3 АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

УДК 62-50

ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ε-ИНВАРИАНТНОСТИ ВЫХОДА СИСТЕМЫ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

С.А. Александрова, А.А. Мусаев, О.В. Слита, А.В. Ушаков

Ставится задача обеспечения параметрической ε-инвариантности выхода непрерывной системы при неопределенности матрицы состояния исходного объекта. Задача решается для случая матрицы состояния объекта, заданной в сопровождающей форме, для которой оказываются невыполнимыми условия достижения абсолютной параметрической инвариантности. Результаты иллюстрируются примером.

Ключевые слова: неопределенность задания матрицы, сопровождающая форма, параметрическая ε-инвариантность, собственные значения и векторы.

Введение

Современные методы анализа и синтеза динамических систем позволяют решать задачи управления ими в условиях системных неопределенностей задания модели объекта [1–5]. Одной из постановочных версий управления в условиях неопределенности является задача обеспечения инвариантности выхода системы к неопределенности параметров модели исходного объекта [4, 5] или параметрической инвариантности.

В работе приводятся алгебраические условия достижимости абсолютной параметрической инвариантности [2, 4, 5] и делается переход к ситуации, когда полученные алгебраические условия оказываются невыполнимыми, что явилось мотивацией к постановке задачи обеспечения ε-инвариантности выхода системы с заданной оценкой величины ε.

Алгебраические условия обеспечения абсолютной параметрической инвариантности выхода системы

Рассматривается непрерывный объект управления (ОУ)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)\,,\ \ \boldsymbol{x}(t)\big|_{t=0} = \boldsymbol{x}(0)\,,\ \ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\,, \tag{1}$$

где $\mathbf{x} \in R^n, \mathbf{u} \in R^r, \mathbf{y} \in R^m$; $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{y}$ – векторы состояния, управления и выхода $\mathbf{A} \in R^{n\times n}, \mathbf{B} \in R^{n\times r}$, $\mathbf{C} \in R^{m\times n}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ – матрицы состояния, управления и выхода, при этом ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$) и ($\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$) образуют соответственно управляемую и наблюдаемую пары; $\Delta\mathbf{A} \in R^{n\times n}$ – неопределенность задания матрицы состояния.

Закон управления (ЗУ) объектом (1) формируется в виде

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}_g g(t) - \mathbf{K}\mathbf{x}(t)\,, \tag{2}$$

где $g(t)$ – задающее воздействие, матрица $\mathbf{K}$ с использованием метода модального управления [6] находится с помощью системы уравнений

$$\mathbf{M\Lambda} - \mathbf{AM} = -\mathbf{BH}\,, \tag{3}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{HM}^{-1}\,,$$

в которых наблюдаемая пара матриц $(\mathbf{\Lambda}, \mathbf{H})$ модальной модели задает желаемые динамические свойства системы (путем назначения структуры собственных чисел диагональной матрицы $\mathbf{\Lambda}$). Следует отметить, что если известны матрицы $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \Lambda, \mathbf{H}$, то уравнение (3) решается относительно матрицы $\mathbf{M}$, а если известны $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \Lambda, \mathbf{M}$, то уравнение (3) решается относительно матрицы $\mathbf{H}$ в форме

$$\mathbf{H} = \left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{AM} - \mathbf{M\Lambda})\,.$$

Замкнутая система, образованная ОУ (1) и ЗУ (2), записывается как

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Fx}(t) + \mathbf{G}g(t) + \Delta\mathbf{Fx}(t);\quad \mathbf{x}(0)\,; \tag{4}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t);$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{BK}\,,\ \mathbf{G} = \mathbf{BK}_g\,, \Delta\mathbf{F} = \Delta\mathbf{A}\,.$$

ЗУ (2) должен обеспечивать желаемые показатели качества замкнутой системы при наличии в исходном объекте параметрической неопределенности, т.е. параметрическую инвариантность ее выхода. Для целей дальнейших исследований представим сигнальный компонент $\Delta\mathbf{Fx}(t)$ в декомпозированной форме:

$$\Delta\mathbf{F}\mathbf{x}(t)=\Delta\mathbf{A}\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta A_{11} & \Delta A_{12} & \dots & \Delta A_{1n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta A_{21} & \Delta A_{22} & \dots & \Delta A_{2n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{bmatrix}+$$

$$+\dots+\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta A_{n1} & \Delta A_{n2} & \dots & \Delta A_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{bmatrix}=\mathbf{D}\eta(t)\,. \qquad (5)$$

