

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ**



ПОБЕДИТЕЛЬ КОНКУРСА ИННОВАЦИОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ ВУЗОВ

«Образование»

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ,
МЕХАНИКИ И ОПТИКИ**

май–июнь 2008

№ 55

**СИСТЕМЫ:
УПРАВЛЕНИЕ, МОДЕЛИРОВАНИЕ,
БЕЗОПАСНОСТЬ**



ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

д.т.н., профессор В.О. Никифоров

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

д.т.н., доцент А.А. Бобцов, д.т.н. А.В. Бухановский,
д.т.н., профессор В.А. Валетов, д.ф.-м.н., ст.н.с. Т.А. Варганян,
д.т.н. М.А. Ган, д.т.н., профессор Ю.А. Гатчин, д.т.н., профессор А.В. Демин,
к.т.н., доцент Н.С. Кармановский (заместитель главного редактора),
д.ф.-м.н., профессор Ю.Л. Колесников, д.ф.-м.н., профессор С.А. Козлов,
д.т.н., профессор А.Г. Коробейников, д.т.н., профессор В.В. Курейчик,
д.т.н., доцент Л.С. Лисицына, к.т.н., доцент В.Г. Мельников,
д.т.н., профессор Ю.И. Нечаев, д.т.н., профессор Н.В. Никоноров,
д.т.н., профессор А.А. Ожиганов, д.ф.-м.н., ст.н.с. Е.Ю. Перлин,
д.т.н., профессор И.Г. Сидоркина, д.т.н. О.А. Степанов,
д.т.н., профессор В.Л. Ткалич, д.т.н., профессор А.А. Шалыто

Секретарь – Г.О. Котелкова

Редактор – к.т.н., ст.н.с. Н.Ф. Гусарова

Адрес: 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, СПбГУ ИТМО

Телефон: (812) 233 12 70

Факс: (812) 233 12 70 (с пометкой: для редакции
Научно-технического вестника)

<http://books.ifmo.ru/ntv>

E-mail: karmanov@mail.ifmo.ru

Подписано к печати 26.06.2008 Тираж 350 экз. Заказ № 3(55)

Отпечатано в учреждении «Университетские телекоммуникации»
Адрес: 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

© Санкт-Петербургский государственный университет
информационных технологий, механики и оптики, 2008

УДК 681.5

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ В НАБЛЮДЕНИИ СОСТОЯНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

А.А. Блинников, В.И. Бойков

Рассмотрена задача наблюдения (восстановления) состояния термодинамического объекта на основе восстановления его начальных условий. Предложен способ использования интегрального измерения для реализации наблюдателя. Синтезирован наблюдатель, универсально применимый к любой модели.

Ключевые слова: распределенный объект, наблюдатель, температурное поле, восстановление начальных условий, уравнения в частных производных

Введение

На рис. 1 приведено схематичное изображение типичного термодинамического объекта – машины непрерывного литья заготовок (МНЛЗ).

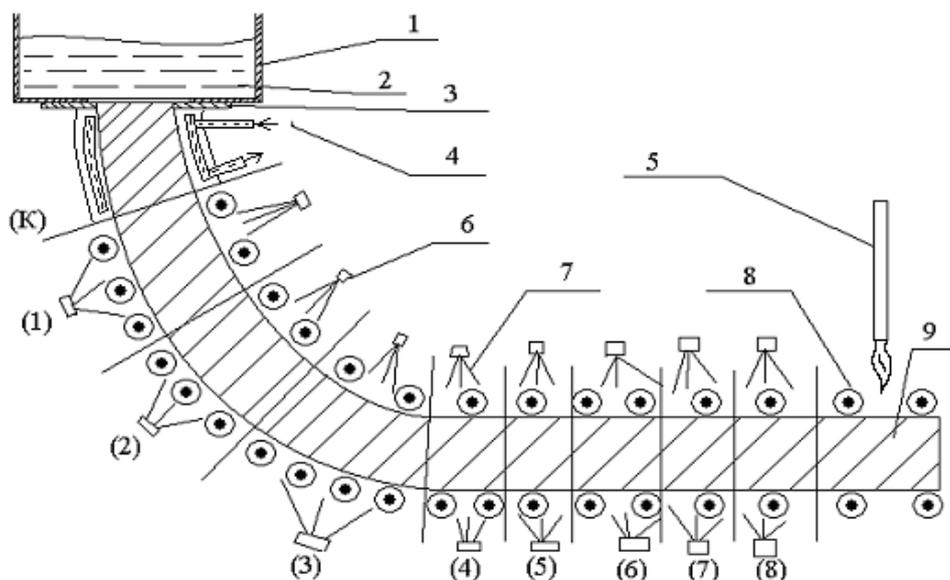


Рис. 1. Схема МНЛЗ: 1 – промежуточный ковш; 2 – жидкая сталь; 3 – пластины-формирователи; 4 – нагнетатель воды в кристаллизаторе (К); 5 – система нарезки заготовок; 6 – форсунка подачи воды в зонах водно-воздушного охлаждения; 7 – охладитель (вода); 8 – прокатные валки; 9 – сортовая заготовка

Наиболее важными параметрами для операторов и технологов МНЛЗ являются:

- толщина корки – слоя твердого металла, окружающего жидкую фазу;
- уровень термических напряжений в корке;
- продолжительность жидкой фазы вдоль сортовой заготовки;
- термическая деформация сортовой заготовки.

Все эти параметры восстанавливаются по трехмерному температурному полю. Непосредственное измерение трехмерного температурного поля не представляется возможным, однако оно может быть рассчитано по математической модели. Одним из

важнейших параметров для расчета является температура на входе в гильзу кристаллизатора.

Температура металла на входе в гильзу кристаллизатора обычно определяется применением термопар в промежуточном ковше. Так как между точкой замера и физическим входом в моделируемый объект находится сложная термодинамическая система, а измерения проводятся редко и в месте, богатом шлаковыми примесями, возникает необходимость восстановления температуры металла на входе гильзы кристаллизатора посредством других измерений. Для решения поставленной задачи синтезирована структура наблюдателя на основе интегрального энергетического баланса. Показано, что синтезированный наблюдатель позволяет учесть взаимодействие объекта с окружающей средой и решить задачу восстановления температуры на входе в гильзу кристаллизатора.

1. Постановка задачи

Если пренебречь влиянием валков и изгибом сляба, то объект, представляющий собой параллелепипед с диффузно-конвективным теплообменом, может быть описан трехмерным уравнением в частных производных [1, 2]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ(x, y, z, t)}{dt} = a^2 \left(\frac{d^2 Q(x, y, z, t)}{dx^2} + \frac{d^2 Q(x, y, z, t)}{dy^2} + \frac{d^2 Q(x, y, z, t)}{dz^2} \right) - V \frac{dQ(x, y, z, t)}{dz}; \\ \frac{dQ(x, y, z, t)}{dx} \Big|_{(x=x_0)} = \frac{h_{x0}}{k} (Q(x_0, y, z, t) - T_g(t)); \\ \frac{dQ(x, y, z, t)}{dx} \Big|_{(x=x_1)} = -\frac{h_{x1}}{k} (Q(x_1, y, z, t) - T_g(t)); \\ \frac{dQ(x, y, z, t)}{dy} \Big|_{(y=y_0)} = \frac{h_{y0}}{k} (Q(x, y_0, z, t) - T_g(t)); \\ \frac{dQ(x, y, z, t)}{dy} \Big|_{(y=y_1)} = -\frac{h_{y1}}{k} (Q(x, y_1, z, t) - T_g(t)); \\ \frac{dQ(x, y, z, t)}{dz} \Big|_{(z=z_0)} = T_{ж}; \frac{dQ(x, y, z, t)}{dz} \Big|_{(z=z_1)} = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

где $a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$, причем k , Вт/(м·К) – коэффициент теплопроводности; c , Дж/(кг·К) – удельная теплоемкость; ρ , г/м³ – плотность; h_{x0} , h_{x1} , h_{y0} , h_{y1} , Вт/(м²·К) – коэффициенты теплопередачи вдоль соответствующей оси на границах области \bar{D} , отображающие эффективность теплообмена и определяемые экспериментально [3] (0 соответствует нулю координаты, 1 – максимальному значению координаты (высота или ширина заготовки)); \bar{V} , м/с – скорость продольного движения сляба (вдоль оси Z); $Q(x, y, z, t)$, °С – динамическое температурное поле; $T_g(t)$, °С – температура воды (охладителя); $T_{ж}$, °С – температура жидкой стали на входе в гильзу кристаллизатора. Оси располагаются следующим образом: Центр системы координат – нижняя угловая точка в левом (рис. 1) торце, ось Z направлена вдоль продвижения сляба, ось X направлена в поперечном сечении сляба в горизонтальной плоскости, а Y – в вертикальной.

