

УДК: 535.42 517.443 515.12

ФОКУСИРУЮЩИЕ СВОЙСТВА ФРАКТАЛЬНЫХ ЗОННЫХ ПЛАСТИНОК

Я.Б. Музыченко, А.А. Зинчик, С.К. Стафеев

Представлены результаты аналитического и компьютерного моделирования дифракции Френеля моно- и полихроматических источников света от зонных пластинок, обладающих фрактальной структурой. Показано, что в осевом распределении интенсивности возникают дополнительные максимумы интенсивности, число которых зависит от порядка генерации фрактала, а внутренняя структура фокусов обладает свойствами самоподобия. Продемонстрировано, что использование фрактальных зонных пластинок (ФЗП) позволяет уменьшить хроматические aberrации при их освещении белым светом по сравнению с обычными зонными пластинками Френеля. Моделирование было реализовано для фазовых ФЗП с различной размерностью и порядком генерации.

Ключевые слова: дифракция Френеля, зонные пластинки, фрактал, самоподобие, фрактальная размерность, формирование изображений, aberrации.

Введение

Фракталы с момента их открытия Мандельбротом являются объектом пристального внимания ученых в различных областях научного знания, в том числе и в оптике [1]. В настоящее время большинство работ по оптике фракталов посвящено дифракции света в области Фраунгофера.

Известно, что распределение интенсивности света от фрактального объекта, также как и сам объект, обладает свойствами самоподобия, а по картине дифракции в дальней зоне можно определять некоторые свойства объекта, например, его фрактальную размерность [2–4]. Фрактальные дифракционные решетки обладают рядом преимуществ по сравнению с двумерными периодическими структурами, поскольку существенный вклад в суммарную интенсивность дифракционной картины вносят высокие пространственные частоты, соответствующие мельчайшим деталям фрактала. Данная особенность повышает возможности

методов неразрушающего контроля фазовых неоднородностей прозрачных объектов, основанных на регистрации эталонных тестовых изображений через объекты, искажающие волновой фронт [5].

В области дифракции Френеля теория фракталов нашла применение в создании ФЗП. Интерес к зонным пластинкам Френеля возобновился после того, как они стали ключевым элементом в формировании изображений в таких областях, как терагерцовая томография и мягкая рентгеновская микроскопия [6–7]. Недавно были представлены ФЗП, свойства которых отличаются от свойств обычных пластинок Френеля. В частности, в [8, 9] были представлены интересные экспериментальные результаты исследований, часть из которых не получила должного объяснения в рамках развитых авторами математических моделей. В [9–10] показано, что осевое распределение интенсивности от ФЗП обладает свойствами самоподобия, в распределении появляются дополнительные максимумы излучения. Существующие теоретические и экспериментальные исследования были проведены исключительно для амплитудных ФЗП, хотя для задач дифракции больший интерес представляют фазовые объекты. Кроме этого, вопросы влияния фрактальной размерности на распределение интенсивности остались неизученными. В данной статье представлены результаты аналитического расчета и компьютерного моделирования дифракции Френеля для монохроматических волн и белого света от амплитудных и фазовых ФЗП с различной размерностью и исследованы их фокусирующие свойства. Аналитический расчет проведен для амплитудных ФЗП, а математические модели были реализованы при помощи программы VirtualLab v4.6 компании LightTrans GmbH для фазовых ФЗП. Показано, что помимо главного и кратных фокусов, в осевом распределении интенсивности появляются дополнительные максимумы, число которых зависит от порядка генерации фрактала. При этом внутренняя структура фокусов является самоподобной. Проанализирована зависимость интенсивности света от осевой координаты для пластинок с различными размерностями и порядком генерации. Результаты моделирования полихроматического света от ФЗП показывают, что их использование позволяет уменьшить хроматические аберрации при формировании изображений. Адекватность и предсказательный потенциал созданных математических моделей доказаны их применением к реальным объектам и наблюдением особенностей в продольных и поперечных плоскостях распределения поля интенсивности и фазы.

