: $T_1^{-1} = k^2$ и $\sigma = (T_1^{-1})^{2\vartheta}$. Очевидно, что при таком расчете коэффициентов регулятора система может быть неустойчивой, но данная схема обеспечивает сходимость выходной переменной $y(t)$ в некоторую малую область, заданную разработчиком системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-08-00139).

Приложение. Доказательство теоремы

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V = x^{\mathrm{T}} P x + \eta_1^{\mathrm{T}} R \eta_1 + \eta_2^{\mathrm{T}} N \eta_2. \qquad (\text{П.1})$$

Дифференцируя (П.1) по времени с учетом уравнений (20)–(22), получаем

$$\begin{aligned}\dot V &= x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}P + PA)x + 2(k+\gamma)x^{\mathrm{T}}Pbl^{\mathrm{T}}\eta_1 - 2\gamma x^{\mathrm{T}}Pby + 2x^{\mathrm{T}}Pb\varphi + \\ &+\mu^{-1}\eta_1^{\mathrm{T}}(F^{\mathrm{T}}R + RF)\eta_1 + 2\mu^{-1}\eta_1^{\mathrm{T}}Rqh^{\mathrm{T}}\eta_2 + 2\eta_1^{\mathrm{T}}Rlc^{\mathrm{T}}Ax + 2(k+\gamma)\eta_1^{\mathrm{T}}Rlc^{\mathrm{T}}bl^{\mathrm{T}}\eta_1 \\ &+2\eta_1^{\mathrm{T}}Rlc^{\mathrm{T}}b\varphi - 2\gamma\eta_1^{\mathrm{T}}Rlc^{\mathrm{T}}by + \eta_2^{\mathrm{T}}\sigma(\Gamma^{\mathrm{T}}N + N\Gamma)\eta_2 + 2\eta_2^{\mathrm{T}}Nhc^{\mathrm{T}}Ax + 2(k+\gamma)\eta_2^{\mathrm{T}}Nhc^{\mathrm{T}}bl^{\mathrm{T}}\eta_1 + \\ &+ 2\eta_2^{\mathrm{T}}Nhc^{\mathrm{T}}b\varphi - 2\gamma\eta_2^{\mathrm{T}}Nhc^{\mathrm{T}}by, \end{aligned} \qquad (\text{П.2})$$

где вместо составляющей $\dot y$ было использовано слагаемое

$$\dot y = c^{\mathrm{T}}(Ax + (k+\gamma)bl^{\mathrm{T}}\eta_1 + b(\varphi - \gamma y).$$

Подставляя в (П.2) уравнения (11), (23) и (24), а также принимая во внимание соотношения

$$2x^{\mathrm{T}}Pb\varphi \le \frac{1}{2}\gamma(x^{\mathrm{T}}Pb)^2 + 2\gamma^{-1}\varphi^2 \le \frac{1}{2}\gamma(x^{\mathrm{T}}Pb)^2 + 2\gamma^{-1}\varphi_0^2,$$

$$2(k+\gamma)x^{\mathrm{T}}Pbl^{\mathrm{T}}\eta_1 \le \delta x^{\mathrm{T}}Pbb^{\mathrm{T}}Px + \delta^{-1}(k+\gamma)^2(l^{\mathrm{T}}\eta_1)^2,$$

$$2\mu^{-1}\eta_1^{\mathrm{T}}Rqh^{\mathrm{T}}\eta_2 \le (\eta_1^{\mathrm{T}}Rq)^2 + \mu^{-2}(h^{\mathrm{T}}\eta_2)^2,$$

$$2\eta_1^{\mathrm{T}}Rlc^{\mathrm{T}}Ax \le \delta^{-1}(\eta_1^{\mathrm{T}}Rl)^2 + \delta(c^{\mathrm{T}}Ax)^2,$$

