**УДК 681.51.015**

# АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ ПО ВЫХОДУ С КОМПЕНСАЦИЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ И СТРУКТУРНЫМИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ[2]

**А.А. Бобцов, С.А. Колюбин, А.А. Пыркин**

Рассматривается задача стабилизации по выходу линейного объекта, подверженного влиянию внешнего неизвестного синусоидального возмущения. Решение задачи получено для класса линейных систем, функционирующих в условиях параметрической и структурной неопределенностей.

**Ключевые слова:** управление по выходу, компенсация возмущений, параметрическая и структурная неопределенность.

## Введение

Компенсация синусоидальных возмущающих воздействий является актуальной и популярной задачей современной теории управления (например, [1–15]). Большинство исследований, связанных с разработкой методов компенсации гармонических возмущений, изучают случай, когда амплитуды, фазы и частоты являются неизвестными постоянными параметрами (например, [1–14]). В частности, работы [3, 4] являются одними из первых работ отечественных ученых, где была поставлена и решена задача адаптивной компенсации неизвестных гармонических возмущений. В настоящее время при различных допущениях относительно модели объекта рассматриваются различные случаи задач управления, а именно: линейность или нелинейность динамики, параметрическая определенность или ее отсутствие, доступность измерений всех переменных состояния или только их части и пр. Несмотря на то, что в фундаментальной монографии [2], посвященной методам компенсации возмущений, большинство подходов было изложено, кратко рассмотрим некоторые новые результаты.

В [5] предлагается алгоритм управления линейным устойчивым объектом с известными параметрами и единичной относительной степенью, подверженным влиянию смещенного гармонического возмущения. В отличие от [5], в [8] рассмотрен алгоритм компенсации возмущающего воздействия для случая неминимально фазового линейного объекта с известными параметрами, но любой относительной степени. Работы [9, 10, 14] посвящены парированию синусоидального возмущения в условиях полной параметрической неопределенности объекта управления. Выстроен адаптивный регулятор, базирующийся только на измерениях выходной переменной. В [9, 10] рассмотрен линейный объект, а в [14] – нелинейный. Однако в [9, 10, 14] допускается, что относительная степень известна и равна единице. В [12, 13] данная задача распространена на линейные объекты с известными параметрами, но с запаздыванием в канале управления.

В настоящей работе предлагается новый алгоритм управления по выходу параметрически неопределенным линейным объектом, подверженным влиянию гармонического возмущения $\delta(t)=\mu\sin(\omega t+\varphi)$ с неизвестными амплитудой и фазой. Данный подход основан на методе операторного синтеза компенсации возмущения, который был опубликован в [15]. По мнению авторов, несмотря на то, что частота $\omega$ известна, решаемая в этой работе задача развивает подходы, опубликованные в [1–15], поскольку допускается, что относительная степень объекта, как и его параметры, может быть неизвестна.

## Постановка задачи

Рассмотрим линейный объект управления вида

$$a(p)y(t)=b(p)u(t)+c(p)\delta(t), \tag{1}$$

где $p=d/dt$ – оператор дифференцирования; параметры полиномов $a(p)=p^n+a_{n-1}p^{n-1}+a_{n-2}p^{n-2}+...+a_0$, $b(p)=b_mp^m+b_{m-1}p^{m-1}+b_{m-2}p^{m-2}+...+b_0$ и $c(p)=c_lp^l+c_{l-1}p^{l-1}+l_{l-2}p^{l-2}+...+c_0$ неизвестные числа, а $\delta(t)=\mu\sin(\omega t+\varphi)$ – возмущающее воздействие с неизвестными амплитудой $\mu$ и фазой $\varphi$.

Цель управления – найти такой сигнал $u=u(y)$, чтобы было выполнено целевое условие

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=0. \tag{2}$$

Данную задачу будем решать при следующих допущениях.

*Допущение 1.* Полином $b(p)$ гурвицев, и коэффициент $b_0>0$.

*Допущение 2.* Известно максимальное значение относительной степени $r*$, но не размерности полиномов $a(p)$ и $b(p)$, и сама относительная степень $r=n-m$.

[2] Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (государственный контракт № 16.740.11.0553).

*Допущение 3.* Известна частота $\omega$ возмущения $\delta(t) = \mu\sin(\omega t + \varphi)$.