Теоретические сведения и аналитический расчет дифракции Френеля от фрактальных зонных пластинок

Основой для построения ФЗП являются обычные зонные пластинки Френеля, которые представляют собой чередующиеся прозрачные и непрозрачные кольцевые зоны, радиус которых при освещении плоской волной определяется формулой $r_m = \sqrt{m\lambda b}$, где m – номер зоны; λ – длина волны; b – расстояние до экрана. Фрактальную зонную пластинку можно представить как обычную, у которой отсутствуют или преобразованы некоторые зоны. Процесс удаления зон или их пространственного преобразования математически может быть представлен как итеративный процесс построения полос Кантора [1] (рис. 1). Определяющей характеристикой фрактальных объектов является их дробная размерность. Для геометрических фракталов размерность определяется формулой $D = \frac{\ln N}{\ln(1/\mu)}$, где N – число сегментов, остающихся после первой итерации, μ – масштабирующий множитель [1]. Например, на первом этапе построения полос Кантора с фрактальной размерностью $D = \ln 2 / \ln 3 = 0,631$ отрезок делится на три равных части (порядок генерации фрактала $S=1$), средняя из которых удаляется, на втором такая же процедура происходит с двумя оставшимися отрезками ($S=2$) и т.д.



Рис. 1. Этапы построения полос Кантора

Пусть на зонную пластинку с амплитудной функцией пропускания $p(r_0)$, где r_0 – радиальная координата в плоскости объекта, падает плоская монохроматическая волна с длиной волны λ . Интенсивность излучения в плоскости (r, z) , где z – расстояние от пластинки, r – радиальная координата в плоскости экрана, описывается интегральным приближением Френеля [11]:

$$I(r, z) = \left(\frac{2\pi}{\lambda z} \right)^2 \left| \int_0^a p(r_0) \exp\left(\frac{i\pi}{\lambda z} r_0^2 \right) J_0\left(\frac{2\pi r r_0}{\lambda z} \right) r_0 dr_0 \right|^2, \quad (1)$$

где a – радиус внешнего кольца зонной пластинки. В частности, распределение интенсивности вдоль оптической оси, как следует из (1), описывается формулой

$$I(0, z) = \left(\frac{2\pi}{\lambda z} \right)^2 \left| \int_0^a p(r_0) \exp\left(\frac{i\pi}{\lambda z} r_0^2 \right) r_0 dr_0 \right|^2. \quad (2)$$

После введения новых переменных $l = \left(\frac{r_0}{a} \right)^2 - 0,5$; $q(l) = p(r_0)$ и $u = \frac{a^2}{2\lambda z}$ получаем [11]:

$$I(0, u) = 4\pi^2 u^2 \left| \int_{-0,5}^{0,5} q(l) \exp(i2\pi ul) dl \right|^2. \quad (3)$$

Основываясь на самоподобии фрактальных структур и свойствах Фурье-преобразования, распределение интенсивности вдоль оптической оси может быть записано как [9–11]:

$$I(0, u, N, S) = 4 \sin^2 \left[\frac{\pi u}{(2N-1)^S} \right] \prod_{i=1}^S \frac{\sin^2 \left[\frac{2\pi N u}{(2N-1)^i} \right]}{\sin^2 \left[\frac{2\pi u}{(2N-1)^i} \right]}, \quad (4)$$

где N – число сегментов, остающихся после итерации при построении фрактала; S – порядок генерации фрактала. В случае обычной зонной пластинки Френеля формула (4) принимает вид

$$I(0, u, N, S) = \frac{\sin^2 \left[\frac{2\pi M u}{(2N-1)^S} \right]}{\cos^2 \left[\frac{\pi u}{(2N-1)^S} \right]}, \quad (5)$$

где M – число прозрачных зон пластинки.

Аналитический расчет был проведен для трех порядков генерации амплитудной ФЗП, построенной по принципу полос Кантора с фрактальной размерностью $D = \ln 2 / \ln 3 = 0,631$. Соответствующая ей зонная пластинка Френеля состоит из 9 кольцевых зон, 5 из которых являются прозрачными (рис. 2, а). На первом порядке генерации удаляется $(2N-1)$ средних зон, причем радиус первой зоны, который определяет положение главного фокуса пластинки, остается неизменным (рис. 2, б). На втором и третьем порядке генерации размер пластинки увеличивается, число зон 27 и 81 соответственно (рис. 2, в, г).