$$2(k+\gamma)\eta_1^{\mathrm{T}} Rlc^{\mathrm{T}} bl^{\mathrm{T}}\eta_1 \le (k+\gamma)(\eta_1^{\mathrm{T}} Rlc^{\mathrm{T}} b)^2 + (k+\gamma)(l^{\mathrm{T}}\eta_1)^2,$$
$$2\eta_2^{\mathrm{T}} Nhc^{\mathrm{T}} Ax \le \delta(c^{\mathrm{T}} Ax)^2 + \delta^{-1}(\eta_2^{\mathrm{T}} Nh)^2,$$
$$2(k+\gamma)\eta_2^{\mathrm{T}} Nhc^{\mathrm{T}} bl^{\mathrm{T}}\eta_1 \le \delta^{-1}(k+\gamma)^2(\eta_2^{\mathrm{T}} Nhc^{\mathrm{T}} b)^2 + \delta(l^{\mathrm{T}}\eta_1)^2,$$
$$2\eta_2^{\mathrm{T}} Nhc^{\mathrm{T}} b\varphi \le \gamma(\eta_2^{\mathrm{T}} Nhc^{\mathrm{T}} b)^2 + \gamma^{-1}\varphi_0^2,$$
$$-2\gamma\eta_2^{\mathrm{T}} Nhc^{\mathrm{T}} by \le 2\gamma(\eta_2^{\mathrm{T}} Nhc^{\mathrm{T}} b)^2 + \frac{1}{2}\gamma y^2,$$
$$2\eta_1^{\mathrm{T}} Rlc^{\mathrm{T}} b\varphi \le \beta\mu^{-1}(\eta_1^{\mathrm{T}} Rlc^{\mathrm{T}} b)^2 + \beta^{-1}\mu\varphi_0^2,$$
$$-2\gamma\eta_1^{\mathrm{T}} Rlc^{\mathrm{T}} by \le \gamma(\eta_1^{\mathrm{T}} Rlc^{\mathrm{T}} b)^2 + \gamma y^2,$$

где числа $\beta > 0$ и $\varphi_0 > 0$ таковы, что $|\varphi(t)| \le \varphi_0 < \infty$, для производной от функции Ляпунова (П.1) получаем

$$\dot{V} \le -x^{\mathrm{T}} Q_1 x - \mu^{-1}\eta_1^{\mathrm{T}} Q_2\eta_1 - \sigma\eta_2^{\mathrm{T}} Q_3\eta_2 + \delta x^{\mathrm{T}} Pbb^{\mathrm{T}} Px + \delta^{-1}k^2(l^{\mathrm{T}}\eta_1)^2 + (\eta_1^{\mathrm{T}} Rq)^2 + \mu^{-2}(h^{\mathrm{T}}\eta_2)^2 +$$
$$+\delta^{-1}(\eta_1^{\mathrm{T}} Rl)^2 + \delta(c^{\mathrm{T}} Ax)^2 + (k+\gamma)(\eta_1^{\mathrm{T}} Rlc^{\mathrm{T}} b)^2 + (k+\gamma)(l^{\mathrm{T}}\eta_1)^2 + \delta(c^{\mathrm{T}} Ax)^2 + \delta^{-1}(\eta_2^{\mathrm{T}} Nh)^2 +$$
$$+\delta^{-1}(k+\gamma)^2(\eta_2^{\mathrm{T}} Nhc^{\mathrm{T}} b)^2 + \delta(l^{\mathrm{T}}\eta_1)^2 + \beta\mu^{-1}(\eta_1^{\mathrm{T}} Rlc^{\mathrm{T}} b)^2 + 2\gamma(\eta_2^{\mathrm{T}} Nhc^{\mathrm{T}} b)^2 + \gamma(\eta_2^{\mathrm{T}} Nhc^{\mathrm{T}} b)^2 +$$
$$+(3\gamma^{-1} + \beta^{-1}\mu)\varphi_0^2, \tag{П.3}$$

где $\delta > 0$ – некоторое число.

Пусть $\delta = \delta(\mu) = \mu^{\theta}$ и $0 \le \theta < 1$, тогда для некоторых малого $\mu > 0$ и большого γ найдется положительно определенная матрица $Q = Q^{\mathrm{T}}$ такая, что

$$-x^{\mathrm{T}} Q_1 x + \delta x^{\mathrm{T}} Pbb^{\mathrm{T}} Px + 2\delta(c^{\mathrm{T}} Ax)^2 \le -x^{\mathrm{T}} Qx < 0. \tag{П.4}$$

Выберем число σ таким образом, чтобы было выполнено соотношение

$$-\sigma\eta_2^{\mathrm{T}} Q_3\eta_2 + \mu^{-2}(h^{\mathrm{T}}\eta_2)^2 + \delta^{-1}(\eta_2^{\mathrm{T}} Nh)^2 + \gamma(\eta_2^{\mathrm{T}} Nhc^{\mathrm{T}} b)^2 +$$
$$+\delta^{-1}(k+\gamma)^2(\eta_2^{\mathrm{T}} Nhc^{\mathrm{T}} b)^2 \le -\eta_2^{\mathrm{T}} Q\eta_2 < 0. \tag{П.5}$$

