УДК 519.7

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СВОЙСТВ ПОТОКА ВЕКТОРА ФАЗОВОЙ СКОРОСТИ ЧЕРЕЗ ЗАМКНУТУЮ ВЫПУКЛУЮ ПОВЕРХНОСТЬ[3]

И.Б. Фуртат

Проведено исследование устойчивости автономных динамических систем с использованием потока вектора фазовой скорости через замкнутую выпуклую поверхность. Получены условия на знак потока вектора фазовой скорости, обеспечивающие устойчивость динамических систем.

Ключевые слова: поток векторного поля, устойчивость, вторая теорема Ляпунова.

Введение

Одним из важных этапов при исследовании дифференциальных уравнений или системы дифференциальных уравнений является выяснение характера поведения траекторий их решений. При специальных структурах дифференциальных уравнений можно найти их точное решение [1, 2]. Однако чаще встречаются уравнения, точное решение которых получить достаточно сложно [3, 4]. Тогда для выяснения характера поведения можно использовать следующие методы: метод функций Ляпунова [1–4], метод функций Четаева [1], устойчивость по Лагранжу [1], метод абсолютной устойчивости [5], дивергентные условия устойчивости [6–8] и т.д. Наиболее распространенными из используемых методов являются методы функций Ляпунова и абсолютной устойчивости. Для линейных систем использование данных методов довольно хорошо изучено в [3–5], но для нелинейных систем это зачастую трудная задача.

[3] Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 годы», государственный контракт № 11.519.11.4007.

Так, при использовании метода функций Ляпунова, если не удается подобрать квадратичную функцию, то приходится линеаризовать систему в окрестности исследуемой точки и оценить влияние нелинейных членов на устойчивость по первому приближению [5]. Применение метода абсолютной устойчивости требует, чтобы нелинейная система была представлена в форме Лурье [5].

Для данной работы особый интерес представляет дивергентный подход, предложенный в [6–8]. При выяснении характера поведения решения дифференциального уравнения в окрестности точки равновесия используется знак дивергенции вектора фазовой скорости. Чтобы решение системы в окрестности точки равновесия было неустойчивым, необходима и достаточна неотрицательность дивергенции вектора фазовой скорости [6, 7], для асимптотической устойчивости необходимым условием является ее отрицательность [6, 8]. В [8] рассматриваются условия асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем второго порядка. Но для выяснения асимптотической устойчивости автор снова прибегает к использованию аппарата квадратичных функций, соответствующих исследуемой области.

В работе рассмотрено доказательство второй теоремы Ляпунова и получены условия асимптотической устойчивости нелинейных и, как частный случай, линейных стационарных дифференциальных уравнений, представленных в векторной нормальной форме, с помощью нахождения знака потока вектора фазовой скорости через замкнутую поверхность.

Асимптотическая устойчивость нелинейных систем

Пусть динамический объект описывается векторной нелинейной системой дифференциальных уравнений в виде

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \tag{1}$$

где $\mathbf{x}(t) \subset \mathbf{X} \in \mathbf{R}^n$ – вектор состояния, $t \in T \subset R_+$; $\mathbf{X}$, T – открытые множества; $\boldsymbol{f} : \mathbf{D}_x \to \mathbf{R}^n$ – n-мерная гладкая (класса $C^n, n = \overline{1, \infty}$) вектор-функция, заданная в односвязной области $\mathbf{D}_x = \mathbf{X} \subset \mathbf{R}^n$. Также область $\mathbf{D}_x$ является окрестностью некоторой точки равновесия $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{X}$ системы (1). Векторному полю $\dot{\boldsymbol{x}}$ поставим в соответствие скалярное поле потока вектора $\dot{\boldsymbol{x}}$ через выпуклую ($n-1$)-мерную поверхность $S = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = 1 \right\}$, где $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ – положительно определенная матрица, обозначаемое как $\oint\limits_S \dot{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{N} dS$, $\mathbf{N}$ – внешний вектор нормали к поверхности *S*. В дальнейшем в качестве поверхности *S* ради простоты будем рассматривать ($n-1$)-мерную сферу радиуса $R_0 > 0$. Ниже доказана вторая теорема Ляпунова и получены условия, накладываемые на поток вектора фазовой скорости системы (1) через поверхность *S*.

