

$$P = \frac{\sum_{j=1}^n f_j \times D_j}{\sum_{j=1}^n D_j} .$$

Первое слагаемое в (1), очевидно, представляет собой доход от продажи B билетов на рейс, а второе и третье – ожидаемые потери, связанные с этими продажами. Таким образом, величина $R(B)$ – это ожидаемая прибыль, которую следует максимизировать.

Оптимальное значение виртуальной емкости B используется затем для расчета пределов продаж на рейс. Эта задача формулируется следующим образом: требуется так распределить количество мест, которое отводится каждому продукту j , чтобы максимизировать ожидаемый общий доход от продаж. Обозначим через x_j количество билетов, выделяемых на рейсе продукту j (так называемый предел бронирования для этого продукта), тогда целые неотрицательные значения x_j могут быть найдены из решения оптимизационной задачи [6]:

$$\sum_{j=1}^n f_j \times \sum_{m=1}^{x_j} (1 - \Phi(\mu_j, \sigma_j, m)) \rightarrow \max , \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j \leq B , \quad (3)$$

где $\Phi(\mu, \sigma, x)$ – функция распределения нормального закона с параметрами μ и σ в точке x . Задача (2)–(3) является задачей нелинейного программирования, однако может быть сведена к задаче целочисленного либо, в упрощенном случае, линейного программирования за счет введения индикаторных переменных.

Сформулированные задачи в качестве исходных данных требуют задания:

- физической емкости Cap назначенного на рейс ВС;
- цен m и прогноза спроса D_j для каждого продукта (класса авиабилета) $j = 1, \dots, n$;
- вероятности p появления пассажира на предполетной регистрации;
- различных вероятностных и ценовых параметров, используемых при вычислении компенсационной функции $F(B, p, Cap)$, например, вероятности добровольного отказа пассажира от места в ВС, размера затрат на обслуживание пассажира во время ожидания следующего рейса и т.п.

Совместное решение задач (1) и (2)–(3) дает возможность учесть виртуальную емкость назначенного на рейс ВС при выработке оптимальной стратегии продаж авиабилетов на этот рейс и тем самым более полно удовлетворить имеющийся спрос.

Компьютерная симуляция процесса продаж и предполетной регистрации

Полученные в результате значения как для виртуальной емкости B , так и для пределов бронирования x_j , $j = 1, \dots, n$, оказываются оптимальными только в том случае, когда прогноз спроса, неявок и отказов будет точным, что, конечно, на практике встречается чрезвычайно редко. В связи с этим большой интерес представляет собой анализ влияния ошибок этих прогнозов на эффективность стратегии продаж. Предложенная авторами процедура компьютерной симуляции процесса продаж и предполетной регистрации дала возможность получить числовые данные для проведения такого анализа.

Симуляция включает в себя следующие шаги:

- генерирование потока запросов – создание упорядоченного по времени множества событий, каждое из которых представляет собой запрос на покупку либо возврат билета на один из продуктов рейса, т.е. формирование списка покупателей;
- процесс продаж авиабилетов – последовательная обработка потока запросов, в результате чего формируется множество удовлетворенных запросов, т.е. список пассажиров, купивших билеты на рейс;
- процедура предполетной регистрации – последовательная обработка потока удовлетворенных запросов с целью выявления «лишних» пассажиров на рейсе (сверх физической емкости назначенного на рейс ВС) и предоставления им предусмотренной компенсации за отказ в предоставлении уже оплаченной услуги.

Каждое событие в потоке запросов – это список из четырех элементов вида $\{ID, t, j, q\}$, где ID – уникальный идентификатор запроса; t – время появления запроса (указывается в минутах до вылета рейса); $j = 1, \dots, n$ – номер продукта, на который поступил данный запрос; наконец, $q = 1$, если событие представляет собой запрос на покупку, и $q = -1$, если это возврат ранее купленного билета.

Для формирования потока запросов были заданы коэффициенты k_j^1 и k_j^2 ошибок прогноза по среднему μ_j и среднеквадратическому отклонению σ_j , и параметры нормально распределенного «реального» спроса для каждого продукта вычислены, как $k_j^1 \times \mu_j$ и $k_j^2 \times \sigma_j$ соответственно. Затем для этих параметров были сгенерированы нормально распределенные псевдослучайные числа, показывающие общее количество запросов на покупку для каждого продукта. Аналогичные действия были выполнены и при формировании списка отказов. Каждому событию (покупка/отказ) было сопоставлено равномерно распределенное натуральное число t , указывающее время осуществления этого события. После проведения процесса сортировки множества событий по убыванию величины t был сформирован список запросов.

