УДК 681.5.01

# ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ В УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ ТЯГИ ДВИГАТЕЛЯ

**Б.В. Видин, О.В. Ульянова**

Исследуется нелинейная система дифференциальных уравнений, описывающая движение центра масс летательного аппарата в вертикальной плоскости при прямолинейной траектории. Получены оценки значений скорости и дальности в зависимости от ограничений на ресурс управления тягой двигателя.

**Ключевые слова:** динамика летательного аппарата, ресурс управления, ограничения.

## Введение

Движение центра масс летательного аппарата в скоростной системе координат в вертикальной плоскости на прямолинейном участке траектории после выбора направления описывается [1] системой уравнений

$$m\frac{dV}{dt} = P\cos\alpha - C_x\frac{\rho V^2}{2}S - mg\sin\theta,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \frac{dh}{dt} = V\sin\theta, \quad \frac{dx}{dt} = V\cos\theta, \quad \frac{dm}{dt} = -q, q > 0, \tag{1}$$

где $m$ – масса летательного аппарата; $V$ – длина вектора скорости; $\theta$ – угол наклона траектории, $\theta = const$; $\alpha$ – угол атаки, $\alpha = const$; $h$ – высота полета; $x$ – дальность полета; $q$ – секундный расход массы топлива; $P$ – тяга двигателя, $P \le K$; $K$ – ресурс управления (величина, ограничивающая тягу двигателя, изменение тяги двигателей возможно в пределах строго ограниченного интервала, обусловленного количеством топлива (используется нижняя граница данного интервала), $S$ – площадь крыльев летательного аппарата (ЛА), $\rho(h)$ – плотность атмосферы, зависящая от высоты полета, $\rho(h) = Ce^{-h/R}$, $R$ – радиус Земли, $C_x$ – коэффициент лобового сопротивления, $C_y$ – коэффициент подъемной силы, при этом

$$\frac{\partial C_x}{\partial\alpha} > 0; \ \frac{\partial C_y}{\partial\alpha} > 0$$

В качестве управляющей функции выбирается тяга двигателя $P(t)$. Ставится задача найти $P(t)$ так, чтобы решение системы (1) удовлетворяло начальным условиям

$$t = t_0: \ V = V_0, h = h_0, x = x_0, m = m_0, P = P_0 \tag{2}$$

и конечным условиям $t = t'$: $h = h_k, x = x_k, m = m_k$, где $t'$ – заранее неизвестный момент времени.

## Предлагаемый подход к решению

Совокупность функций $V(t)$, $h(t)$, $x(t)$, $m(t)$, $P(t)$ будем называть решением задачи (1), (2). Разделив все уравнения системы (1) на $\frac{dx}{dt} = V\cos\theta$, приходим к системе

$$\frac{dV}{dx} = \frac{1}{mV\cos\theta}\left(P\cos\alpha - C_x\frac{\rho V^2}{2}S - mg\sin\theta\right),$$
$$\frac{dh}{dx} = \mathrm{tg}\theta, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{V\cos\theta}, \quad \frac{dm}{dx} = \frac{-q}{V\cos\theta}. \tag{3}$$

Требуется найти $P(t)$ так, чтобы решение системы (3) удовлетворяло начальным условиям:

$$x = x_0 : V = V_0, h = h_0, m = m_0, P = P_0 \tag{4}$$

и конечным условиям $x = x_k$, $h = h_k, m = m_k$. Совокупность функций $V(x)$, $h(x)$, $m(x)$, $P(x)$ будем называть решением задачи (3), (4). Так как в соответствии с исходными данными $\theta = const$, необходимо найти функцию $h(x)$:

$$h(x) = \mathrm{tg}\,\theta\int_{x_0}^{x_k} dx.$$

Продифференцируем обе части первого уравнения системы (3):

$$\frac{dV}{dx} = \frac{1}{mV\cos\theta}\left(P\cos\alpha - C_x\frac{\rho V^2}{2}S - mg\sin\theta\right) = f(V,h,m,P),$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial V}\frac{dV}{dx} + \frac{\partial f}{\partial h}\frac{dh}{dx} + \frac{\partial f}{\partial m}\frac{dm}{dx} + \frac{\partial f}{\partial P}\frac{dP}{dx},$$