Фактически искомая величина $T_{Ж}$ представляет собой одно из граничных условий, однако обычно задачу представляют в виде набора продвигающихся со скоростью \bar{V} сечений, что связано с вычислительными трудностями численного решения задачи (1). Данный переход возможен благодаря тому, что теплообмен в направлении Z носит преимущественно конвективный характер, а вдоль осей X, Y – диффузный, т.е. плоскость решения переносится вместе с массой объекта. В такой постановке искомая величина $T_{Ж}$ является начальным условием редуцированной двумерной задачи.

Классический наблюдатель, решающий задачу восстановления состояния и, следовательно, начального состояния $T_{Ж}$, оперирует невязкой некоторого подмножества состояний объекта с идентичным подмножеством модели. При данном подходе приходится иметь дело с бесконечной мерностью задачи. Наблюдатель, построенный таким образом, теоретически можно синтезировать, однако на практике расчет его обратных связей надо производить с очень высокой точностью, что не позволяет назначить приемлемое время переходного процесса для невязки. Кроме того, производить измерение состояния надо в угловой точке сечения, что затруднительно реализовать на практике.

При изучении перечня измеряемых на объекте величин было принято решение использовать имеющуюся информацию об охлаждении в кристаллизаторе. Штатно МНЛЗ комплектуется датчиком расхода воды в кристаллизаторе, а также датчиком перепада температуры воды между входом в кристаллизатор и выходом из него, что позволяет рассчитать количество тепла, отбираемого от заготовки. Рассчитанное по модели (1) температурное поле объекта позволяет оценить количество тепла, отданного во внешнюю среду. Таким образом, задача состоит в восстановлении начальных условий $T_{Ж}$ модели (1) по невязке количества тепла, отданного моделью и отобранного водой.

2. Составление энергетического баланса

Распределение тепловой энергии вдоль заготовки в кристаллизаторе в условиях статичности параметров модели (1) и отсутствия охлаждения вне кристаллизатора показано на рис. 2, а. Это же распределение через Δt при наличии возмущения в виде отсутствия охлаждения и без него показано на рис. 2, б.

Из рис. 2, б, видно, что тепловая энергия, отбираемая водой, $E_{vr}(t + \Delta t, l)$, определяется как разность площадей под кривыми $E_{no}(t + \Delta t, l)$ для неохлажденной заготовки и $E_o(t + \Delta t, l)$ для охлажденной. Равенство расчетной и фактической энергии, отбираемой водой, является условием равенства начальных условий, а значит, и температурного состояния, наблюдателя и объекта. Таким образом, наблюдатель должен обеспечить соблюдение соотношения

$$\int_{Lk} E_v(t + \Delta t, l) dl = \int_{Lk} E_{no}(t + \Delta t, l) - E_o(t + \Delta t, l) dl, \quad (2)$$

где $\int_{Lk} E_v(t + \Delta t, l) dl$ – фактически отобранная водой энергия. Учитывая, что $E_{no}(t + \Delta t)$

получается из $E_o(t + \Delta t)$ сдвигом вправо, (2) можно переписать как

$$\int_{Lk} E_v(t + \Delta t, l) dl = \int_{Lk} E_{nom}(t + \Delta t, l) - E_{om}(t + \Delta t, l) dl, \quad (3)$$

где $\int_{Lk} E_{nom}(t + \Delta t, l) dl$, $\int_{Lk} E_{om}(t + \Delta t, l) dl$ определяются, как показано на рис. 3, причем

$\int_{Lk} E_{nom}(t + \Delta t, l) dl$ полностью детерминирована $T_{Ж}(t + \Delta t)$, а $\int_{Lk} E_{om}(t + \Delta t, l) dl$ содер-

жит всю историю процесса теплообмена в кристаллизаторе и полностью определяется температурным полем на выходе модели (1).

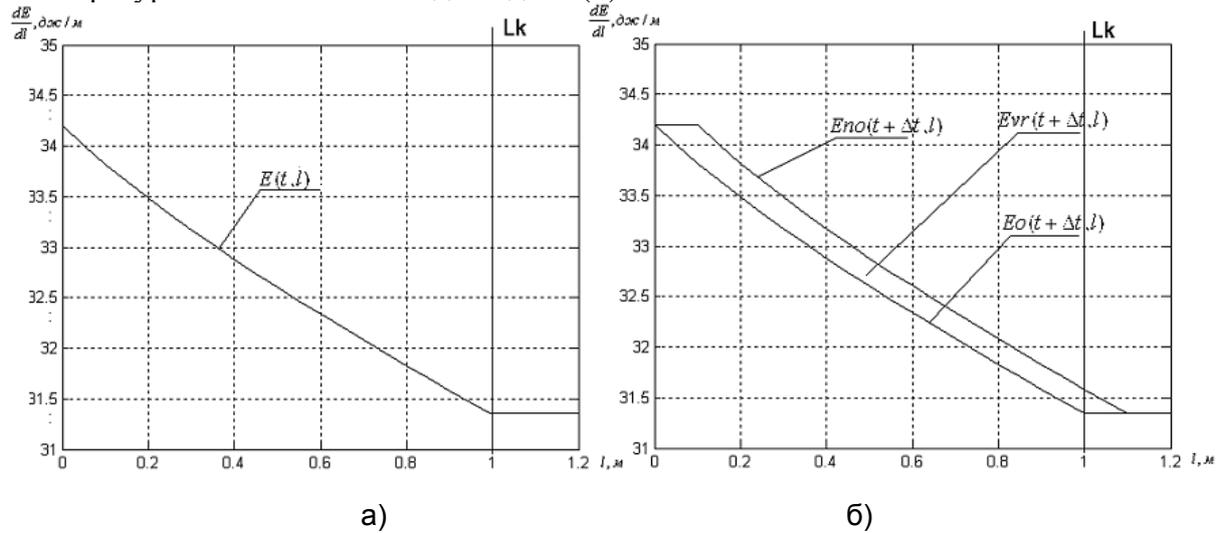


Рис. 2. Распределение энергии вдоль заготовки в кристаллизаторе в условиях статичности параметров модели (1) и отсутствия охлаждения вне кристаллизатора (а), это же распределение через Δt при наличии возмущения в виде отсутствия охлаждения и без него (б)