### Предварительный результат

Следуя [15], представим уравнение (1) в виде

$$Y(s) = \frac{b(s)}{a(s)}U(s) + \frac{c(s)}{a(s)}\Psi(s) + \frac{D(s)}{a(s)}, \tag{3}$$

где $s$ – комплексная переменная Лапласа; $Y(s) = L\{y(t)\}$, $U(s) = L\{u(t)\}$ и $\Psi(s) = L\{\delta(t)\} = \dfrac{\mu_1 s + \mu_2}{s^2 + \omega^2}$ – изображения по Лапласу соответствующих сигналов, $\mu_1 = \mu\sin\varphi$ и $\mu_2 = \mu\cos\varphi$; полином $D(s)$ обозначает сумму всех членов, содержащих начальные условия.

Временно предположим, что измеряются все необходимые производные выходного сигнала $y(t)$, а коэффициенты полиномов $a(p)$ и $b(p)$ известны. Предполагая, что относительная степень $r$ известна, выберем закон управления $u(t)$ следующим образом:

$$u(t) = -k\frac{\alpha(p)(p+1)^2}{p^2 + \omega^2}y(t), \tag{4}$$

где гурвицев полином $\alpha(p)$ степени $r^*-1$ и постоянный коэффициент $k > 0$ выбираются из соображений строгой вещественной положительности передаточной функции (например, [16, 17]):

$$H(s) = \frac{b(s)\alpha(s)(s+1)^2}{a(s)(s^2+\omega^2) + kb(s)\alpha(s)(s+1)^2}.$$

**Замечание 1.** В [16, 17] было показано, что для любого гурвицева полинома $\alpha(p)$ существует в общем случае достаточно большой постоянный коэффициент $k > 0$ такой, что передаточная функция $H(s)$ удовлетворяет условиям строгой вещественной положительности. Для известных коэффициентов полиномов $a(p)$ и $b(p)$ поиск коэффициента $k > 0$ является несложной задачей.

Тогда, подставляя изображение по Лапласу для (4) в уравнение (3), получаем

$$Y(s) = -k\frac{b(s)\alpha(s)(s+1)^2}{a(s)(s^2+\omega^2)}Y(s) + \frac{c(s)}{a(s)}\frac{\mu_1 s + \mu_2}{(s^2+\omega^2)} + \frac{D(s)}{a(s)}$$

и

$$Y(s) = (\mu_1 s + \mu_1)\frac{c(s)}{\gamma(s)} + \frac{D(s)(s^2+\omega^2)}{\gamma(s)},$$

где полином $\gamma(s) = a(s)(s^2+\omega^2) + kb(s)\alpha(s)(s+1)^2$ – гурвицев в силу строгой вещественной положительности передаточной функции $H(s)$.

Осуществляя обратное преобразование Лапласа для $Y(s)$, имеем

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

### Основной результат

Однако производные выходного сигнала $y(t)$ не измеряются, а коэффициенты полиномов $a(p)$ и $b(p)$ неизвестны. В этом случае воспользуемся результатами, опубликованными в [14, 15] и выберем закон управления следующим образом:

$$u(t) = -k\frac{\alpha(p)(p+1)^2(T_2 p+1)^{\vartheta}}{(p^2+\omega^2)(T_1 p+1)^{\vartheta}}\xi_1(t), \tag{5}$$

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \sigma\xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = \sigma\xi_3, \\ \ldots \\ \dot{\xi}_{r-1} = \sigma(-k_1\xi_1 - k_2\xi_2 - \ldots - k_{r-1}\xi_{r-1} + k_1 y), \end{cases} \tag{6}$$

где число $k > 0$ и полином $\alpha(p)$ выбираются аналогично (4), число $\sigma > k$, а коэффициенты $k_i$ рассчитываются из требований асимптотической устойчивости системы (6) при нулевом входе $y(t)$, $\vartheta = r^* - r_0$, параметр $T_1^{-1}$ должен быть больше коэффициента $k$ и много меньше $\sigma$, параметр $T_2$ такой, что

$0 < T_2^{-1} << T_1^{-1}$, число $r_0$ соответствует известному минимальному значению относительной степени: $0 < r_0 \le r \le r^*$.