Теорема 1. Равновесное состояние $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 = 0$ системы (1) асимптотически устойчиво, если в окрестности точки $\boldsymbol{x}_0 = 0$ существует функция Ляпунова $V(\boldsymbol{x})$ такая, что

$$w_1(\boldsymbol{x}) \le V(\boldsymbol{x}) \le w_2(\boldsymbol{x}), \tag{2}$$

а ее полная производная по времени является отрицательно определенной функцией

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) \le -w_3(\boldsymbol{x}),$$

где $w_1(\boldsymbol{x})$, $w_2(\boldsymbol{x})$ и $w_3(\boldsymbol{x})$ – положительно определенные функции.

Доказательство. Рассмотрим полную производную по времени от функции Ляпунова $V(\boldsymbol{x})$ вдоль траекторий системы (1)

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} \dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$$

Если в качестве функции Ляпунова выбрать некоторую выпуклую ($n-1$)-мерную поверхность *S*, то $\dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} = \mathrm{grad} V(\boldsymbol{x})$ есть вектор нормали $\boldsymbol{N}$ к *S* в точке $\boldsymbol{x}$. Тогда по условию теоремы 1

$$\left[\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \right]^T = \dot{\boldsymbol{x}}^T(t) \boldsymbol{N} \le -w_3(\boldsymbol{x}).$$

Рассмотрим окрестность $g^t \delta_x$ точки равновесия $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 = 0$ системы (1) с радиусом $R_\delta(t)$, где g^t – оператор сдвига вдоль траекторий (1). Обозначим через $V_\delta(t)$ евклидов объем области $g^t \delta_x$, в которую переводит область δ_x фазовый поток векторного поля $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ в момент времени *t*. Воспользуемся следствием формулы Лиувилля–Остоградского [1, 2], учитывая гладкость правой части (1):

$$dV_\delta(t) / dt = \int\limits_{g^t \delta_x} \mathrm{div} \boldsymbol{f} dV,$$

где $\mathrm{div}\boldsymbol{f}$ – скалярное поле дивергенции векторного поля $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, dV – евклидов объем элемента. Система (1) будет устойчива, если преобразование потока за положительное время уменьшает объем по каждой компоненте вектора $\boldsymbol{x}$, т.е.

$$dV_{\delta i}(t)\big/dt = \int\limits_{g^t\delta_{x_i}} \mathrm{div} f_i \, dV_i < 0\,, \tag{3}$$

где $\dot{x}_i = f_i(\boldsymbol{x})$, $i = \overline{1, n}$. Используя обратный переход по формуле Гаусса–Остоградского [9] для (3) и с учетом условий теоремы 1, имеем

$$\int\limits_{g^t\delta_{x_i}} \mathrm{div} f_i \, dV_i = \oint\limits_{g^t\delta_{x_i}} \dot{x}_i \mathbf{N}_{\delta i} dS_{\delta i} \le -\oint\limits_{g^t\delta_{x}} w_3(\boldsymbol{x}) dS_{\delta i} < 0\,,\ i = \overline{1, n}\,, \tag{4}$$

где $\mathbf{N}_{\delta i}$ – вектор внешней нормали к поверхности δ_x; S_{xi} – площадь поверхности δ_x. Если δ_x, в которой выполнено (4), совпадает с областью определения (1) D_x, то система (1) устойчива во всей своей области определения D_x.

Для исследования характера устойчивости системы (1) без привлечения аппарата функций Ляпунова введем регулярное отображение $\varphi : X \to \Xi$ [10], которое преобразует систему (1) к диагональному виду

$$\dot{\xi}_i(t) = h_i(\xi_i(t))\,,\ i = \overline{1, n}\,,$$

или, в векторной форме,

$$\dot{\xi}(t) = \mathbf{h}(\xi(t))\,. \tag{5}$$

Здесь $\xi(t) = \left[\xi_1(t), \xi_2(t), ..., \xi_n(t)\right]^T \in \Xi \subset \mathbf{R}^n$, Ξ – открытое множество; $\mathbf{h} = \left[h_1, h_2, ..., h_n\right]^T$ – гладкая вектор-функция (соответствующая классу гладкости (1)) в односвязной области $D_\xi = \Xi \subset R^n$, где $\varphi : D_x \to D_\xi$; D_ξ – окрестность точки равновесия $\xi_0 = \varphi^{-1}\left(\boldsymbol{x}_0\right)$. Без потери общности предположим, что $\xi_0 = 0$. Такое преобразование координат введено для выявления зависимости одних переменных в системе (1) от других. На самом деле вводить его не обязательно, однако при вычислении потока все равно придется учесть взаимосвязь переменных в системе (1), что эквивалентно введению данного регулярного преобразования координат. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть для системы (1) существует диффеоморфизм $\varphi : X \to \Xi$, преобразующий (1) в (5). Тогда система (1) устойчива в ($n-1$)-мерном шаре S_x, если для системы (2) выполнено