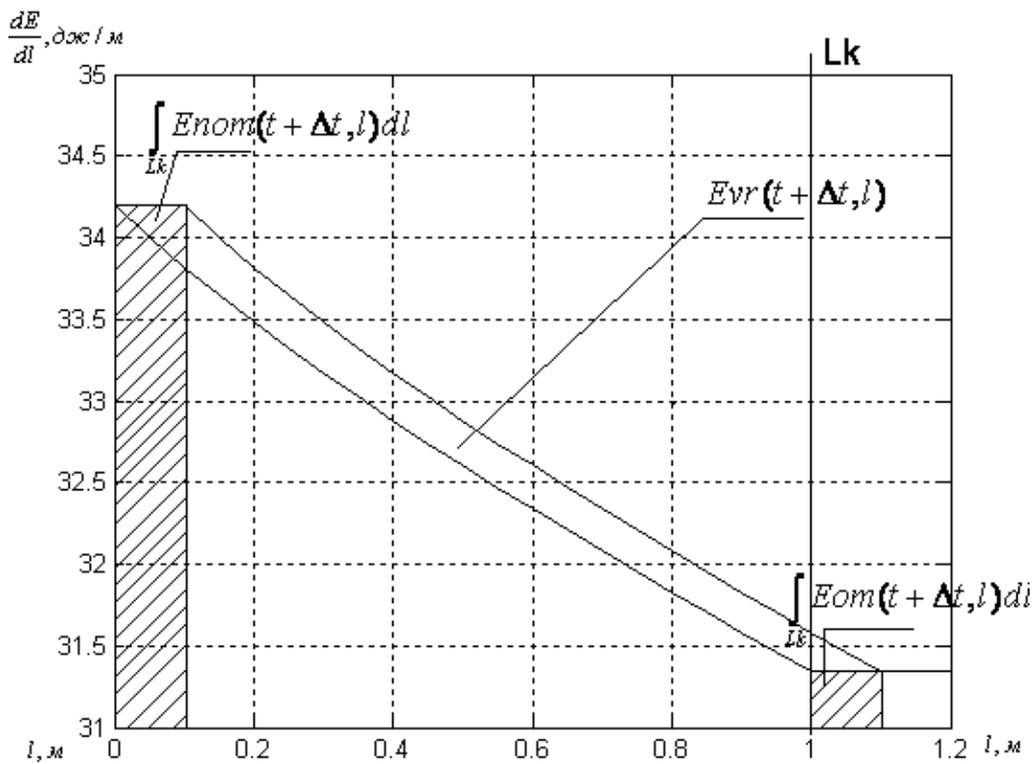


Рис. 3. Упрощение энергетического баланса

Раскроем величины, составляющие (2)–(3). Тепловая энергия, отобранная водой за Δt , определяется как

$$\int_{Lk} E_v(t + \Delta t) dl = c_v \rho_v \int_{\tau=t}^{t+\Delta t} V(\tau) \Delta T(\tau) d\tau, \quad (4)$$

где $c_v, \frac{\text{Дж}}{\text{кгК}}$ – теплоемкость воды; $\rho_v, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ – плотность воды; $V, \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$ – расход воды;

$\Delta T, ^\circ\text{C}$ – изменение температуры воды на кристаллизаторе.

$\int_{Lk} E_{nom}(t + \Delta t, l) dl$ и $\int_{Lk} E_{om}(t + \Delta t, l) dl$ определяются из выражений

$$\int_{Lk} E_{nom}(t + \Delta t, l) dl = \int_{\tau=t}^{t+\Delta t} V_z(\tau) \int_{Sk} c_c(0, \tau) \rho_c(0, \tau) T2d(0, \tau) ds d\tau \quad (5)$$

$$\int_{Lk} E_{om}(t + \Delta t, l) dl = \int_{\tau=t}^{t+\Delta t} V_z(\tau) \int_{Sk} c_s(Lk, \tau) \rho_s(Lk, \tau) T2d(Lk, \tau) ds d\tau, \quad (6)$$

где $V_z, \frac{\text{м}}{\text{с}}$ – скорость движения сортовой заготовки, $c_s(Z, \tau), \frac{\text{Дж}}{\text{кгК}}$; $\rho_s(Z, \tau), \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$;

$T2d(Z, \tau), ^\circ\text{C}$ – двумерные поля теплоемкости, теплопроводности и температуры в координате Z , соответственно. Учитывая, что на практике используются дискретные во времени модели, параметры меняются медленно, а двумерное температурное поле на входе равномерно, (4)–(6) можно записать как

$$\int_{Lk} Ev(t + \Delta t) dl = c_v \rho_v V(t) \Delta T(t) \Delta t \quad (7)$$

$$\int_{Lk} E_{nom}(t + \Delta t, l) dl = c_{zs} \rho_{zs} V(t) \Delta t T_{\text{Ж}}(t + \Delta t) \quad (8)$$

$$\int_{Lk} E_{om}(t + \Delta t, l) dl = \Delta t V_z(t) \int_{Sk} c_s(Lk, t) \rho_s(Lk, t) T2d(Lk, t) ds, \quad (9)$$

где $c_{zs}, \frac{\text{Дж}}{\text{кгК}}$; $\rho_{zs}, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ – теплоемкость и теплопроводность жидкой стали.

Из (7)–(9) можно оценить величину $T_{\text{Ж}}$:

$$T_{\text{Ж}}(t + \Delta t) = \frac{V_z(t) \int_{Sk} c_s(Lk, t) \rho_s(Lk, t) T2d(Lk, t) ds + c_v \rho_v V(t) \Delta T(t)}{c_{zs} \rho_{zs} V(t)}. \quad (10)$$

Очевидно, что (10) описывает несложный статический расчет по текущим показаниям датчиков и текущему состоянию, рассчитанному по одной из упрощенных реализаций модели (1).

3. Моделирование процесса наблюдения состояния

Применим полученную схему к модели сеток [4]. В процессе моделирования были сделаны следующие упрощения:

- не учитывается энергия, выделяющаяся при фазовом переходе металла;
- не учитываются различия свойств (теплоемкость, теплопроводность и т.д.) жидкой, твердой и смешанной фаз металла;
- считается, что имеют место граничные условия третьего рода (без учета теплообмена излучением и процессов усадки заготовки при кристаллизации). Величина коэффициента теплопередачи выбрана так, чтобы температура на выходе из кристаллизатора примерно соответствовала значению, измеренному пирометрическим датчиком на реальном объекте, т.е. $h_{x0} = h_{x1} = h_{y0} = h_{y1} \approx 1000 \frac{\text{Вт}}{\text{мК}}$;

- параметры скорости и охлаждения постоянны во времени (это упрощает схему генерации расчетных сечений).

Схема эксперимента выглядит следующим образом. Процессы в реальном объекте имитируем применением описанной выше модели с $T_{\text{Ж}}=1540^\circ\text{C}$, что дает в итоге эталонное температурное поле объекта и разность температур ΔT путем применения полученного из (10) выражения

$$\Delta T(t) = \frac{c_{zs}\rho_{zs}V(t)T_{\text{Ж}}(t+\Delta t) - V_z(t) \int c_s(Lk,t)\rho_s(Lk,t)T_2d(Lk,t)ds}{c_v\rho_vV(t)}. \quad (11)$$

Полученное из (11) значение составляет $\Delta T = 5,4\text{K}$. Теперь произведем моделирование с начальным значением $T_{\text{Ж}}=1510^\circ\text{C}$, на каждом шаге уточняя $T_{\text{Ж}}$ по (10). Результат операции приведен на рис. 4.