**Замечание 2.** Очевидно, что в условиях полной параметрической неопределенности выбор $T_1^{-1}$, $k$ и $\sigma$ может вызывать некоторые сложности, поэтому рассмотрим более конструктивное правило расчета этих коэффициентов. Как показано в [17], можно настраивать коэффициент $k$ по линейному закону до тех пор, пока переменная $y(t)$ не попадет в некоторую малую область, заданную разработчиком системы. Параметры $T_1^{-1}$ и $\sigma$ можно рассчитывать следующим образом: $T_1^{-1} = k^2$ и $\sigma = \sigma_0 (T_1^{-1})^{29}$. Очевидно, что при таком расчете коэффициентов регулятора система может быть неустойчивой, но данная схема обеспечивает сходимость выходной переменной $y(t)$ в некоторую малую область, заданную разработчиком системы.

Подставляя (5) в (1), получаем

$$y(t) = \frac{kb(p)\alpha(p)(p+1)^2(T_2p+1)^9}{a(p)(p^2+\omega^2)(T_1p+1)^9 + kb(p)\alpha(p)(p+1)^2(T_2p+1)^9}\varepsilon(t) + {}$$

$$+ \frac{b(p)(p^2+\omega^2)(T_1p+1)^9}{a(p)(p^2+\omega^2)(T_1p+1)^9 + kb(p)\alpha(p)(p+1)^2(T_2p+1)^9}\delta(t), \qquad (7)$$

где $\varepsilon(t) = y(t) - \xi_1(t)$.

Запишем (7) следующим образом:

$$y(t) = \frac{kb(p)\alpha(p)(p+1)^2(T_2p+1)^9}{a(p)(p^2+\omega^2)(T_1p+1)^9 + kb(p)\alpha(p)(p+1)^2(T_2p+1)^9}[\varepsilon(t) + w(t)], \qquad (8)$$

где сигнал $w(t) = \dfrac{(p^2+\omega^2)(T_1p+1)^9}{k\alpha(p)(p+1)^2(T_2p+1)^9}\delta(t)$.

Модель близкая к (8), рассматривалась в [18, 19], поэтому воспользуемся результатами [18, 19] и перейдем к форме вход–состояние–выход вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + k\mathbf{b}(\varepsilon + w), \qquad (9)$$

$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x}, \qquad (10)$$

где $\mathbf{x} \in R^n$ – вектор переменных состояния модели (9), (10); $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ – матрицы перехода от модели вход-выход к модели вход-состояние-выход, причем в силу известной леммы Якубовича-Калмана (например, [16]) можно указать симметрическую положительно определенную матрицу $\mathbf{P}$, удовлетворяющую двум следующим матричным уравнениям:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}_1, \ \mathbf{P}\mathbf{b} = \mathbf{c},$$

где $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_1^T$ – некоторая положительно определенная матрица.

Перепишем (6) в векторно-матричной форме:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \sigma(\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{d}y), \qquad (11)$$

$$\xi_1 = \mathbf{h}^T\boldsymbol{\xi},$$

где $\boldsymbol{\xi} \in R^{r-1}$ – вектор переменных состояния модели (11), $\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & \dots & -k_{r-1} \end{bmatrix}$, $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ k_1 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, причем матрица $\boldsymbol{\Gamma}$ – гурвицева в силу расчета коэффициентов $k_i$ модели (6).

Введем в рассмотрение вектор отклонений

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}y - \boldsymbol{\xi}. \qquad (12)$$

Дифференцируя уравнение (12), получаем:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{h}\dot{y} - \sigma(\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{h}y - \boldsymbol{\eta}) + \mathbf{d}y) = \mathbf{h}\dot{y} + \sigma\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\eta} - \sigma(\mathbf{d} + \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{h})y = \mathbf{h}\dot{y} + \sigma\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\eta},$$

$$\varepsilon = y - \xi_1 = \mathbf{h}^T \boldsymbol{\eta},$$

где $\mathbf{d} = -\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{h}$.