откуда получаем производную тяги по дальности

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\frac{d^2V}{dx^2} - \frac{\partial f}{\partial V}\frac{dV}{dx} - \frac{\partial f}{\partial h}\frac{dh}{dx} - \frac{\partial f}{\partial m}\frac{dm}{dx}}{\frac{\partial f}{\partial P}},$$

где

$$\frac{\partial f}{\partial V} = \frac{1}{\cos\theta}\left(-\frac{P\cos\alpha}{V^2 m} - \frac{C_x\rho S}{2m} + \frac{g\sin\theta}{V^2}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial h} = -\frac{C_x\rho VS}{2m\cos\theta}\frac{C}{R}e^{-h/R},$$

$$\frac{\partial f}{\partial m} = \frac{1}{m^2\cos\theta}\left(-\frac{P\cos\alpha}{V} + \frac{C_x\rho VS}{2}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial P} = \frac{\cos\alpha}{mV\cos\theta}.$$

Таким образом, приходим к системе уравнений

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\frac{d^2V}{dx^2} - \frac{\partial f}{\partial V}\frac{dV}{dx} - \frac{\partial f}{\partial h}\frac{dh}{dx} - \frac{\partial f}{\partial m}\frac{dm}{dx}}{\frac{\partial f}{\partial P}},$$

$$\frac{dh}{dx} = \mathrm{tg}\,\theta\ ,\ \frac{dt}{dx} = \frac{1}{V\cos\theta}\,,\ \frac{dm}{dx} = \frac{-q}{V\cos\theta}$$

с учетом начальных условий $x = x_0,\ t = t_0, h = h_0, m = m_0, P = P_0$ на траектории $[x_0, x_k]$.

Поскольку $\theta = const$, $\frac{d\theta}{dt} = 0$, то $P\sin\alpha + C_y\frac{\rho V^2}{2}S - mg\cos\theta = 0$. Задавая ограничения на $m$: $m_1 \le m \le m_2$, получим ограничения на $V$:

$$\mathrm{C_y}\frac{\rho \mathrm{V}^2}{2}\mathrm{S} = \mathrm{mg}\,cos\,\theta\text{-}\mathrm{P}\,sin\,\alpha\ ,$$

$$V^2 = \frac{2}{C_y\rho S}\left(mg\,cos\,\theta - P\,sin\,\alpha\right)\ .$$

Обозначив $V^2 = \overline{V}$, получим

$$\overline{V} \le \frac{2}{C_y^{min}\rho S}\left(m_2 g\cos\theta - K\sin\alpha\right) = \overline{V}_2\ ,$$

$$\overline{V} \ge \frac{2}{C_y^{max}\rho S}m_1 g\cos\theta = \overline{V}_1\ ,$$

$$\overline{V}_1 \le \overline{V} \le \overline{V}_2\,;\ V_1 = \sqrt{\overline{V}_1}\ ,\ V_2 = \sqrt{\overline{V}_2}\ ;\ V_1 \le V \le V_2\,,$$

где $V_1$ и $V_2$ - минимальное и максимальное значение по скорости соответственно.