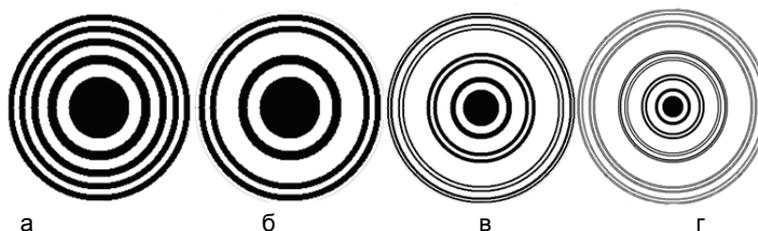


Рис. 2. Зонная пластинка Френеля (а); ФЗП с порядком генерации фрактала: $S=1$ (б); $S=2$ (в); $S=3$ (г). Изображения в негативе

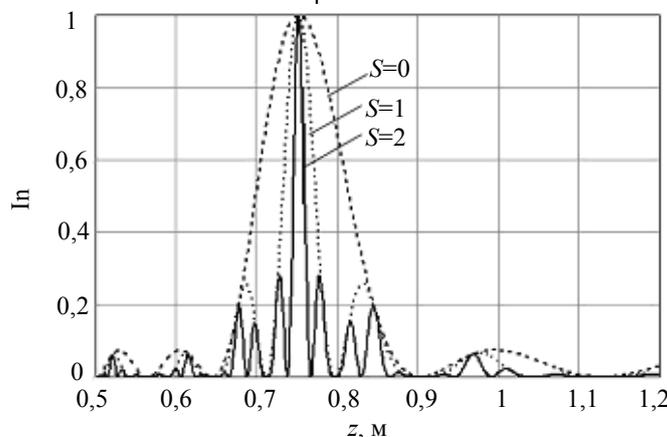


Рис. 3. Зависимость нормированного значения интенсивности I_n от осевой координаты z монохроматической плоской волны, дифрагировавшей на обычной пластинке Френеля ($S=0$, $a=1,9$ мм) и на ФЗП ($S=1$, $a=1,9$ мм; $S=2$, $a=3,29$ мм)

На рис. 3 показаны результаты аналитического моделирования дифракции в ближней зоне дифракции плоской монохроматической волны ($\lambda = 532$ нм) для обычной зонной пластинки ($S=0$, $a=1,90$ мм) и двух порядков генерации ФЗП ($S=1$, $a=1,90$ мм; $S=2$, $a=3,29$ мм), a – радиус внешнего кольца пластинки. На рис. 3 представлена зависимость нормированного значения интенсивности I_n от осевой координаты окрестности главного фокуса. Из графика видно, что с ростом порядка генерации фрактала в спектре излучения возникают дополнительные максимумы, а внутренняя структура фокуса является самоподобной. Осевое распределение интенсивности является огибающей для каждого следующего порядка генерации фрактала; с увеличением параметра S излучение становится все более сфокусированным.

Компьютерное моделирование дифракции Френеля от ФЗП

Компьютерное моделирование было реализовано при помощи программного обеспечения Virtual-Lab. ФЗП загружались в программу в виде кодированных фазовых двумерных распределений. Для их обработки были разработаны программные модули, реализующие особенности построения оптических схем для наблюдения дифракции Френеля с возможностью вариации глубины фазового сдвига, а также минимального шага его дискретизации. В состав программного модуля входил блок реализации итерационного алгоритма управления фрактальной размерностью и порядком генерации. Для моделирования были выбраны фазовые ФЗП, так как для практического применения они представляют намного больший интерес, благодаря возможности четырехкратного увеличения интенсивности излучения. В этом случае пластинка обладает единичной функцией пропускания, прозрачным зонам соответствует фазовый сдвиг $\Delta\varphi=0$, непрозрачным $\Delta\varphi=\pi$. Моделирование было реализовано для пластинок с тремя различными фрактальными размерностями. Основой для построения ФЗП с размерностью $D = \ln 3 / \ln 5 = 0,683$ является обычная амплитудная зонная пластинка с 25 прозрачными зонами (рис. 4, а). На первом порядке генерации из пластинки удаляются две группы по пять прозрачных зон (рис. 4, б), на втором порядке генерации удаляется шесть прозрачных зон (рис. 4, в).

Положение главного фокуса зонной пластинки определяется формулой $f_1 = r_1^2 / \lambda$, где r_1 – радиус первой зоны Френеля. В спектре излучения также возникают кратные фокусы $f_n = f_1 / (2n - 1)$, n – целое число. Параметры моделирования: $\lambda=532$ нм, $r_1=0,630$ мм, $f_1=0,752$ м. На рис. 4 (снизу) показаны зависимости распределения интенсивности от осевой координаты в окрестности главного фокуса зонной пластинки. С увеличением порядка генерации в распределении интенсивности возникают дополнительные максимумы излучения, внутренняя структура распределения является самоподобной. В отличие от аналитического моделирования, при таком построении ФЗП распределение интенсивности расширяется.