Вектор параметрического воздействия $\eta(t)$ сформирован на правых мультипликативных компонентах элементов разложения $\Delta\mathbf{F}\mathbf{x}(t)$ в форме (5) в силу представления

$$\eta(t)=col\left\{\eta_j=\begin{bmatrix}\Delta A_{j1} & \Delta A_{j2} & \dots & \Delta A_{jn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{bmatrix}=(\Delta A)^j x(t)=h_j^T x(t)\right\}, \qquad (6)$$

где $(\Delta A)^j$ – j-ая строка матрицы $\Delta\mathbf{A}$. На левых сомножителях слагаемых этого выражения сформируем матрицу параметрического воздействия $\mathbf{D}=row\left\{\mathbf{D}_j=\left[0_{(j-1)\times 1};1;0_{(n-j)\times 1}\right];\ j=\overline{1,n}\right\}$.

С использованием (6) запишем уравнение (4) системы в виде

$$\dot{\xi}(t)=\mathbf{F}\mathbf{x}(t)+\mathbf{G}\mathbf{g}(t)+\mathbf{D}\boldsymbol{\eta}(t);\ \mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\mathbf{x}(t)\,. \qquad (7)$$

Представление (7) системы (4) позволяет переформулировать задачу обеспечения абсолютной параметрической инвариантности $\boldsymbol{y}(t,\mathbf{F},g(t),\Delta\mathbf{A}\neq 0)=\boldsymbol{y}(t,\mathbf{F},g(t),\Delta\mathbf{A}\equiv 0)$ как задачу обеспечения сигнальной инвариантности [4, 7]

$$\mathbf{y}(t,\mathbf{F},g(t),\eta(t)\neq 0)=\mathbf{y}(t,\mathbf{F},g(t),\eta(t)\equiv 0)\,. \qquad (8)$$

Запишем выражение (8) в терминах преобразований Лапласа и передаточных функций (матриц)

$$Y(s,g(s),\eta(s)\neq 0)=\mathbf{\Phi}_{yg}(s)g(s)+\mathbf{\Phi}_{y\eta}(s)\eta(s)=\mathbf{\Phi}_{yg}(s)g(s)\,, \qquad (9)$$

где $g(s)$ – Лапласов образ задающего воздействия $g(t)$; $\eta(s)$ – Лапласов образ «параметрического» воздействия $\eta(t)$; $\mathbf{\Phi}_{yg}(s)$ – передаточная функция (матрица) отношения «задающее воздействие–выход системы»; $\mathbf{\Phi}_{y\eta}(s)$ – передаточная функция (матрица) отношения «параметрическое» воздействие–выход системы». Очевидно, что равенство (9) при $\eta(s)\neq 0$ выполняется, когда

$$\mathbf{\Phi}_{y\eta}(s)=0\,. \qquad (10)$$

Соотношение (10) представляет собой «сигнальный» аналог инвариантности выхода (ошибки) к неопределенностям задания матрицы состояния исходного объекта, которое выполняется при любых реализациях внешнего задающего воздействия $g(t)$. Приведем утверждение, одно из положений которого базируется на структуре собственных векторов [8] матрицы состояния проектируемой системы.

Утверждение 1. [3, 5]. Для того чтобы система (4) обладала абсолютной параметрической инвариантностью выхода к неопределенности задания матрицы исходного объекта или чтобы система (10) обладала сигнальной инвариантностью выхода относительно внешнего «параметрического» воздействия $\eta(t)$ в смысле условий (8), (9), т.е. чтобы передаточная функция (матрица) «параметрический» вход η – выход системы y » $\mathbf{\Phi}_{y\eta}(s)$ была бы нулевой и выполнялось равенство (10),

$$\mathbf{\Phi}_{y\eta}(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{F})^{-1}\mathbf{D}=\mathrm{row}\left\{\mathbf{\Phi}_{y\eta_j}=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathrm{F})^{-1}\mathbf{D}_j;\ j=\overline{1,p};1\le p\le n\right\}=0\,,$$

достаточно, чтобы

1. столбцы D_j матрицы $\mathbf{D}$ были собственными векторами матрицы $\mathbf{F}$;
2. столбцы D_j принадлежали ядру матрицы $\mathbf{C}$, т.е. чтобы выполнялось соотношение $\mathbf{C}D_j=0$.