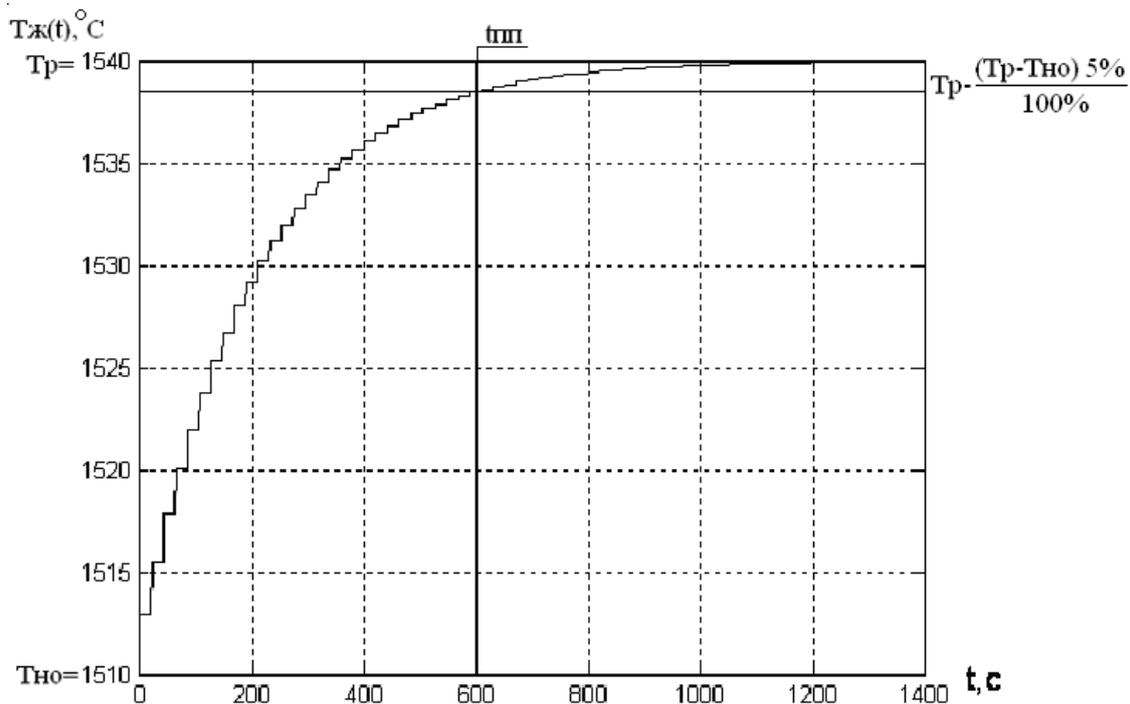


Рис. 4. Переходной процесс в модели с наблюдателем

Как видно из рисунка, температура $T_{\text{Ж}}$ сходится к оригиналу за некоторое время, что обусловлено наличием динамики в модели (1). Время переходного процесса составляет 600 с. Таким образом, применение данного наблюдателя позволяет получить оценку $T_{\text{Ж}}$ за время, меньшее, чем интервал между двумя измерениями термпарой.

Итоговая структурная схема наблюдателя показана на рис. 5. Итогом работы можно считать наблюдатель, который позволяет восстановить температуру жидкой стали на входе в гильзу кристаллизатора $T_{\text{Ж}}$ по единственному интегральному замеру – замеру разницы температуры воды на входе и выходе кристаллизатора. Положительными чертами такого наблюдателя являются простота реализации, статичность, а также возможность использования любой модели, дающей двумерное температурное поле на выходе из гильзы кристаллизатора. Применение наблюдателя позволяет более оперативно и полно контролировать параметры заготовки, обеспечивая возможность повышения качества охлаждения. К недостаткам наблюдателя можно отнести высокие тре-

бования к точности измерения ΔT . Для получения абсолютной погрешности оценки $\Delta T_{\text{ж}} = 10\text{К}$ требуется обеспечить абсолютную погрешность измерения $\Delta \Delta T = 0,035\text{К}$.

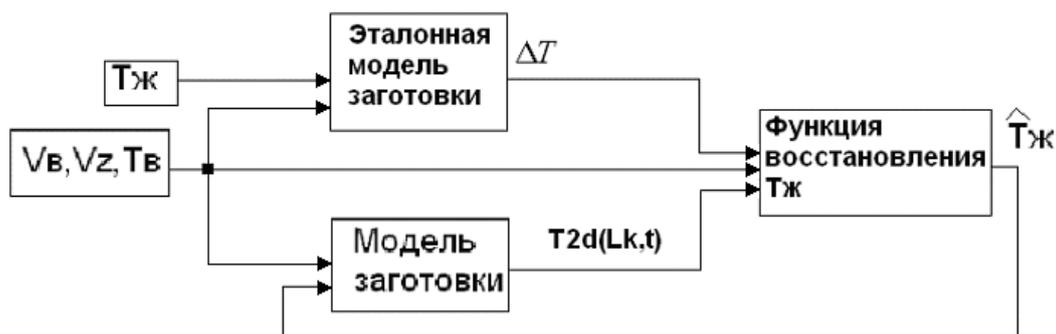


Рис. 5. Итоговая структурная схема наблюдателя: эталонная модель заготовки – объект или модель, реализующая (11) на основании выхода модели (1), модель заготовки – некоторая реализация (1), а функция восстановления $T_{\text{ж}}$ представляет собой (10)

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 07-08-12085-офи.

Литература

1. Рапопорт Э.Я. Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. – М.: Высш. шк., 2003. – 299 с.: ил.
2. Фарлоу С.Г. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. – М.: Мир, 1985. – 384 с.: ил.
3. Волков А.В. Промышленное освоение математической модели в составе комплексной АСУТП МНЛЗ-2 Молдавского металлургического завода. – Доклад на научно-технической конференции «Прогрессивные технологии непрерывной разливки: XXI век». – 28–31 мая 2002, г. Донецк // Специальная техника. – 1999. – №6. – С. 24–29. – Режим доступа: http://www.oracul.org/publications/acsep/r01_02_03.pdf, св.
4. Белевич М.Ю. Математическое моделирование гидрометеорологических процессов: основные вычислительные идеи и методы. / Уч. пособие. – СПб: Изд. РГГМУ, 2000. – 213 с.: ил.

Блинников Андрей Алексеевич

— Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, goofinator@mail.ru

Бойков Владимир Иванович

— Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, доцент, viboikov@mail.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСНОВНЫХ АСПЕКТОВ ВЕЩЕСТВЕННОГО И КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА В РАМКАХ АКСИОМАТИКИ ДЛЯ ГИПЕРНАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Е.В. Праздникова, Ю.Н. Ловягин

В работе излагается формализованная теория гиперрациональных чисел, основанная на консервативном расширении арифметики Пеано, которая используется для моделирования элементов вещественного и комплексного анализа в рамках формализованной теории чисел. Идея такого моделирования восходит к А.Г. Драгалину. В качестве приложения приводится ряд результатов о функциях, моделирующих вещественные и комплексные функции.

Ключевые слова: нестандартная арифметика, гиперрациональные числа, комплексные гиперрациональные числа

Введение

Теорема компактности гласит: если имеется некоторая теория, то она имеет модель тогда и только тогда, когда каждая ее конечная подтеория имеет модель. Чаще всего этот факт применяется для обоснования существования неархимедова расширения поля вещественных чисел и развития анализа в духе Лейбница. В настоящее время имеется много работ, посвященных применению методов нестандартного анализа к построению анализа вещественных функций (см., например, [1–3] и ссылки там). В большинстве работ применяется либо построение нестандартного расширения с помощью ультрапроизведения, либо идеи Нельсона [4] о консервативном расширении теории множеств Цермело–Френкеля путем добавления некоторых специфических аксиом, гарантирующих существование бесконечно малых. Пусть FP – теория упорядоченных полей в языке $L(=, \leq; +, \cdot; 0, 1)$ и L' – расширение этого языка путем добавления нового константного символа Ω . Теория FP' получается из FP путем добавления бесконечного списка аксиом $\{n < \Omega : n \text{ – натуральное}\}$. Так как, очевидно, всякая конечная подтеория FP' содержит лишь конечное множество «новых» аксиом, моделью этой подтеории может служить множество \mathfrak{R} , в котором имя константы Ω есть наибольшее натуральное число, являющееся номером «новой» аксиомы. Таким образом, существует модель для теории FP' , являющаяся элементарным расширением \mathfrak{R} и обозначаемая $*\mathfrak{R}$. Ясно, что имя константы Ω в модели $*\mathfrak{R}$ есть бесконечно большое число и, следовательно, в поле $*\mathfrak{R}$ имеются бесконечно малые числа. Более того, имеет место принцип переноса, согласно которому всякое утверждение о поле \mathfrak{R} , выразимое в языке L , истинно тогда и только тогда, когда соответствующее ему утверждение в языке L' истинно в поле $*\mathfrak{R}$.