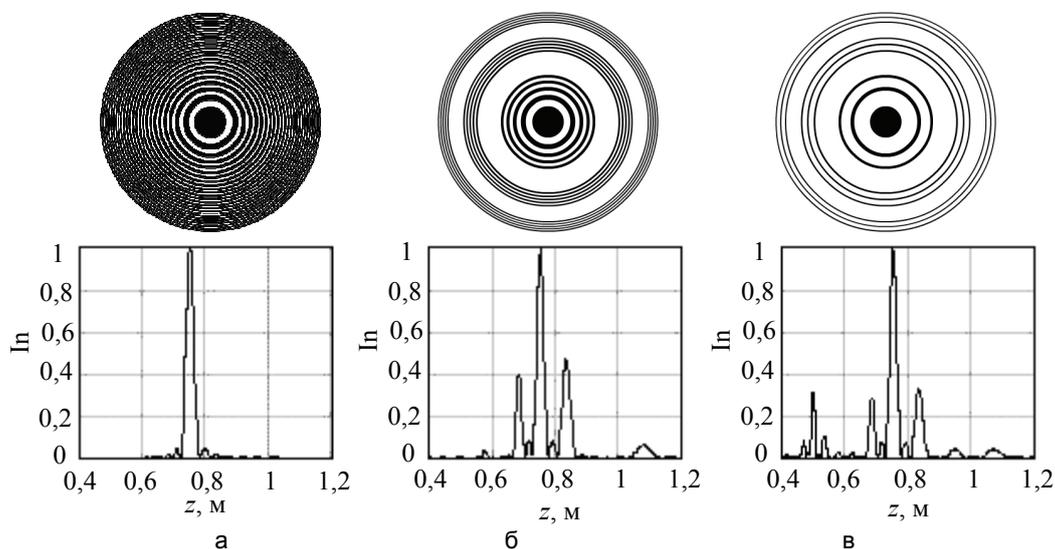


Рис. 4. Этапы построения ФЗП с размерностью $D = \ln 3 / \ln 5 = 0,683$ (сверху, изображения в негативе) и осевое распределение интенсивности в окрестности главного фокуса (снизу): (а – $S=0$; б – $S=1$; в – $S=2$)

На рис. 5, 6 показаны процессы построения ФЗП с размерностями $D = \ln 2 / \ln 3 = 0,631$ и $D = \ln 2 / \ln 5 = 0,431$, а также приведены зависимости распределения интенсивности от осевой координаты в окрестности главного фокуса. Как видно из рисунка, с ростом порядка генерации фрактала структура поля в околофокусном пространстве усложняется с сохранением масштабируемости. Из приведенных графиков можно увидеть, что с уменьшением значения фрактальной размерности распределение интенсивности

становится более сложным, число дополнительных максимумов и их относительная интенсивность увеличивается.