Проблема параметрической ε-инвариантности

Проблема параметрической ε-инвариантности возникает в случае, когда невозможно достижение абсолютной параметрической инвариантности, т.е. когда не выполняется какое-либо из условий утверждения 1. Проиллюстрируем эту ситуацию [9] на примере объекта управления, заданного в сопровождающем управляемом базисе

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1}\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\b_n\end{bmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}. \qquad (11)$$

В этом случае любые системные неопределенности $\Delta\mathbf{A}$ возмущают только последнюю строчку матрицы состояния, и

$$\Delta\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \Delta a_0 & \Delta a_1 & \Delta a_2 & \dots & \Delta a_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\Delta a_0 & \Delta a_1 & \Delta a_2 & \dots & \Delta a_{n-1}\end{bmatrix},$$

откуда для матрицы $\mathbf{D}$ получаем представление в виде матрицы-столбца

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}^T. \qquad (12)$$

В силу канонической сопровождающей формы задания матрицы $\mathbf{A}$ и вида матрицы $\mathbf{B}$ (11) ЗУ (2) сохраняет каноническую сопровождающую форму матрицы состояния $\mathbf{F}$ системы [9], которая имеет собственные вектора ξ_i, формируемые по схеме Вандермонда:

$$\xi_i=\begin{bmatrix}1 & \lambda_i & \lambda_i^2 & \dots & \lambda_i^{n-1}\end{bmatrix}^T;\left(i=\overline{1,n}\right). \qquad (13)$$

Как видно из структуры (13) собственных векторов, матрица-столбец $\mathbf{D}$ (12) не совпадает ни с одним из собственных векторов $\mathbf{F}$. Таким образом, при представлении матрицы состояния в форме (11) первое условие утверждения 1 выполнено не будет. Следовательно, абсолютная параметрическая инвариантность выхода для случая матрицы состояния, заданной в сопровождающей форме, недостижима. В этом случае следует перейти к обеспечению ε - инвариантности выхода проектируемой системы.

Оценка $\hat{\varepsilon}$ величины параметрической ε-инвариантности

Задачу формирования оценки $\hat{\varepsilon}$ величины параметрической ε-инвариантности решим в два этапа.

Этап 1. Модификация представления собственных векторов, построенных по схеме Вандермонда; им придается вид

$$\xi_i=\left[\left(\lambda_i^{n-1}\right)^{-1} \ \dots \ \left(\lambda_i^2\right)^{-1} \ \left(\lambda_i\right)^{-1} \ 1\right]^T;\left(i=\overline{1,n}\right).$$

Этап 2. Представление матрицы-столбца $\mathbf{D}$ (12) в виде проекции на собственный вектор ξ_1 в форме $\alpha\xi_1=\mathbf{D}$, в которой коэффициент α ищется с помощью алгоритма Грама [10] из условия

$$\alpha=\frac{\left(\xi_1,\mathbf{D}\right)}{\left(\xi_1,\xi_1\right)}=\frac{\xi_1^T\mathbf{D}}{\xi_1^T\xi_1}=\frac{1}{1+\left(\lambda_1^{-1}\right)^2+\ldots+\left(\lambda_1^{-(n-1)}\right)^2}.$$

Определим оценку $\hat{\varepsilon}$ на основе нормы невязки представления матрицы-столбца $\mathbf{D}$ его проекцией $\hat{\mathbf{D}}(\lambda_1)=\alpha\xi_1$ на вектор ξ_1 в форме

$$\hat{\varepsilon}(\lambda_1)=\left\{\left\|\mathbf{D}-\hat{\mathbf{D}}(\lambda_1)\right\|\Big/\left\|\mathbf{D}\right\|\right\}\cdot 100\%.$$

Пример

В качестве ОУ рассмотрим электропривод, исполнительный двигатель которого обладает механической характеристикой, содержащей восходящий участок [11]. Представление ОУ в виде (1) характеризуется матрицами $\mathbf{A}+\left[\Delta\mathbf{A}\right]=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & [-3,5;\,0,5]\end{bmatrix}$ с медианной составляющей $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1,5\end{bmatrix}$ и интервальной $\left[\Delta\mathbf{A}\right]=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & [-2;2]\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^T$, $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$.