Отметим, что в практике авиакомпаний принято разбивать весь горизонт продаж контрольными точками (так называемыми временными срезами) на временные интервалы. Количество таких срезов T заранее оговорено. Срезы нужны, прежде всего, для корректировки выбранной стратегии продаж, т.е. пересчета пределов бронирования исходя из остаточной виртуальной вместимости и остаточных прогнозов спроса и отказов. Весь сформированный поток запросов при симуляции продаж сгруппирован по этим временным интервалам.

Симуляция процесса продаж заключается в последовательной обработке каждого запроса. Запрос на покупку билета продукта j принимается, если текущий предел бронирования для этого продукта и остаточная виртуальная емкость ВС положительны. Такой запрос добавляется к списку принятых запросов, а текущий предел бронирования продукта вместе с остаточной виртуальной емкостью уменьшаются на единицу, после чего обрабатывается следующий запрос. Процесс продаж на рейс продолжается до следующего временного среза и прекращается либо с обнулением остаточной виртуальной емкости, либо естественным образом – с окончанием запросов. Если поступает запрос на возврат билета, то осуществляется проверка, был ли этот билет ранее куплен, и при положительном ответе запрос удовлетворяется, текущий предел бронирования соответствующего продукта увеличивается на единицу вместе с остаточной емкостью. В противном случае запрос игнорируется.

В начальном временном срезе под номером $\tau = 1$ производится расчет виртуальной емкости $B = B_1$, оптимальных пределов бронирования x_j , $j = 1, \dots, n$ после чего выполняется компьютерная симуляция продаж для сгенерированного потока запросов вплоть до наступления следующего временного среза. В нем происходит пересчет остаточной виртуальной емкости B_τ и, соответственно, пределов бронирования по формулам (2)–(3), после чего продолжается симуляция процесса продаж. Этот цикл повторяется для каждого временного среза $\tau = 2, 3, \dots, T$.

Предусмотрены три варианта пересчета величины B_τ в срезе τ :

- простейший вариант, учитывающий только возможные возвраты купленных авиабилетов:

$$B_\tau = Cap - p_{SR}^\tau \times K_\tau, \quad (4)$$

где K_τ – количество проданных авиабилетов к срезу τ ; p_{SR}^τ – вероятность того, что билет, купленный в интервале между срезами τ и $\tau + 1$, не будет возвращен до момента вылета рейса. Эта вероятность вычисляется через прогнозы p_{CR}^τ вероятности отказов от купленных билетов во временном интервале между срезами τ и $\tau + 1$:

$$p_{SR}^\tau = \prod_{k=\tau}^T (1 - p_{CR}^k).$$

- учет возвратов и разовый расчет виртуальной емкости:

$$B_\tau = B - p_{SR}^\tau \times K_\tau. \quad (5)$$

Единственное (но существенное) отличие от предыдущего варианта состоит в замене физической емкости Cap изначально определенной виртуальной емкостью $B = B_1$.

- третий вариант пересчета состоит из нескольких шагов: сначала вычисляется остаточная физическая вместимость с учетом возможных возвратов,

$$Cap_\tau = Cap - p_{SR}^\tau \times K_\tau, \quad (6)$$

а затем определяются сетевые цены продуктов (коэффициенты Лагранжа) [1, 2, 7] при $B = Cap_\tau$ в задаче (2)–(3). Полученные сетевые цены используются для пересчета средней цены P билета на рейс, после чего решается задача (1), и в результате находится остаточная виртуальная емкость B_τ на срезе τ .

По окончании симуляции процесса продаж формируется список удовлетворенных запросов на покупку/возврат билетов. На его основе создается поток пассажиров, пришедших на регистрацию. Предварительно из списка удовлетворенных запросов удаляются пары элементов, соответствующих купленным

и затем возвращенным билетам. Далее, для каждого удовлетворенного запроса на покупку с номером ID выполняется генерирование псевдослучайных чисел 0 и 1 с вероятностями $(1-k^3 \times p)$ и $k^3 \times p$, где p – прогноз осредненной вероятности появления пассажира на регистрацию, а k^3 – заданная ошибка этого прогноза. При «выпадении» единицы (пассажир приходит на регистрацию) создается тройка вида $\{ID, t_c, j\}$, где $j=1, \dots, n$ – номер продукта, а равномерно распределенное псевдослучайное число $0 \leq t_c \leq 180$ – время появления пассажира к регистрации (указывается в минутах до окончания регистрации). Отсортированное по убыванию величины t_c множество таких троек представляет собой поток пассажиров на регистрации. Поскольку продажа производилась по виртуальной емкости, то число пришедших на регистрацию пассажиров может оказаться больше физической емкости ВС. В этом случае по заранее определенному алгоритму проводится выплата компенсаций и полученная в результате продаж авиабилетов прибыль уменьшается. Величина прибыли от продаж авиабилетов за вычетом произведенных компенсационных выплат служит главной характеристикой эффективности стратегии управления доходами для рейса.