$$\oint\limits_{S_\xi} \dot{\xi}_i(t) N_i dS < 0\,,\ i = \overline{1, n}\,, \tag{6}$$

где $S_\xi = \varphi^{-1}\left(S_x\right)$, $S_\xi = \left\{\xi \in R^n : \xi^T\xi = R_0^2\right\}$.

Доказательство. Рассмотрим окрестность $g^t\delta_\xi$ точки равновесия $\xi = \xi_0 = 0$ системы (5) с радиусом $R_\delta(t)$, где g^t – оператор сдвига вдоль траекторий (5). Пусть $V_\delta(t)$ – евклидов объем области $g^t\delta_\xi$, в которую переводит область δ_ξ фазовый поток векторного поля $\boldsymbol{h}(\xi)$ в момент времени *t*. Из следствия формулы Лиувилля–Остоградского [1, 2] и с учетом гладкости правой части (5) $dV_\delta(t)\big/dt = \int\limits_{g^t\delta_\xi} \mathrm{div}\mathbf{h}\, dV$,

где $\mathrm{div}\mathbf{h}$ – скалярное поле дивергенции векторного поля $\mathbf{h}$; dV – евклидов объем элемента. Система (5) будет устойчива, если преобразование потока с течением времени уменьшает объем по каждой компоненте вектора ξ, т.е.

$$dV_{\delta i}(t)\big/dt = \int\limits_{g^t\delta_{\xi_i}} \mathrm{div} h_i \, dV_i < 0\,,\ i = \overline{1, n}\,. \tag{7}$$

Используя обратный переход по формуле Гаусса–Остоградского [9] для (3), перепишем (7) в виде

$$\int\limits_{g^t\delta_{\xi_i}} \mathrm{div} h_i \, dV_i = \oint\limits_{g^t\delta_{\xi_i}} h_i \mathbf{N}_{\delta i} dS_{\delta i} < 0\,,\ i = \overline{1, n}\,, \tag{8}$$

где $\mathbf{N}_{\delta i}$ – вектор внешней нормали к поверхности δ_ξ; $S_{\delta i}$ – площадь поверхности δ_ξ. Если δ_ξ, в которой выполнено (8), совпадает с областью определения (5) D_ξ, то в силу диффеоморфности преобразования φ система (1) устойчива во всей своей области определения D_x. Если наступает некоторый момент времени $t = t_1$, в котором скорость изменения хотя бы одного фазового объема $dV_{\delta i}(t)\big/dt\big|_{t=t_1}$, $i = \overline{1, n}$, меняет знак с минуса на плюс и далее с течением времени сохраняет положительное значение, то происходит расширение части фазового объема, и система (1) становится неустойчивой. Область $\delta_\xi = S_\xi$ с радиусом

$R_\delta(t)\big|_{t=t_1} = R_0$, для которой выполнено (6), и является областью устойчивости системы (2). Для получения области устойчивости системы (1) необходимо взять прямое преобразование $S_x = \varphi\left(S_\xi\right)$. Теорема 2 доказана.

Как видно из доказательства, если воспользоваться формулой Гаусса–Остоградского, то вместо формулы (6) можно использовать формулу следующего вида:

$$\oint\limits_{S_\xi} \dot{\xi}_i(t) N_i dS = \int\limits_V \mathrm{div} h_i \, dV_i < 0, \; i = \overline{1, n},$$

причем знак второго интеграла зависит только от знака $\mathrm{div} h_i$ в соответствующей области V.