Таким образом, имеем систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + k\mathbf{b}(\varepsilon + w),\ y = c^T x, \quad (13)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{h}\dot{y} + \sigma\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\eta},\ \varepsilon = \mathbf{h}^T\boldsymbol{\eta}. \quad (14)$$

В силу гурвицевости $\boldsymbol{\Gamma}$ существует матрица $\mathbf{N} = \mathbf{N}^T$, удовлетворяющая уравнению Ляпунова

$$\boldsymbol{\Gamma}^T\mathbf{N} + \mathbf{N}\boldsymbol{\Gamma} = -\mathbf{Q}_2,$$

где $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_2^T$ – положительно определенная матрица.

В работах [18, 19] была построена функция Ляпунова вида

$$V = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}^T\mathbf{N}\boldsymbol{\eta} \quad (15)$$

и показано, что для системы (13), (14) существует число $\sigma >> k$ такое, что

$$\dot{V} \le -\lambda V + k^{-1}w^2, \quad (16)$$

где число $\lambda > 0$.

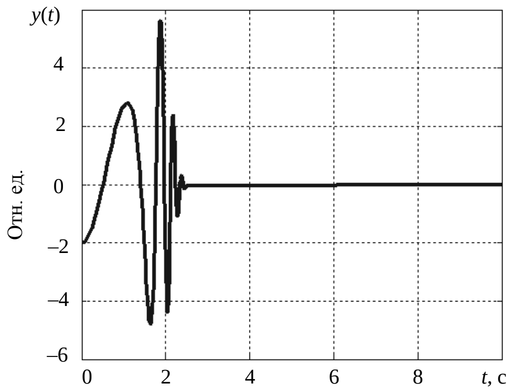
Следуя результатам раздела «Предварительный результат», легко показать, что $\lim_{t\to\infty} w(t) = 0$. Поскольку доказательство аналогично приведенным в [18, 19], не будем повторять его здесь. Так как $w(t)$ экспоненциально сходится к нулю, то из неравенства (16) следует, что функция (15) стремится к нулю, что означает выполнение целевого условия (2).

## Пример

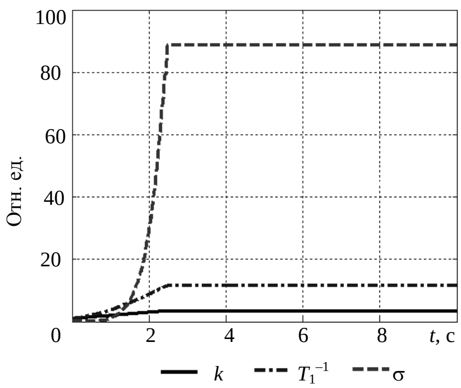
Рассмотрим числовой пример моделирования предлагаемого алгоритма управления (5), (6) для линейного объекта вида (1) вида

$$[p^3 - 2p - 3]\,y(t) = [p+2]\,u(t) + [-4p+1]\,\delta(t),\ y(0) = -2,\ \dot{y}(0) = -2,\ \ddot{y}(0) = 2.$$

Будем полагать, что относительная степень $r^*$ не превосходит 3, но известно, что относительная степень не меньше 2. Выберем закон управления в соответствии с (5), (6), где $\alpha(p) = p+1$, $T_2 = 1$, $\vartheta = 1$, коэффициент $k$ настраивается по линейному закону до тех пор, пока переменная $y(t)$ не попадет в малую область 0,1, параметры $T_1^{-1}$ и $\sigma$ рассчитываются в соответствии с замечанием 2, т.е. $T_1^{-1} = k^2$ и $\sigma = \sigma_0 (T_1^{-1})^2$, где $\sigma_0 = 0{,}8$. На рисунке представлены переходные процессы в замкнутой системе с возмущением $\delta(t) = 6\sin(3t-2)$. На рисунке (а) представлен результат моделирования для выходной переменной $y(t)$, а на рисунке (б) – для адаптивно настраивающихся параметров $k$, $T_1^{-1}$ и $\sigma$.




а




б

Рисунок. Графики переходных процессов в замкнутой системе: (а) – график функции $y(t)$; (б) – графики функций $k$, $T_1^{-1}$ и $\sigma$

## Заключение

Для класса линейных стационарных параметрически и структурно неопределенных объектов вида (1) получаем алгоритм адаптивного управления (5), (6), полностью парирующий влияние синусоидального возмущающего воздействия $\delta(t) = \mu\sin(\omega t + \varphi)$ с неизвестными амплитудой $\mu$ и фазой $\varphi$. В качестве недостатка отметим, что в представленной работе задача была решена для случая известной частоты $\omega$ возмущающего воздействия $\delta(t) = \mu\sin(\omega t + \varphi)$. Расширение полученного результата на случай неизвестной частоты возможно посредством введения дополнительного канала ее идентификации. При этом подстановка получаемых оценок частоты в контур регулирования может происходить итеративно с использованием схемы с переключениями.