Таким образом, пара $\mathfrak{R}, *\mathfrak{R}$ дает возможность развивать анализ в духе «основоположников» и, тем самым, реабилитирует теорию бесконечно малых Лейбница. Но понятие вещественного числа в теории FP неаксиоматизируемо, ибо принцип Архимеда невыразим в логике первого порядка – это и есть следствие теоремы компактности и существования $*\mathfrak{R}$. С другой стороны, само понятие вещественного числа базируется на понятии дедекиндова сечения в области рациональных чисел (или идее пополнения множества рациональных чисел как метрического пространства). Следовательно, вещественное число мы должны понимать как набор его рациональных приближений, как это делается в конструктивном анализе А.А. Маркова [5]. Аналогично обстоит дело и в представлении вещественных чисел в ЭВМ, точность которых предполагает задание вещественного числа его рациональным приближением. Идеальной ситуацией является задание «абсолютной» точности, при которой приближение отличается от истинного (абсолютного) значения на бесконечно малое количество. В этом аспекте возможно

рассмотрение в качестве модели теории FP множества рациональных чисел \mathcal{Q} и его нестандартного $^*\mathcal{Q}$ расширения, содержащего бесконечно малые числа. Доказательство существования такого поля аналогично приведенному для пары $\mathcal{R}, ^*\mathcal{R}$.

Однако само построение поля \mathcal{Q} осуществляется на основе кольца целых чисел \mathcal{Z} путем построения поля отношений, а само кольцо \mathcal{Z} строится, исходя из множества натуральных чисел. Таким образом, вещественные числа ведут естественное происхождение из натуральных. Сами же натуральные числа могут быть получены либо в теории множеств как конечные ординалы, либо построены аксиоматически на основе аксиом Пеано.

Одним из применений варианта теоремы компактности является теорема Левенгейма–Скулема–Тарского о том, что всякая теория, имеющая бесконечные модели, имеет модель любой наперед заданной мощности. Следовательно, теория Пеано имеет так называемые нестандартные модели, в которых имеются числа, строго большие любого натурального числа. Отсюда один шаг до построения на аксиоматической основе теории так называемых гиперрациональных чисел, которые призваны моделировать вещественные числа «со сколь угодно большой точностью». Это обусловлено тем, что, рассматривая поле $^*\mathcal{Q}$, мы можем доказать, что \mathcal{R} получается как фактор-кольцо кольца конечных чисел из $^*\mathcal{Q}$ по отношению бесконечной близости (см., например, [2]). Иными словами, для каждого вещественного числа существует гиперрациональное, бесконечно близкое к нему. Такое число определено неоднозначно, однако дает возможность судить о вычисляемом вещественном числе.

В настоящей работе излагается формализованная теория для моделирования элементов вещественного и комплексного анализа в рамках формализованной теории чисел. Идея такого моделирования восходит к А.Г. Драгалину [6].

1. Гиперарифметика

Рассмотрим формализованную теорию чисел, язык которой в своей сигнатуре содержит знаки для предиката равенства, двухместных функциональных символов для сложения и умножения, а также символ для унарного функционального символа следования. Последний будем обозначать штрихом ($'$), а для остальных знаков сигнатуры используем стандартные обозначения. Для термов и формул языка используется инфиксная запись. Константа «ноль» обозначается естественным образом. Формулы, не содержащие свободных переменных, именуются утверждениями.

Специальными аксиомами, именуемыми в дальнейшем аксиомами арифметики, являются:

1. $\forall x \neg(x' = 0)$;
2. $\forall x \forall y (x' = y' \supset x = y)$;
3. $\forall x (x + 0 = x)$;
4. $\forall x \forall y (x' + y') = (x + y)'$;
5. $\forall x (x \cdot 0 = x)$;
6. $\forall x \forall y (x \cdot y') = x \cdot y + x$;
7. $\varphi(0) \& \forall x (\varphi(x) \supset \varphi(x')) \supset \forall x \varphi(x)$ для любой формулы φ .

Определение 1.1. Теорию, содержащую аксиомы арифметики, а также аксиомы равенства и согласования с равенством, назовем арифметикой и обозначим A .

Термы $0, 1=0', 2=1', \dots$ называют натуральными числами.

Введем в сигнатуру арифметики предикатные символы \leq и $<$:

$x \leq y \equiv \exists z (x + z = y)$, $x < y \equiv x \leq y \& \neg(x = y)$.

Легко проверяется, что предикат \leq является предикатом порядка – рефлексивен, симметричен и транзитивен, таким образом, $<$ есть предикат строгого порядка.

Расширим теперь сигнатуру арифметики путем добавления нового константного символа Ω . К аксиомам арифметики добавим бесконечный набор аксиом

$$0 < \Omega, 1 < \Omega, 2 < \Omega \dots$$

Определение 1.2. Расширенную теорию назовем гиперарифметикой и обозначим HA .

Теорема 1.1. HA является консервативным расширением A .

Нетрудно понять, что терм Ω и образуемые на его основе посредством сложения и умножения термы являются числами, которые строго превосходят все натуральные числа, т.е. являются бесконечно большими числами.

Определение 1.3. Такие числа будем называть бесконечными натуральными числами. Все конечные и бесконечные натуральные числа будем называть гипернатуральными числами.

Для выделения конечных чисел среди натуральных введем соответствующий одноместный предикатный символ N . Таким образом, $N(x)$ означает, что x – конечное гипернатуральное число, или просто натуральное число.

Отметим, что вводимый предикат «быть натуральным числом» является по отношению к гиперарифметике внешним и не может быть выражен в ней.

2. Гиперрациональные числа

В этой части рассматриваются тройки гипернатуральных чисел. Для этого к сигнатуре теории HA добавляется трехместный предикатный символ HQ и аксиома $\forall x \forall y \forall z HQ(xyz)$. Содержательно эта аксиома означает, что тройка гипернатуральных чисел определяет некоторое новое число, которое будем называть гиперрациональным.

Для построения теории гиперрациональных чисел вводятся функциональные символы для сложения и умножения, а также предикатный символ равенства гиперрациональных чисел. Сохраняя для них прежние обозначения, введем

Определение 2.1. $xyz = uvw \equiv xw + x + vz + v = yw + y + uz + u$;

$$xyz \cdot uvw = xi + yv \quad ui + xv \quad zw + z + w ;$$

$$xyz + uvw = xw + x + uz + u \quad yw + y + vz + v \quad zw + z + w .$$

Теорема 2.1. 1. Введенный двухместный предикат является предикатом равенства для троек гипернатуральных чисел.

2. Для функциональных символов сложения и умножения троек гипернатуральных чисел выполнены аксиомы согласования с введенным предикатом равенства.

В [7] теорема доказана и доказано, что гиперрациональные числа образуют поле. Условимся тройки гипернатуральных чисел обозначать буквами p, q, r и тому подобными. Примем следующее сокращение: будем писать $\forall p \varphi$ вместо $\forall x \forall y \forall z (HQ(xyz) \supset \varphi)$ и $\exists p \varphi$ вместо $\exists x \exists y \exists z (HQ(xyz) \& \varphi)$.

Введем в рассмотрение специальные предикатные символы, описывающие свойства гиперрациональных чисел.

Определение 2.2. 1. Число p является гипернатуральным: $HN(p) \equiv \exists x (p = x00)$.

2. Число p является натуральным: $N(p) \equiv HN(p) \& N(x)$.

3. Число p является положительным: $p \geq 0 \equiv x \geq y$.

4. Число p строго положительно: $p > 0 \equiv p \geq 0 \& \neg(p = 0)$.

5. $p \geq q \equiv p - q \geq 0$, $p > q \equiv p \geq q \& \neg(p = q)$.

6. Число p является бесконечно малым: $p \approx 0 \equiv \forall n(N(n) \supset (\neg(n=0) \supset |p| < \frac{1}{n}))$.

7. Числа p и q бесконечно близки: $p \approx q \equiv p - q \approx 0$.

8. Число p является рациональным: $Q(p) \equiv \forall q(q \approx p \supset q = p)$.

9. Число p является конечным: $fin(p) \equiv \exists n(N(n) \& |p| \leq n)$.

10. Число p является бесконечно большим: $inf in(p) \equiv \neg(fin(p))$.

Отметим, что понятия рационального, натурального, конечного, бесконечно малого, бесконечно большого гиперрационального числа являются внешними.

Теорема 2.2. $\forall p \forall q(HN(p) \& HN(q) \supset HN(p+q) \& HN(pq))$, причем сумма и произведение, вычисленные как гиперрациональные и как гипернатуральные числа, совпадают.