Зададим требования к переходному процессу в виде его длительности $t_{\text{пп}}=2,4$ с и величины перерегулирования $\sigma=0\,\%$ в системе, в которую войдет объект. Синтезируем закон модального управления для номинального ОУ на основе биномиальной модальной модели, в которой $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Тогда $\mathbf{K} = [5{,}25 \quad 5{,}875]$, $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{K}_g = 6{,}25$, $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Результаты моделирования, представленные кривыми ошибки воспроизведения задающего воздействия $g(t) = t$ при медианном и двух угловых реализациях параметров ОУ ($\underline{e}(t)$, $\bar{e}(t)$ – значения ошибки $e(t)$, соответствующие угловым значениям интервальной матрицы состояния), показывают (рисунок, а), что выход системы не обладает абсолютной параметрической инвариантностью, а параметрическая ε-инвариантность характеризуется заметной величиной ε.

Синтезируем закон модального управления, задавая значения λ_1: $\lambda_1 = -10$, $\lambda_1 = -50$, $\lambda_1 = -100$.

Результаты моделирования представлены на рисунке, б ($\lambda_1 = -10$), рисунке, в ($\lambda_1 = -50$) и рисунке, г ($\lambda_1 = -100$), каждый из которых получен при медианных и двух угловых реализациях параметров исходного ОУ. Ни в одном из случаев не достигается абсолютная параметрическая инвариантность, но наблюдается заметное уменьшение величины ε параметрической инвариантности по мере уменьшения величины $\hat{\varepsilon}$ невязки аппроксимации вектора $\mathbf{D}$ собственным вектором, формируемым по схеме Вандермонда (таблица).

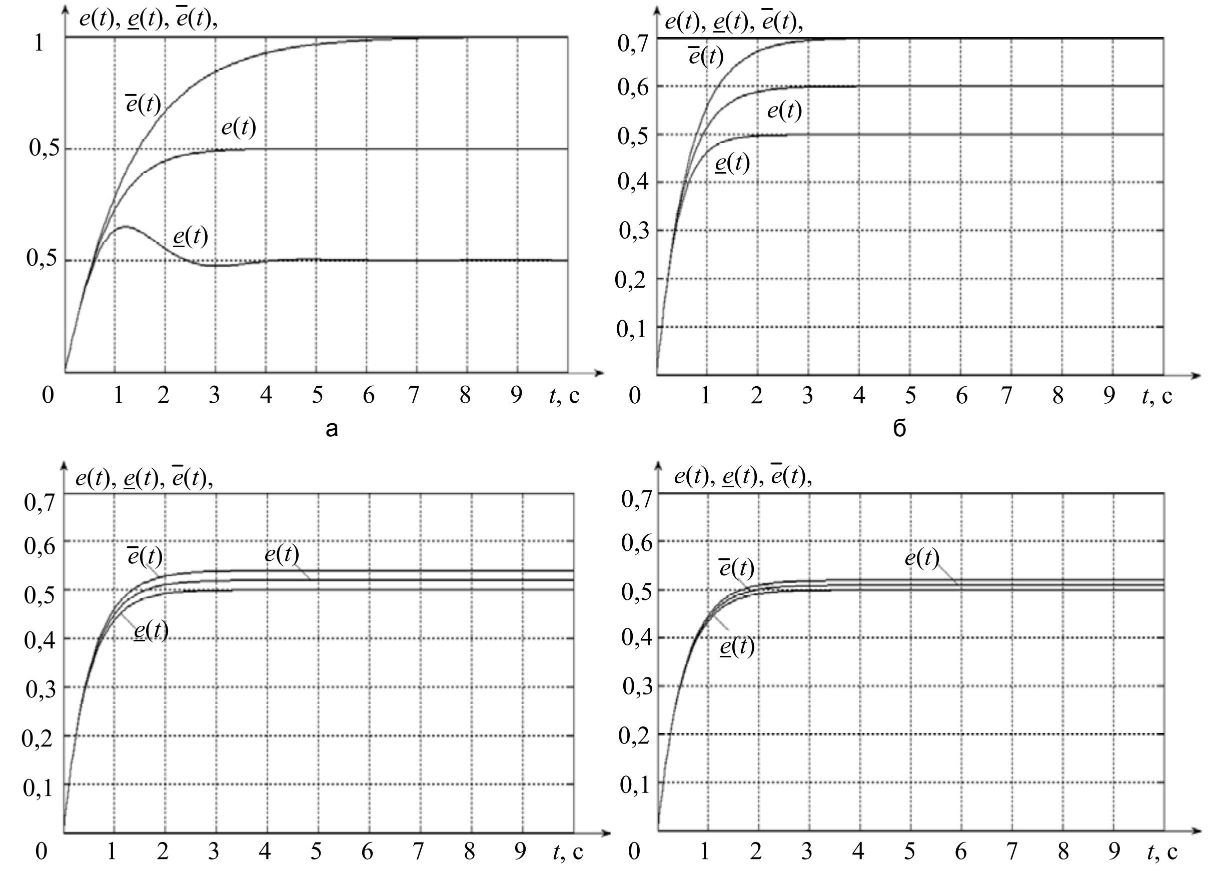

Рисунок. Ошибка по выходу для номинальной и угловых версий системы, спроектированной с помощью модального управления: $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ (а); $\lambda_1 = -10; \lambda_2 = -2$ (б); $\lambda_1 = -50; \lambda_2 = -2$ (в); $\lambda_1 = -100; \lambda_2 = -2$ (г)