Числовые результаты компьютерной симуляции процесса продаж и регистрации

Ниже представлены результаты компьютерной симуляции процесса продаж и регистрации для простого модельного примера полетного расписания, состоящего из двух рейсов: из пункта А в В (А–В) и из пункта В в С (В–С) с физическими емкостями назначенных на них ВС 50 и 70 мест. Рейсы образуют 3 маршрута: А–В, В–С, А–В–С. На каждом маршруте есть билеты по полной стоимости и со скидкой, т.е. авиакомпания предлагает 6 продуктов. Цены и прогнозы параметров (μ_j, σ_j) спроса на продукты по временным интервалам указаны в таблице.

На рис. 1 и рис. 2 изображены результаты расчетов зависимости эффективности C сверхлимитных продаж от ошибок прогноза по среднему и среднеквадратическому отклонению для трех различных способов пересчета виртуальной емкости. Под эффективностью понимается отношение прибылей, полученных в результате компьютерной симуляции процессов продаж и регистрации с учетом и без учета виртуальной емкости. Три линии соответствуют трем вариантам пересчета виртуальной емкости B_τ . Уравнения кривых являются наилучшими среднеквадратическими приближениями для полученных расчетных точек. Каждая точка – результат осреднения 100 расчетов для сгенерированных потоков запросов.

Маршруты	Цена, ед.	Прогноз параметров спроса (μ_j, σ_j) , $j=1, \dots, 6$				
		$\tau=1$	$\tau=2$	$\tau=3$	$\tau=4$	Σ
А–В	40	(1, 0,1)	(3, 0,3)	(5, 0,5)	(6, 0,6)	(15, 0,843)
	24	(10, 1)	(8, 0,8)	(4, 0,4)	(3, 0,3)	(25, 1,38)
В–С	70	(4, 0,4)	(6, 0,6)	(9, 0,9)	(11, 1,1)	(30, 1,59)
	42	(18, 1,8)	(12, 1,2)	(6, 0,6)	(4, 0,4)	(40, 2,28)
А–В–С	100	(0, 0)	(1, 0,1)	(4, 0,4)	(5, 0,5)	(10, 0,66)
	60	(8, 0,8)	(6, 0,6)	(4, 0,4)	(4, 0,4)	(22, 1,15)

Таблица. Данные по ценам и прогнозу параметров спроса на продукты

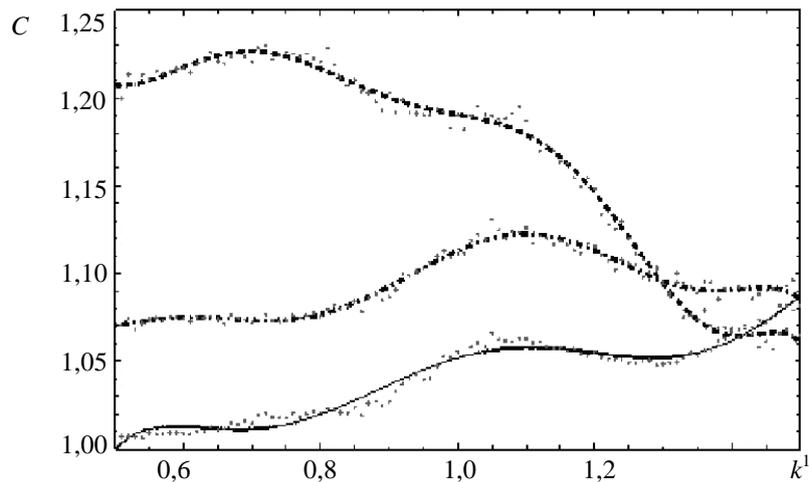


Рис. 1. Эффективность сверхлимитных продаж в зависимости от коэффициента k_j^1 ошибки прогноза спроса по μ_j при $k_j^2 = 1$ для различных способов пересчета B_τ : сплошная линия – пересчет по (4), пунктирная – по (5), штрих-пунктир – по (6)