В [7] теорема доказана и доказаны основные свойства конечных и бесконечно малых чисел, аналогичные свойствам предела числовой последовательности. В частности, произведение конечного и бесконечно малого чисел бесконечно мало.

Теорема 2.3. Сумма и произведение гиперрациональных чисел определены корректно относительно отношения бесконечной близости: если $p_1 \approx q_1$ и $p_2 \approx q_2$, то $p_1 + p_2 \approx q_1 + q_2$ и $p_1 \cdot p_2 \approx q_1 \cdot q_2$.

В доказательстве используется свойство: сумма и произведение бесконечно малых бесконечно мало. Там же доказано, что гиперрациональные числа образуют упорядоченное поле.

Таким образом, соотношение между гиперрациональными и гипернатуральными числами точно такое же, как таковое между натуральными и рациональными числами. Более того, можно легко доказать, что теория гиперрациональных чисел является консервативным расширением теории рациональных чисел. Следовательно, все то, что доказуемо для рациональных чисел, доказуемо и для гиперрациональных. С другой стороны, наличие свойства «быть бесконечно малым» дает возможность рассматривать конечные гиперрациональные числа как «сколь угодно точные» приближения к числам вещественным. Некоторые приложения этого к элементарному математическому анализу имеются в [7–9].

Покажем, как гиперрациональные числа моделируют вещественные. Для этого используем доказанную И.Ф. Сегаль теорему, являющуюся аналогом теоремы Коши о промежуточном значении. Предварительно оговорим понятие функции гиперрационального аргумента.

Пусть φ – формула с двумя свободными переменными для гиперрациональных чисел. Говоря формально, φ – формула теории HA с шестью свободными переменными. Пусть, далее, $\forall p(\exists q\varphi(p, q) \supset (\exists r\varphi(p, r) \supset r = q))$. В этом случае говорят, что формула φ определяет функцию f гиперрационального аргумента. Если $\exists q\varphi(p, q)$, то пишут $q = f(p)$ и говорят, что q есть значение функции f на p .

Функцию f называют равномерно непрерывной на сегменте $[a, b]$, где a и b – конечные гиперрациональные числа, если

$$\forall p \forall q(p \geq a \& p \leq b \& q \geq a \& q \leq b \supset (p \approx q \supset f(p) \approx f(q))).$$

Теорема И.Ф. Сегаль гласит:

Теорема 2.4. Если функция f равномерно непрерывна на сегменте $[a, b]$ и $f(a)f(b) < 0$, то $\exists c(c > a \& c < b \& f(c) \approx 0)$.

Рассмотрим функцию f , определенную правилом $f(x) = x^m$, где m – натуральное число. Тогда при $p \approx q$ имеем $p^m - q^m = (p - q)(p^{m-1} + p^{m-2}q + \dots + pq^{m-2} + q^{m-1}) \approx 0$, что дает равномерную непрерывность функции на любом сегменте.

Рассмотрим рациональное, или более общее конечное гиперрациональное, число $a > 0$ и уравнение $x^m = a$. Покажем, что это уравнение имеет «почти решение», т.е. существует конечное гиперрациональное число p такое, что $p^m \approx a$.

Результат почти мгновенно следует из равномерной непрерывности на сегменте $[0, a]$ функции f , определенной правилом $f(x) = x^m - a$. Таким образом, доказана

Теорема 2.5. Для каждого конечного гиперрационального числа $a \geq 0$ и любого натурального m существует конечное гиперрациональное число p такое, что $p^m \approx a$.

Определение 2.3. Любое число p такое, что $p^m \approx a$, назовем корнем степени m из числа a и будем обозначать $\sqrt[m]{a}$.

Доказанная теорема показывает, что из положительного гиперрационального числа существуют корни любой натуральной степени. Нетрудно понять, что корни нечетной степени существуют из любого конечного гиперрационального числа.

Приведенный аргумент является одним из важнейших в мотивации привлечения гиперрациональных чисел к моделированию вещественных чисел и вещественного анализа. Приведем еще один результат в данном направлении.

Теорема 2.6. Пусть для каждого гипернатурального числа n имеется гиперрациональное число $\{p_n\}$, причем

1. $\forall n(HN(n) \supset p_{n+1} \geq p_n)$.
2. $\exists M(fin(M) \& \forall n(HN(n) \supset |p_n| \leq M))$.

Тогда $\forall n \forall m(HN(n) \& HN(m) \& \inf in(n) \& \inf in(m) \supset p_n \approx p_m)$.

Приведенная теорема, будучи интерпретированной на языке элементарного анализа вещественных чисел, равносильна тому, что возрастающая ограниченная сверху последовательность рациональных (или вещественных) чисел является фундаментальной. Она позволяет привести «конструкцию» для извлечения корней из гиперрациональных чисел. Точнее, как и в классическом анализе, доказывается, что последовательность, определенная рекуррентным соотношением $p_{n+1} = \frac{1}{2}(p_n + \frac{a}{p_n})$, удовлетворяет условиям теоремы. Таким образом,

для всех бесконечно больших натуральных чисел все члены последовательности бесконечно близки друг другу. Используя свойства алгебраических операций над гиперрациональными числами при бесконечно больших n , получаем: $p_n^2 = 2p_n p_{n+1} - a \approx 2p_n^2 - a$. Отсюда $p_n^2 \approx a$, т.е. при бесконечно больших натуральных n $p_n \approx \sqrt[2]{a}$. Аналогичные рассуждения можно провести и для извлечения корней любой степени.

Лемма 2.1. Пусть $HQ(p)$ и $\varepsilon \approx 0$. Тогда $p > 0 \equiv p + \varepsilon > 0$.

Определение 2.4. Будем говорить, что гиперрациональное число p почти больше числа q (или число q почти меньше числа p) и писать $p \succ \approx q$ (или $q \prec \approx p$), если $p \geq q \vee p \approx q$.

Теорема 2.7. Пусть $a \succ \approx b$ – положительные конечные гиперрациональные числа, m – натуральное число. Тогда при любых p и q таких, что $p^m \approx a$, $q^m \approx b$ имеет место $p \succ \approx q$.

Приведенные результаты показывают, что функция извлечения корня является возрастающей равномерно непрерывной функцией.

3. Комплексные гиперрациональные числа

Добавим к сигнатуре теории гиперрациональных чисел предикатный символ HC , содержательно означающий, что пара (p, q) гиперрациональных чисел определяет

комплексное гиперрациональное число. К аксиомам теории HC добавим аксиому $\forall p \forall q HC(p, q)$. В дальнейшем, как и выше, используем сокращение $\forall pq \varphi$ для $\forall p \forall q (HC(p, q) \supset \varphi)$ и $\exists pq \varphi$ для $\exists p \exists q (HC(p, q) \& \varphi)$.

Определение 3.1. Пару гиперрациональных чисел назовем комплексным гиперрациональным числом.

Для удобства пару (p, q) такую, что $HC(p, q)$, будем обозначать буквами z, w и подобными. Пишем также $z = (p, q)$ вместо $HC(p, q)$.

Определение 3.2. Комплексные гиперрациональные числа $z = (p, q)$ и $w = (x, y)$ равны между собой, если $p = x \& q = y$. Записываем это отношение как $z = w$.

Замечание 3.1. Новый предикат отличен от имеющегося в языке, но мы сохраняем за ним то же обозначение, что не должно привести к недоразумениям.

Определение 3.3. Предикат HQ определяет гиперрациональное число z вида $(p, 0)$, т.е. $HQ(z) \equiv \exists p z = (p, 0)$.

Определение 3.4. Суммой комплексных гиперрациональных чисел $z = (p, q)$ и $w = (x, y)$ будем называть комплексное гиперрациональное число $s = (p + x, q + y)$.

Произведением комплексных гиперрациональных чисел $z = (p, q)$ и $w = (x, y)$ будем называть комплексное гиперрациональное число $u = (px - qy, py + qx)$.