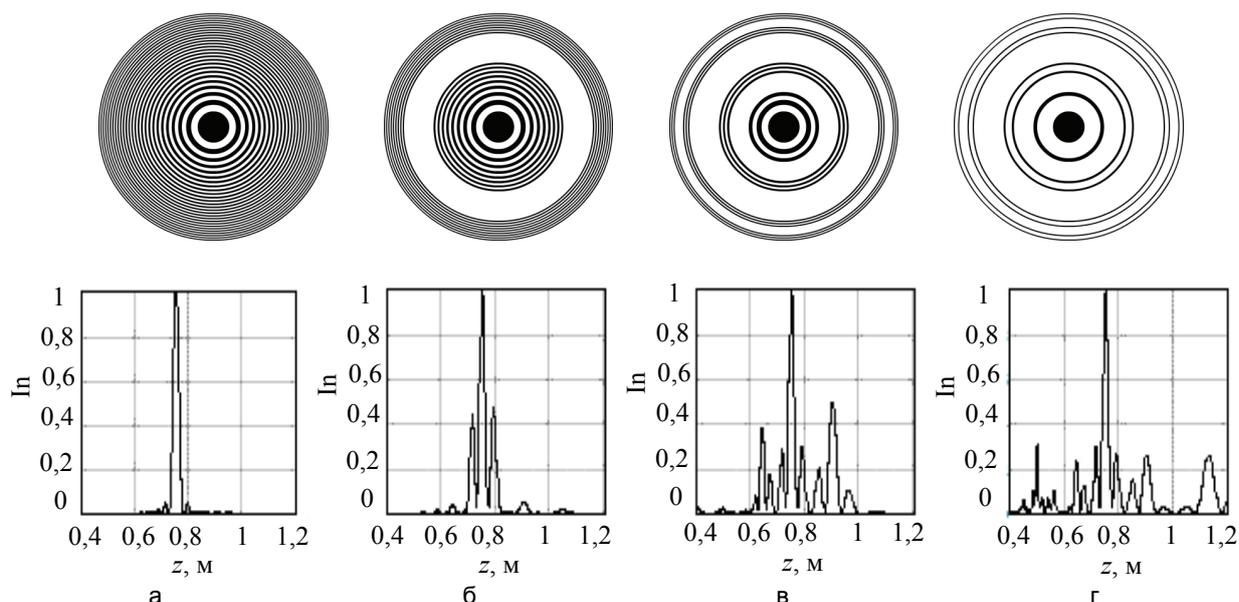


Рис. 5. Этапы построения ФЗП с размерностью $D = \ln 2 / \ln 3 = 0,631$ (сверху, изображения в негативе) и осевое распределение интенсивности в окрестности главного фокуса (снизу): (а – $S=0$; б – $S=1$; в – $S=2$; г – $S=3$)

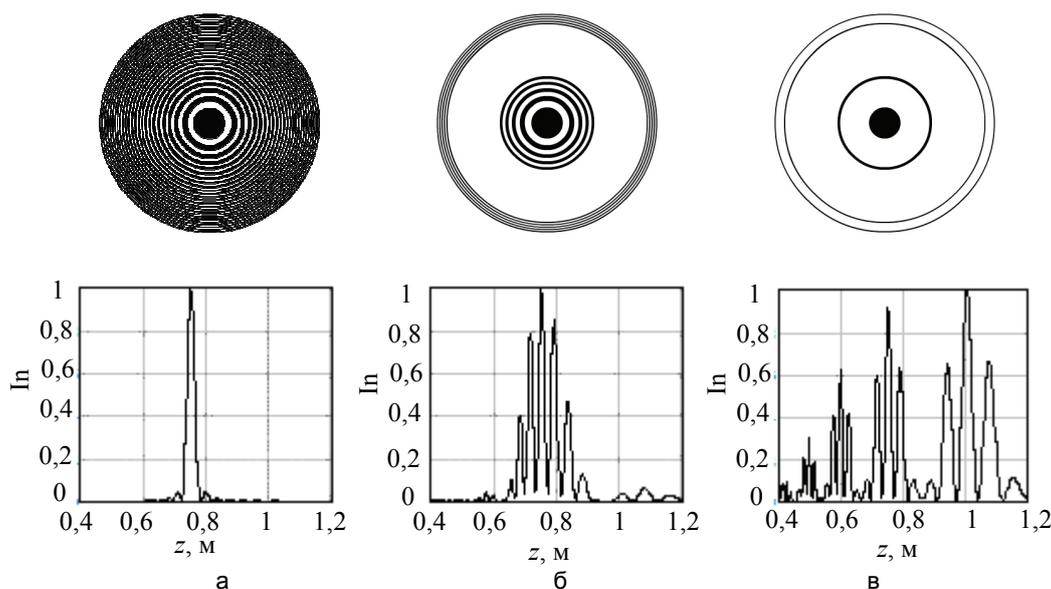


Рис. 6. Этапы построения ФЗП с размерностью $D = \ln 2 / \ln 5 = 0,431$ (сверху, изображения в негативе) и осевое распределение интенсивности в окрестности главного фокуса (снизу): (а – $S=0$; б – $S=1$; в – $S=2$)

В структуре кратных фокусов зонной пластинки с ростом порядка генерации также возникают дополнительные максимумы с самоподобной структурой. Так как результаты моделирования для кратных фокусов совпадают с результатами для главного фокуса, в статье они не представлены.