Тогда для неравенства (П.3) получаем

$$\dot{V} \le -x^{\mathrm{T}} Qx - \mu^{-1}\eta_1^{\mathrm{T}} Q_2\eta_1 - \eta_2^{\mathrm{T}} Q\eta_2 + \delta^{-1}k^2(l^{\mathrm{T}}\eta_1)^2 + (\eta_1^{\mathrm{T}} Rq)^2 + \delta^{-1}(\eta_1^{\mathrm{T}} Rl)^2 +$$
$$+(k+\gamma)(\eta_1^{\mathrm{T}} Rlc^{\mathrm{T}} b)^2 + (k+\gamma)(l^{\mathrm{T}}\eta_1)^2 + \delta(l^{\mathrm{T}}\eta_1)^2 +$$
$$+\beta\mu^{-1}(\eta_1^{\mathrm{T}} Rlc^{\mathrm{T}} b)^2 + \gamma(\eta_1^{\mathrm{T}} Rlc^{\mathrm{T}} b)^2 + (3\gamma^{-1} + \beta^{-1}\mu)\varphi_0^2. \tag{П.6}$$

Пусть числа $\beta > 0$ и $\mu > 0$ такие, что

$$-\mu^{-1}\eta_1^{\mathrm{T}} Q_2\eta_1 + \delta^{-1}k^2(l^{\mathrm{T}}\eta_1)^2 + (\eta_1^{\mathrm{T}} Rq)^2 + \delta^{-1}(\eta_1^{\mathrm{T}} Rl)^2 +$$
$$+(k+\gamma)(\eta_1^{\mathrm{T}} Rlc^{\mathrm{T}} b)^2 + (k+\gamma)(l^{\mathrm{T}}\eta_1)^2 + \delta(l^{\mathrm{T}}\eta_1)^2 +$$
$$+\beta\mu^{-1}(\eta_1^{\mathrm{T}} Rlc^{\mathrm{T}} b)^2 + \gamma(\eta_1^{\mathrm{T}} Rlc^{\mathrm{T}} b)^2 \le -\eta_1^{\mathrm{T}} Q\eta_1 < 0. \tag{П.7}$$

Тогда неравенство (П.6) примет вид

$$\dot{V} \le -x^{\mathrm{T}} Qx - \eta_1^{\mathrm{T}} Q\eta_1 - \eta_2^{\mathrm{T}} Q\eta_2 + (3\gamma^{-1} + \beta^{-1}\mu)\varphi_0^2. \tag{П.8}$$

Из (П.8) следует сходимость переменных $x(t)$, $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ в некоторую область, которая зависит от значений φ_0, а, следовательно, от амплитуды возмущающего воздействия $w(t)$, а также от коэффициента γ и параметра μ. Очевидно, что чем меньше μ и больше γ, тем меньше область, в которую попадут траектории $x(t)$, $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$. Таким образом, для некоторых γ и μ найдутся ε и t_1 такие, что будет выполнено целевое условие $|y(t)| \le \varepsilon$ при $\infty > t \ge t_1$, что и требовалось доказать.

Литература

1. Бобцов А.А., Николаев Н.А. Управление по выходу линейными системами с неучтенной паразитной динамикой // АиТ. – 2009. – № 6. – С. 115–122.
2. Бобцов А.А. Робастное управление по выходу линейной системой с неопределенными коэффициентами // АиТ. – 2002 – №11. – С. 108–117.
3. Бобцов А.А. Алгоритм робастного управления неопределенным объектом без измерения производных регулируемой переменной // АиТ. – 2003 – № 8. – С. 82–95.
4. Бобцов А.А., Николаев Н.А. Синтез управления нелинейными системами с функциональными и параметрическими неопределенностями на основе теоремы Фрадкова // АиТ. – 2005. – № 1. – С. 118–129.
5. Дмитриев М.Г., Курина Г.А. Сингулярные возмущения в задачах управления // АиТ. – 2006 – № 1. – С. 3–51.

6. Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. – СПб: Наука, 2000.
7. Воронов В.А. Введение в динамику сложных управляемых систем. – М.: Наука, 1985.
8. Фрадков А.Л. Синтез адаптивных систем управления нелинейными сингулярно возмущенными объектами // АиТ. – 1987 – № 6. – С. 100–110.
9. Фрадков А.Л. Адаптивное управление в сложных системах: беспоисковые методы. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.
10. Ioannou P.A., Kokotovic P.V. Adaptive systems with reduced models. – Lecture Notes on Control and Inf. Science. V.47. Heidelberg: Springer-Verlag, 1983.
11. Saksena V.R., O’Reily T., Kokotovic P.V. Singular perturbations and time-scale methods in control theory. Survey 1976-1983 // Automatica. – 1984. – № 3. – P. 273–294.
12. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. – М.: Физматгиз, 1978.

Бобцов Алексей Алексеевич – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, доктор технических наук, профессор, декан, bobtsov@mail.ifmo.ru

Шаветов Сергей Васильевич – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, магистрант, r41f.814ck.h4wk@gmail.com