Теорема 3.1. Сумма и произведение гиперрациональных чисел определены корректно: если $z_1 = w_1$ и $z_2 = w_2$, то $z_1 + z_2 = w_1 + w_2$ и $z_1 \cdot z_2 = w_1 \cdot w_2$.

Теорема 3.2. Введенный в определении 3.2 предикат есть предикат равенства, т.е. верны аксиомы равенства и согласованности с равенством:

1. рефлексивность равенства, $\forall z (z = z)$;
2. симметричность равенства, $\forall z \forall w (z = w \supset w = z)$;
3. транзитивность равенства, $\forall z \forall w \forall u (z = w \& w = u \supset z = u)$;
4. согласованность с предикатными символами,
 $\forall z_1 \dots z_n \forall w_1 \dots w_n (z_1 = w_1 \& \dots \& z_n = w_n \supset (P(z_1, \dots, z_n) \equiv P(w_1, \dots, w_n)))$;
5. согласованность с функциональными символами,
 $\forall z_1 \dots z_n \forall w_1 \dots w_n (z_1 = w_1 \& \dots \& z_n = w_n \supset f(z_1, \dots, z_n) = f(w_1, \dots, w_n))$.

Теорема 3.3. Комплексные гиперрациональные числа образуют поле.

Определение 3.5. Назовем комплексное число $(0, 1)$ мнимой единицей и будем обозначать $i = (0, 1)$.

Для любого гиперрационального числа p можно определить комплексное гиперрациональное число $(p, 0)$.

Теорема 3.4. $\forall z \forall w (\exists p \exists q (z = (p, 0) \& w = (q, 0) \supset (z = w \equiv p = q)))$.

Теорема 3.5. $\forall z \forall w (\exists p \exists q (z = (p, 0) \& w = (q, 0) \supset (z + w = p + q) \& (z \cdot w = p \cdot q)))$.

Теоремы 3.4 и 3.5 показывают, что операции над комплексными гиперрациональными числами являются продолжением соответствующих операций над гиперрациональными числами.

Замечание 3.2. Заметим, что любое комплексное гиперрациональное число $z = (p, q)$ можно представить в виде $z = (p, 0) + (0, q) = (p, 0) + q \cdot (0, 1) = p + iq$. Таким образом, комплексное гиперрациональное число $z = (p, q)$ определяет число вида $z = p + iq$.

Определение 3.6. Запись комплексного гиперрационального числа z в виде $p + iq$ называют алгебраической формой записи.

Определение 3.7. Пусть $z = p + iq$. Гиперрациональные числа p и q назовем гиперрациональной и мнимой частями комплексного гиперрационального числа z . Гиперрациональную часть будем обозначать Hqz , а мнимую $-Imz$.

Замечание 3.2. Таким образом, в введенных обозначениях с комплексными гиперрациональными числами можно оперировать как с многочленами относительно i , учитывая, что $i^2 = -1$.

Определение 3.8. Модулем комплексного гиперрационального числа $z = (p, q)$ назовем $\sqrt{p^2 + q^2}$. Модуль будем обозначать как $|z|$.

Определение 3.9. Комплексное гиперрациональное число z будем называть конечным, если его модуль – конечное гиперрациональное число.

Определение 3.10. Комплексное гиперрациональное число z будем называть бесконечно большим, если $|z|$ – бесконечно большое гиперрациональное число.

Определение 3.11. Комплексное гиперрациональное число z будем называть бесконечно малым (и обозначать как $z \approx 0$), если $|z|$ – бесконечно малое гиперрациональное число.

Утверждение 3.1. Для любого комплексного гиперрационального числа $z = (p, q)$ $|z| \approx 0$ тогда и только тогда, когда $p \approx 0$ & $q \approx 0$.

Теорема 3.6. Для комплексных гиперрациональных чисел верны следующие утверждения.

1. Произведение бесконечно большого на конечное дает бесконечно большое.
2. Сумма и произведение бесконечно малых являются бесконечно малыми.
3. Произведение конечного на бесконечно малое дает бесконечно малое.
4. Сумма и произведение конечных чисел являются конечным числом.
5. Отношение конечных чисел конечно, если знаменатель не бесконечно мал.

В доказательстве используются аналогичные свойства для гиперрациональных чисел.

Определение 3.12. Комплексные гиперрациональные числа z и w будем называть бесконечно близкими (и обозначать $z \approx w$), если $z - w \approx 0$.

Утверждение 3.2. Для любых комплексных гиперрациональных чисел $z = (p, q)$ и $w = (x, y)$ верно $z \approx w$ тогда и только тогда, когда $p \approx x$ & $q \approx y$.

Для любых комплексных гиперрациональных чисел z , w и v верно:

1. $\forall z (z \approx z)$;
2. $\forall z \forall w (z \approx w \supset w \approx z)$;
3. $\forall z \forall w \forall u (z \approx w \& w \approx u \supset z \approx u)$.

Теорема 3.7. Сумма и произведение комплексных гиперрациональных чисел определены корректно относительно отношения бесконечной близости: если $z_1 \approx w_1$ и $z_2 \approx w_2$, то $z_1 + z_2 \approx w_1 + w_2$ и $z_1 \cdot z_2 \approx w_1 \cdot w_2$.

4. Комплексные гиперрациональные функции

Определение 4.1. Пусть φ – формула с двумя свободными переменными для комплексных гиперрациональных чисел, и $\forall x (\exists y \varphi(x, y) \supset (\exists u \varphi(x, u) \supset u = y))$. Тогда будем говорить, что φ определяет функцию комплексного гиперрационального аргумента.

Функции будем обозначать f , g и т.д. Область определения функции φ – это класс всех комплексных гиперрациональных чисел x , таких что $\exists y \varphi(x, y)$. В этом случае записываем $y = f(x)$. Говорим, что функция φ определена в точке x и пишем $\exists f(x)$, если $\exists y (\varphi(x, y) \& y = f(x))$.

Определение 4.2. Пусть φ – формула с двумя свободными переменными для комплексных гиперрациональных чисел. Будем говорить, что z принадлежит Φ , если $\varphi(z)$. В таком случае пишем $\Phi(z) \equiv \varphi(z)$.

Определение 4.3. Функция f называется равномерно непрерывной на некоторой фигуре, если для всех z и w из фигуры из $z \approx w$ следует, что $f(z) \approx f(w)$.

Определение 4.4. Монада числа z – совокупность всех комплексных гиперрациональных чисел, бесконечно близких к z . Обозначаем $\mu(z)$.

Определение 4.5. Пусть $\mu = \mu(z)$ – некоторая монада для некоторого числа z . Функция f называется непрерывной в монаде μ , если для всех элементов этой монады значения функции бесконечно близки.

Определение 4.6. Фигуру $D_{abcd}(z) \equiv a \leq \operatorname{Re} z \leq b \ \& \ c \leq \operatorname{Im} z \leq d$, где a, b, c, d – гиперрациональные числа, назовем замкнутым прямоугольником. Фигуру $R_r(z) \equiv (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 \leq r^2$, где r – гиперрациональное число, назовем замкнутым кругом.

Теорема 4.1. Пусть функция f определена и равномерно непрерывна на $D_{abcd}(z)$, тогда существует M , лежащее в области $D_{abcd}(z)$, такое, что для любых z из фигуры $D_{abcd}(z)$ верно $|f| \leq M = f(w)$.

Доказательство. Разобьем фигуру $D_{abcd}(z)$ на $N \times K$ равных частей, где N, K – бесконечно большие натуральные числа, следующим образом:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = b, \quad c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{K-1} < y_K = d,$$

где $x_i = \frac{b-a}{N}i$, $y_j = \frac{d-c}{K}j$. Рассмотрим комплексные гиперрациональные числа

$z_{ij} = (x_i, y_j)$ и значения функции f на них $f(z_{ij})$:

$$f(x_0, y_0), f(x_0, y_1), \dots, f(x_0, y_{K-1}), f(x_0, y_K),$$

$$f(x_1, y_0), f(x_1, y_1), \dots, f(x_1, y_{K-1}), f(x_1, y_K),$$

...

$$f(x_N, y_0), f(x_N, y_1), \dots, f(x_N, y_{K-1}), f(x_N, y_K).$$

Среди выбранных чисел есть самое большое по модулю, пусть это $f(z_{st})$. Рассмотрим произвольное z из фигуры $D_{abcd}(z)$, тогда при некоторых k, l $z \approx z_{kl}$. Если $k \neq s \vee l \neq t$, то не может быть $|f(z)| > |f(z_{st})|$ в силу непрерывности f . Если же $k = s \ \& \ l = t$, то в случае $|f(z)| > |f(z_{st})|$ полагаем $M = f(z)$. Далее по индукции перебираем все элементы монады точки z_{st} . Таким образом, находим самое большое значение функции.