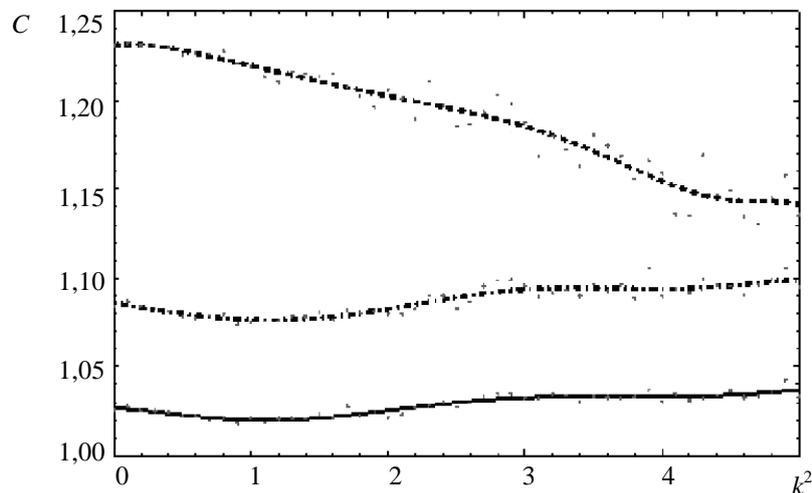


Рис. 2. Эффективность сверхлимитных продаж в зависимости от коэффициента k_j^2 ошибки прогноза спроса по σ_j при $k_j^1 = 0,8$ (спрос переоценен) для различных способов пересчета B_τ : сплошная линия – пересчет по (4), пунктирная – по (5), штрих-пунктир – по формуле (6)

Заключение

Расчеты, выполненные для модельного примера, показывают, что эффективность использования сверхлимитных продаж может достигать 20%. Размер ожидаемой дополнительной прибыли существенно зависит как от способа пересчета виртуальной емкости, так и от точности прогноза спроса. Наиболее выгодным является третий способ пересчета виртуальной емкости, который по своим результатам превосходит остальные практически во всем диапазоне значений коэффициентов ошибок прогноза. Однако в случае сильно недооцененного спроса (при $k_j^1 \geq 1,2$) эффективность использования сверхлимитных продаж значительно падает, а разница в способах пересчета B_τ оказывается незначительной. Тем не менее, даже в этом случае ожидаемая общая прибыль от продаж увеличивается на 5–7%.

Литература

1. Barnhart C., Belobaba P., Odoni A. Transportation Science // Applications of Operations Research in the Air Transport Industry. – 2003. – V. 37. – № 4. – P. 368–391.
2. Talluri K., van Ryzin G. The Theory and Practice of Revenue Management. – Springer, 2005. – P. 129–160.

3. Яблочкина М.В. Определение оптимального уровня сверхлимитного бронирования авиабилетов для нескольких рейсов // В мире научных открытий № 1. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – С. 32–34.
4. Siddappa S. Statistical modeling approach to airline revenue management with overbooking // Ph.D. thesis. – USA: The University of Texas at Arlington, 2006. – P. 25–44.
5. Яблочкина М.В. Определение оптимального уровня сверхлимитного бронирования авиабилетов с использованием компенсационной функции // Научное творчество XXI века: Материалы IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Приложение к журналу «В мире научных открытий». – Красноярск, 2011. – Вып. 2. – С. 173–174.
6. Виноградов Л.В., Фридман Г.М., Шебалов С.М. Математическое моделирование в оптимизации планирования авиационных перевозок: формулировки и методы решения типовых задач // Научный Вестник МГТУГА. – 2008. – С. 49–57.
7. Лавренюк О.В. Определение оптимальных пределов продаж авиабилетов с учетом сетевых цен на продукты // II Всероссийская научная конференция «Научное творчество XXI века». В мире научных открытий. – 2010. – № 2 (08). – Ч. 3. – С. 30–33.

- Мозговая Кристина Александровна** – Санкт-Петербургский государственный университет экономики и финансов, аспирант, kristina.mozg@gmail.com
- Яблочкина Мария Вадимовна** – Санкт-Петербургский государственный морской технический университет, студент, sour-apple@mail.ru
- Фридман Григорий Морицевич** – Санкт-Петербургский государственный морской технический университет, доктор технических наук, профессор, gregory_fridman@list.ru