Результат, использующий знак дивергенции, был получен в [6–8], однако система вида (1) не преобразовывалась к диагональному виду. Вследствие этого автор смог получить только необходимые условия асимптотической устойчивости. В качестве необходимого и достаточного условия в [8] для нелинейных систем второго порядка автор использовал знак дивергенции и квадратичные функции, определенные в исследуемой области. В настоящей работе получены условия устойчивости, основанные только на вычислении потока вектора фазовой скорости через выпуклую поверхность. Для этого, как отмечалось ранее, система (1) преобразовывалась к диагональному виду (5), чтобы при вычислении потока были учтены связи переменных в системе, иначе пришлось бы это учесть путем выражения одних переменных через другие. Следовательно, при нахождении дивергенции, согласно [6–8], мы получим не истинную дивергенцию вектора фазовой скорости. Для того чтобы использовать знак дивергенции при исследовании устойчивости систем без привлечения аппарата квадратичных функций, необходимо при нахождении дивергенции также учесть взаимосвязь переменных системы.

Асимптотическая устойчивость линейных систем

Рассмотрим доказательство второй теоремы Ляпунова и условия асимптотической устойчивости для линейных объектов. Пусть задана система линейных дифференциальных уравнений, записанная в форме

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \tag{9}$$

где $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ – вектор состояния уравнения (9); $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ – матрица с постоянными элементами. Хорошо известно, что равновесным состоянием системы (9) является точка $\boldsymbol{x} = 0$.

Теорема 3. Равновесное состояние $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 = 0$ системы (9) асимптотически устойчиво, если в окрестности точки $\boldsymbol{x}_0 = 0$ существует функция Ляпунова $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{x}$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}^T > 0$ такая, что ее полная производная по времени есть отрицательно определенная функция $\dot{V}(x) = -\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}$, $\mathbf{A}^T\mathbf{H} + \mathbf{H}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > 0$.

Доказательство. Определим вектор нормали $\mathbf{N}$ к поверхности $S = V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{x}$ как $\mathbf{N} = \mathrm{grad}\left(V\right) / \left|\mathrm{grad}\left(V\right)\right| = \mathbf{H}\mathbf{x} / \left|\mathbf{H}\mathbf{x}\right|$ и рассмотрим поток вектора фазовой скорости (9) через поверхность V: $\oint\limits_S \dot{\boldsymbol{x}}^T N dS = \oint\limits_S \frac{1}{\left|\mathbf{P}\mathbf{x}\right|} \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{H}\mathbf{x} dS$.

Преобразовав $\mathbf{A}^T\mathbf{H}^T$ к диагональной матрице согласно [5], получим $\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{H}\mathbf{x} = 0{,}5\boldsymbol{x}^T\left(\mathbf{A}^T\mathbf{H}^T + \mathbf{H}\mathbf{A}\right)\mathbf{x} = -0{,}5\boldsymbol{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}$, где $\mathbf{Q} = \mathrm{diag}\left\{q_i\right\} > 0$, $i = \overline{1, n}$. В результате этого получено уравнение Ляпунова $\mathbf{A}^T\mathbf{H}^T + \mathbf{H}\mathbf{A} = -0{,}5\mathbf{Q}$, которое будет выполнено, только если матрица $\mathbf{A}$ – гурвицева [3–5]. Перепишем последние интегралы поэлементно

$$\oint\limits_S \frac{1}{\left|\mathbf{x}\right|} \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{H}^T\mathbf{x} dS = -\oint\limits_S \frac{0{,}5}{\left|\mathbf{x}\right|} \mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} dS = -\sum_{i=1}^{n} \oint\limits_S \frac{q_i}{\left|\mathbf{x}\right|} x_i^2 dS.$$

Из свойств матрицы $\mathbf{Q}$, положительной определенности функций $\left|\mathbf{x}\right|^{-1} x_i^2 > 0$ и доказательства теоремы 1 имеем, что $-\oint\limits_S \frac{q_i}{\left|\boldsymbol{x}\right|} x_i^2 dS < 0$, $i = \overline{1, n}$, а значит, система (9) будет устойчива, так как преобразование потока за положительное время уменьшает объем по каждой компоненте вектора $\boldsymbol{x}$. Теорема 3 доказана.

Аналог теоремы 2 для линейных систем можно предложить, если рассмотреть регулярное преобразование координат $\Gamma : \boldsymbol{x}(t) \to \xi(t)$, $\Gamma \in R^{n\times n}$, приводящее систему (9) к виду $\dot{\xi}(t) = \mathbf{D}\xi(t)$, $\mathbf{D} = \mathrm{diag}\left\{d_i\right\} \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $i = \overline{1, n}$. Однако это слишком узкий класс объектов. Для того чтобы рассмотреть теорему 2 для всего класса линейных объектов, ниже предложена теорема 4.