**Литература**

1. Bodson M., Douglas S.C. Adaptive algorithms for the rejection of periodic disturbances with unknown frequencies // Automatica. – 1997. – V. 33. – P. 2213–2221.
2. Никифоров В.О. Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. – СПб: Наука, 2003. – 282 с.
3. Никифоров В.О. Адаптивная стабилизация линейного объекта, подверженного внешним детерминированным возмущениям // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1997. – № 2. – С. 103–106.
4. Nikiforov V.O. Adaptive non-linear tracking with complete compensation of unknown disturbances // European Journal of Control. – 1998. – V. 4. – № 2. – P. 132–139.
5. Marino R., Santosuosso G.L., Tomei P. Robust adaptive compensation of biased sinusoidal disturbances with unknown frequency. – Automatica. – 2003. – V. 39. – P. 1755–1761.
6. Marino R. and P. Tomei. Output Regulation for Linear Minimum Phase Systems with Unknown Order Exosystem // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2007. – V. 52. – P. 2000–2005.
7. Арановский С.В., Бобцов А.А., Никифоров В.О. Синтез наблюдателя для нелинейного объекта в условиях гармонического возмущения, приложенного к выходной переменной // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2010. – № 3 (67). – С. 32–38.
8. Бобцов А.А., Кремлев А.С. Алгоритм компенсации неизвестного синусоидального возмущения для линейного не минимально фазового объекта // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2008. – № 10. – С. 14–17.
9. Бобцов А.А. Алгоритм управления по выходу с компенсацией гармонического возмущения со смещением // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 8. – С. 25–32.
10. Бобцов А.А. Адаптивное управление по выходу с компенсацией гармонического смещенного возмущения // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2009. – № 1. – С. 45–48.
11. Бобцов А.А., Пыркин А.А. Компенсация неизвестного синусоидального возмущения для линейного объекта любой относительной степени // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 3. – С. 114–122.
12. Бобцов А.А., Колюбин С.А., Пыркин А.А. Компенсация неизвестного мультигармонического возмущения для нелинейного объекта с запаздыванием по управлению // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 11. – С. 115–122.
13. Anton Pyrkin, Andrey Smyshlyaev, Nikolaos Bekiaris-Liberis, Miroslav Krstic. Rejection of Sinusoidal Disturbance of Unknown Frequency for Linear System with Input Delay // American Control Conference. – Baltimore, 2010. – P. 5688–5693.
14. Бобцов А.А., Кремлев А.С., Пыркин А.А. Компенсация гармонического возмущения для параметрически и функционально неопределенного нелинейного объекта // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 1. – С. 121–129.
15. Лукьянова Г.В., Никифоров В.О. Алгоритм компенсации внешних детерминированных возмущений: операторный метод синтеза // Научно-технический вестник СПб ГИТМО (ТУ). – 2003. – Вып. 10. – С. 5–9.
16. Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. – СПб: Наука, 2000. – 549 с.
17. Бобцов А.А., Николаев Н.А. Синтез управления нелинейными системами с функциональными и параметрическими неопределенностями на основе теоремы Фрадкова // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 1. – С. 118–129.
18. Бобцов А.А., Шаветов С.В. Управление по выходу линейным параметрически неопределенным объектом в условиях возмущающих воздействий и неучтенной динамики // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2011. – № 1 (71). – С. 32–38.
19. Бобцов А.А., Николаев Н.А. Управление по выходу линейными системами с неучтенной паразитной динамикой // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 6. – С. 115–122.

***Бобцов Алексей Алексеевич*** – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, доктор технических наук, профессор, декан, bobtsov@mail.ifmo.ru

***Колюбин Сергей Алексеевич*** – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, s.kolyubin@gmail.com

***Пыркин Антон Алексеевич*** – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, ассистент, a.pyrkin@gmail.com