Заключение

Показано, что для случая, когда матрица состояния исходного объекта задана в таком базисе, в котором недостижимо первое условие обеспечения абсолютной параметрической инвариантности, задача инвариантности выхода относительно неопределенности задания матрицы состояния объекта может быть решена в форме достижения параметрической ε-инвариантности с заданной ε.

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14. B37.21.0406 «Разработка многофункционального малогабаритного мультиротационного летательного аппарата».

	Матрица состояния спроектированной системы (медианная составляющая)	Собственный вектор	Величина $\hat{\varepsilon}$ невязки представления матрицы-столбца **D**	Матрица управления спроектированной системы	Величина ε параметрической инвариантности по ошибке
$\lambda_{1,2} = -2$	$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$	$\xi = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\hat{\varepsilon} = 50\%$	$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\varepsilon = 50\%$
$\lambda_1 = -10$ $\lambda_2 = -2$	$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -12 \end{bmatrix}$	$\xi = \begin{bmatrix} -0,1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\hat{\varepsilon} = 10\%$	$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix}$	$\varepsilon = 16\%$
$\lambda_1 = -50$ $\lambda_2 = -2$	$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -52 \end{bmatrix}$	$\xi = \begin{bmatrix} -0,02 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\hat{\varepsilon} = 5\%$	$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 120 \end{bmatrix}$	$\varepsilon = 3,85\%$
$\lambda_1 = -100$ $\lambda_2 = -2$	$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -200 & -102 \end{bmatrix}$	$\xi = \begin{bmatrix} -0,01 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\hat{\varepsilon} = 1\%$	$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \end{bmatrix}$	$\varepsilon = 2\%$

Таблица. Показатели параметрически ε -инвариантных систем

Литература

1. Буков В.Н., Бронников А.М. Условия инвариантности выхода линейных систем // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 2. – С. 23–35.
2. Никифоров В.О., Ушаков А.В. Управление в условиях неопределенности: чувствительность, адаптация, робастность. – СПб: СПб ГИТМО (ТУ), 2002. – 232 с.
3. Ackermann J. Robust control systems with uncertain physical parameters. – London: Springer-Verlag, 1993. – 406 p.
4. Слита О.В., Ушаков А.В. Обеспечение инвариантности выхода непрерывной системы относительно экзогенных сигнальных и эндогенных параметрических возмущений: алгебраический подход // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2008 – № 4. – С. 24–32.
5. Слита О.В., Ушаков А.В. Достаточные алгебраические условия параметрической инвариантности выхода линейной стационарной системы в первом приближении // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2010. – № 6. – С. 16–22.
6. Слита О.В., Ушаков А.В. Модальное управление: два способа реализации концепции подобия // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2008. – № 9. – С. 7–13.
7. Дударенко Н.А., Полякова М.В., Ушаков А.В. Алгебраическая организация условий обобщенной синхронизируемости многоагрегатных динамических объектов // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2010. – № 2 (66). – С. 30–36.
8. Дударенко Н.А., Ушаков А.В. Структура собственных векторов матриц состояния многоканальных систем как вырождающий фактор // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2012. – № 5 (81). – С. 52–58.
9. Слита О.В., Ушаков А.В. Модельное представление объекта управления в задаче параметрической инвариантности// Изв. вузов. Приборостроение. – 2006. – Т. 49. – № 1. – С. 14–20.
10. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1973. – 575 с.
11. Ковчин С.А., Сабинин Ю.А. Теория электропривода. – СПб: Энергоатомиздат, 1994. – 496 с.

Александрова Софья Александровна – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, студент, alexandrova_sophie@mail.ru

Мусаев Андрей Александрович – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, студент, brein7@mail.ru

Слита Ольга Валерьевна – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, доцент, o-slita@yandex.ru

Ушаков Анатолий Владимирович – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, доктор технических наук, профессор, ushakov-AVG@yandex.ru