Получим оценку на конечное значение дальности:

$$\frac{dV}{dx} = \left.\frac{dV}{dx}\right|_{X = X_0} + \int_{X_0}^{X_k}\frac{dV}{dx}dx\,,$$

$$\left.\frac{dV}{dx}\right|_{X = X_0} = \frac{1}{m_0 V_0\cos\theta}\left(P_0\cos\alpha - C_{x_0}\frac{\rho_0 V_0{}^2}{2}S - m_0 g\sin\theta\right)\,,$$

$$V_1 \le V \le V_2\ ,\ V = V_0 + \int_{X_0}^{X_k}\frac{dV}{dx}dx\,,$$

и выберем $V_0$: $V_1 \le V_0 \le V_2$,

$$V_1 - V_0 < \int_{X_0}^{X_k}\frac{dV}{dx}dx < V_2 - V_0\ ,$$

$$\int_{X_0}^{X_k}\frac{dV}{dx}dx = \int_{X_0}^{X_k}\frac{dV}{dx}dx + \int_{X_0}^{X_k}\int_{X_0}^{X_k}\frac{d^2V}{dx^2}dx^2\ ,$$

$$V_1 - V_0 - \int\frac{dV}{dx}dx \le \frac{d^2V}{dx^2}\left(x_k - x_0\right)^2 \le V_2 - V_0 - \int\frac{dV}{dx}dx\ .$$

Введем обозначения:

$$V_1 - V_0 - \int_{X_0}^{X_k}\frac{dV}{dx}dx = \overline{\beta}_1,$$

$$V_2 - V_0 - \int_{X_0}^{X_k}\frac{dV}{dx}dx = \overline{\beta}_2\,,\ \beta_1 \le \frac{d^2V}{dx^2} \le \beta_2\,,$$

$$\beta_1 = \frac{\overline{\beta}_1}{(x_k - x_0)^2},\ \beta_2 = \frac{\overline{\beta}_2}{(x_k - x_0)^2},$$

$$\left|\frac{dP}{dx}\right| \le K(x_k - x_0),\ \overline{K} = max\left|\frac{dP}{dx}\right|$$

в области, где фазовые координаты удовлетворяют ограничениям. С учетом дополнительных соотношений [2]

$$\rho(h) = Ce^{-h/R},\ \rho_1 \le \rho(h) \le \rho_2,$$

$$\rho_1 = Ce^{-h_2/R},\ \rho_2 = Ce^{-h_1/R},$$

аналогично могут быть получены оценки

$$\gamma_1 \le \frac{dV}{dx} \le \gamma_2,\ \gamma_3 \le \frac{dh}{dx} \le \gamma_4,\ \gamma_5 \le \frac{dm}{dx} \le \gamma_6$$

$$\delta_1 \le \frac{\partial f}{\partial V} \le \delta_2,\ \delta_3 \le \frac{\partial f}{\partial h} \le \delta_4,\ \delta_5 \le \frac{\partial f}{\partial m} \le \delta_6,\ \delta_7 \le \frac{\partial f}{\partial P} \le \delta_8$$

тогда

$$\overline{K} = \frac{\beta_2 + \gamma_2\delta_2 + \gamma_4\delta_4 + \gamma_6\delta_6}{\delta_7},\ \overline{K}(x_k - x_0) \le K,\ x_k - x_0 \le \frac{K}{\overline{K}}.$$

## Заключение

При выполнении полученного ограничения управление летательным аппаратом удовлетворяет условию $P \le K$. Таким образом, для описанного движения ЛА получены оценки на значения скорости и дальности, при которых управляющая функция удовлетворяет заданным ограничениям.

Предлагаемая модель движения летательного аппарата может быть использована при разработке программного обеспечения пилотажно-навигационных комплексов, на которые возложены задачи управления полетом в условиях ограниченного ресурса управления, с отработкой на этапе предварительных стендовых испытаний.

## Литература

1. Красовский А.А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. – М.: Наука, 1973. – 523 с.
2. Остославский И.В., Стражева И.В. Динамика полетов. Траектории летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1969. – 354 с.

***Видин Борис Викторович*** – СПб ОКБ «Электроавтоматика» имени П.А. Ефимова», зам. главного конструктора, кандидат технических наук, профессор, postmaster@elavt.spb.ru

***Ульянова Ольга Владимировна*** – СПб ОКБ «Электроавтоматика» имени П.А. Ефимова», инженер, postmaster@elavt.spb.ru