Теорема 4. Если для системы (9) можно указать матрицу $\mathbf{H} > 0$, $\mathbf{H} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, такую, что для новой системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{HAx}(t) \tag{10}$$

выполнено

$$\oint_S \dot{x}_i(t) N_i dS < 0, \; i = \overline{1, n}, \tag{11}$$

где $S = \left\{ \boldsymbol{x} \in R^n : \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x} = R_0^2 \right\}$, то система (9) имеет асимптотически устойчивую точку равновесия $\boldsymbol{x} = 0$.

Доказательство. Найдем поток векторного поля системы (10) через поверхность S с вектором нормали $\mathbf{N} = \mathrm{grad}(S) / \left| \mathrm{grad}(S) \right| = \mathbf{x} / \left| \mathbf{x} \right|$:

$$\oint_S \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{N} dS = \oint_S (\mathbf{Ax})^T \, \mathbf{x}/\mathbf{x} \, dS = \oint_S \frac{1}{\mathbf{x}} \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{H}^T \mathbf{x} dS. \tag{12}$$

Запишем квадратичную форму $\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{H}^T \mathbf{x}$ в виде $\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Hx} = 0{,}5\mathbf{x}^T \left(\mathbf{A}^T \mathbf{H}^T + \mathbf{HA} \right) \mathbf{x} = -0{,}5\mathbf{x}^T \mathbf{Qx}$, где $\mathbf{Q} = \mathrm{diag}\{q_i\} > 0$, $i = \overline{1, n}$. Уравнение Ляпунова $\mathbf{A}^T \mathbf{H}^T + \mathbf{HA} = -0{,}5\mathbf{Q}$ будет выполнено в случае гурвицевости матрицы $\boldsymbol{A}$ [3–5]. Запишем теперь (12) поэлементно:

$$\oint_S \frac{1}{|\mathbf{x}|} \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{H}^T \mathbf{x} dS = -\oint_S \frac{0{,}5}{|\mathbf{x}|} \mathbf{x}^T \mathbf{Qx} dS = -\sum_{i=1}^{n} \oint_S \frac{q_i}{|\mathbf{x}|} x_i^2 dS.$$

Из условий выбора матрицы **Q**, положительной определенности функций $|\boldsymbol{x}|^{-1} x_i^2 > 0$ и доказательства теоремы 2 получим, что $-\oint_S \frac{q_i}{|\mathbf{x}|} x_i^2 dS < 0$, $i = \overline{1, n}$. Значит, (11) выполнено. Теорема 4 доказана.

Заключение

В работе получены условия устойчивости нелинейных и линейных динамических стационарных систем с использованием потока вектора фазовой скорости. Достоинством предложенного подхода является то, что для исследования характера поведения решений системы дифференциальных уравнений достаточно знать знак потока вектора фазовой скорости в заданной области через замкнутую выпуклую поверхность. Существенным недостатком является наличие регулярного преобразования координат, которое зачастую получить достаточно сложно. Если же не применять регулярное преобразование координат, то при вычислении потока по определению возникают сложные интегралы, связанные с зависимостью одних переменных в системе от других. При использовании формулы Гаусса–Остоградского возникает проблема вычисления дивергенции фазовой скорости из-за зависимости переменных в системе друг от друга.

Литература

1. Арнольд В.И., Ильяшенко Ю.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985. – Т. 1. – 149 с.
2. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. – М.: Мир, 1986. – 243 с.
3. Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. – М.: Мир, 1964. – 168 с.
4. Ляпунов А.М. Общая задача устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959. – 472 с.
5. Методы классической и современной теории автоматического управления. Т. 1: Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 656 с.
6. Жуков В.П. Об одном методе качественного исследования устойчивости нелинейных систем // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 6. – С. 11–15.
7. Жуков В.П. Необходимые и достаточные условия неустойчивости нелинейных автономных динамических систем // Автоматика и телемеханика. – 1990. – № 12. – С. 59–65.
8. Жуков В.П. Дивергентные условия асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем второго порядка // Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 7. – С. 34–43.
9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. 3. – 662 с.
10. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. – М.: Факториал Пресс, 2000. – 448 с.

Фуртат Игорь Борисович – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, доцент, cainenash@mail.ru