Возникновение дополнительных фокусов в распределении интенсивности от ФЗП позволяет выдвинуть гипотезу об уменьшении хроматических aberrаций при освещении пластинок белым светом. Для проверки данной гипотезы было проведено моделирование дифракции от фазовой ФЗП с размерностью $D = \ln 2 / \ln 3 = 0,631$ триплета длин волн 635 нм, 532 нм и 473 нм с удельным весом 1,05, 0,62 и 0,8 соответственно. Результаты моделирования для обычной зонной пластинки и второго порядка генерации ФЗП представлены на рис. 7.

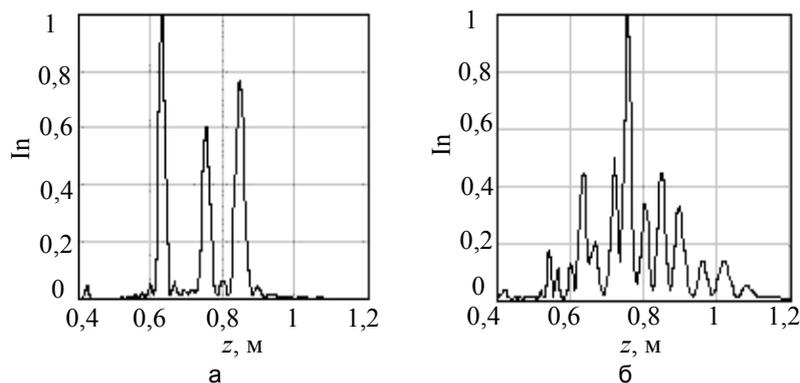


Рис. 7. Осевое распределение интенсивности для обычной (а) и фрактальной (б) зонной пластинки при их освещении белым светом

Заключение

Представлены результаты аналитического расчета и компьютерного моделирования дифракции Френеля от ФЗП. Показано, что с ростом порядка генерации фрактала осевое распределение интенсивности усложняется, проявляя свойства самоподобия. Реализованные программные модули с настраиваемыми итерационными алгоритмами позволили обнаружить новые и ранее описанные особенности пространственных спектров ФЗП. Результаты моделирования дифракции Френеля полихроматического источника доказывают, что использование ФЗП позволяет минимизировать хроматические aberrации. Данное свойство может быть использовано во многих областях науки и техники, где существует потребность в формировании изображений высокого качества.

Литература

1. Федер Е. Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 254 с.
2. Зинчик А.А., Музыченко Я.Б., Смирнов А.В., Стафеев С.К. Расчет фрактальной размерности регулярных фракталов по картине дифракции в дальней зоне // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2009. – № 2. – С.17–24.
3. Uozumi J., Asakura T. Fraunhofer diffraction by Koch fractals: the dimensionality // Journal of Modern Optics. – 1999. – V. 38. – № 7. – P. 1335–1347.
4. Horvath P. Koch fractals in physical optics and their Fraunhofer diffraction patterns // Optics. – 2010. – V. 121. – P. 206–213.
5. Зинчик А.А., Музыченко Я.Б., Стафеев С.К. О принципах амплитудной и амплитудно-фазовой пространственной фильтрации // Изв. вузов. Приборостроение. – 2007. – Т. 50. – № 7. – С. 46–52.
6. Wang S., Zhang X. Terahertz tomographic imaging with a Fresnel lens // Opt. Photon. News. – 2002. – № 13. – P. 59.
7. Wang Y., Yun W., Jacobsen C. Achromatic Fresnel optics for wideband extreme-ultraviolet and X-ray imaging // Nature. – 2003. – № 424. – P. 50–53.
8. Saavedra G., Furlan W.D., Monsoriu J.A. Fractal zone plates // Opt. Lett. – 2003. – № 28. – P. 971–973.
9. Mendoza-Yero O. Fractal generalized zone plates // J. Opt. Soc. Am. A. – 2009. – V. 26. – № 5. – P. 1161–1166.
10. Музыченко Я.Б. Моделирование оптических явлений при помощи программного обеспечения VirtualLab // Компьютерные инструменты в образовании. – 2010. – №3. – С. 45–52.
11. Rodrigo J. A., Alieva T., Calvo M. L., Davis J. A. Diffraction by Cantor fractal zone plates // Journal of Modern Optics. – 2005. – V. 52. – № 18. – P. 2771–2783.

<i>Музыченко Яна Борисовна</i>	– Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, ассистент, myb@rambler.ru
<i>Зинчик Александр Адольфович</i>	– Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, доцент, zinchik_alex@mail.ru
<i>Стафеев Сергей Константинович</i>	– Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, доктор технических наук, профессор, stafev@yandex.ru