Индукция возможна, ибо множество комплексных гиперрациональных чисел биективно множеству гипернатуральных. ■

Заключение

Показано, что гиперрациональные числа пригодны для моделирования вещественных и комплексных чисел. Построена формализованная теория комплексных гиперрациональных чисел. Приведен ряд результатов, моделирующих результаты о функциях вещественной и комплексной переменной.

Литература

1. Ловягин Ю.Н. Исчисление бесконечно малых Г.В. Лейбница в современном изложении, или Введение в нестандартный анализ А.Робинсона. – Сыктывкар: СЛИ, 2001. – 161с.
2. Девис М. Прикладной нестандартный анализ. – М.: Мир, 1980. – 236 с.
3. Успенский В.А. Что такое нестандартный анализ? – М.: Наука, 1987. – 128 с.
4. Nelson E. Internal set theory. A new approach to non standard analysis // Bull. amer. Math. Soc. – 1977. – V. 83. – № 6. – P. 1165 –1198.
5. Марков А.А., Нагорный Н.М. Теория алгорифмов. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
6. Драгалин А.Г. Конструктивная теория доказательств и нестандартный анализ. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 544 с.
7. Праздникова Е.В. Моделирование вещественного анализа в рамках аксиоматики для гипернатуральных чисел // Вестник сыктывкарского университета. – 2008. – Сер.1.
8. Ловягин Ю.Н. Гиперрациональные числа как основа математического анализа // Вестник сыктывкарского университета. – 2008. – Сер.1.
9. Сегаль И.Ф. Доказательство равномерной непрерывности функций на гиперрациональных числах в аксиоматике арифметики // Косовский Н.К., Тишков А.В. Логика конечнозначных предикатов на основе неравенств: Учебное пособие. – СПб: Издательство С.-Петербург. университета, 2000. – 268 с. – С. 232 – 241.

Праздникова Елена Владимировна

— Санкт-Петербургский государственный университет, аспирант, goofinator@mail.ru

Ловягин Юрий Никитич

— Санкт-Петербургский государственный университет, кандидат физ.-мат. наук, доцент, juhla@inbox.ru

УДК 62.50

АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТЕЙ НЕПРЕРЫВНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИСТАНЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКИМ ОБЪЕКТОМ С УЧЕТОМ ФАКТОРА КАНАЛЬНОЙ СРЕДЫ

Н.Ю. Боженкова, О.С. Осипцева, А.В. Ушаков

Обсуждается задача анализа возможностей непрерывных модельных представлений задачи дистанционного управления непрерывным техническим объектом с учетом фактора канальной среды. Предлагается процедура синтеза управления с учетом фактора канальной среды, которая опирается на такие системные параметры, как характеристическая частота и запас устойчивости по фазе.

Ключевые слова: фактор канальной среды, дистанционное управление, непрерывное представление

Введение. Постановка задачи

Предлагается следующая логика решения проблемы: формирование управления непрерывным техническим объектом в предположении, что канальная среда в случае ее непрерывного описания представляет собой «черный ящик», вносящий в цепь передачи сигнала управления в прямом канале и в сигнале измерения в обратном канале «чистую временную задержку». На первом этапе синтеза устройства формирования сигнала управления (УФСУ) используется предположение, что в аппаратной среде системы «канальная задержка» отсутствует. Тем не менее, в алгоритмической среде фактор за-

держки учитывается в форме оценки влияния задержки на запас устойчивости по фазе выбранной полиномиальной модели как функции характеристической частоты этой модели [1]. Таким образом, в алгоритмической среде формируется банк модернизированных полиномиальных моделей, параметризованных характеристической частотой.

Такой подход позволит осуществлять синтез системы управления непрерывным объектом на основе непрерывных модельных представлений с помощью канонических полиномиальных динамических модальных моделей (ПДММ) методом модального управления, системная модернизация которых осуществляется в системной среде фактором наличия задержки в прямом и обратном каналах [2]. Очевидным недостатком подхода является то, что разработчик оказывается несвободным в выборе характеристической частотой ω_0 , пределы вариации которой задает банк модернизированных ПДММ.

Следует заметить, что если у разработчика есть возможность свободного выбора канальной среды с большей пропускной способностью, то проблема ограничения на характеристическую частоту ПДММ может быть снята.

Погружение полиномиальной динамической модальной модели с передаточной функцией $\Phi(s, \omega_0)$ вход-выход в канальную среду, модельно представляемую чистым запаздыванием

Поставим задачу структурной реализации передаточной функции $\Phi(s, \omega_0)$ вход-выход ПДММ [1] в виде системы с отрицательной единичной обратной связью, что требует представления $\Phi(s, \omega_0)$ в форме

$$\Phi(s, \omega_0) = \frac{W(s, \omega_0)}{1 + W(s, \omega_0)}, \quad (1)$$

где передаточная функция $W(s, \omega_0)$ прямой цепи системы определяется соотношением

$$W(s, \omega_0) = \frac{\Phi(s, \omega_0)}{1 - \Phi(s, \omega_0)}. \quad (2)$$

Погрузим структурный компонент с передаточной функцией $W(s, \omega_0)$ в канальную среду, характеризующуюся чистым запаздыванием в прямом и обратном каналах связи, тогда получим динамическую систему, представленную на рис. 1.

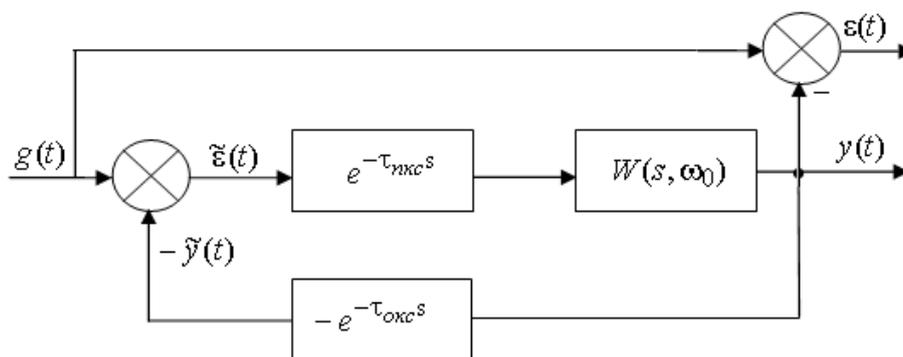


Рис. 1. Структура динамической системы

Здесь $g(t)$ – внешнее задающее воздействие, которое должно воспроизводиться с минимальной ошибкой техническим объектом в форме его функционального выхода $y(t)$, $\tilde{y}(t)$ – информационный выход, по которому замыкается система в случае ее погружения в канальную среду, $\varepsilon(t) = g(t) - y(t)$ – ошибка воспроизведения системой за-

дающего воздействия, $\tilde{\varepsilon}(t) = g(t) - \tilde{y}(t)$ – невязка задающего воздействия и информационного выхода; $\tau_{\text{ПКС}}, \tau_{\text{ОКС}}$ – задержки в прямом и обратном каналах связи соответственно, порождающие в канальной среде совокупную задержку $\tau_{\text{КС}} = \tau_{\text{ПКС}} + \tau_{\text{ОКС}}$. Если учесть физический механизм появления задержки в прямом и обратной каналах связи, состоящей в четырехфазном кодовом преобразовании типа «параллельный – последовательный» и наоборот, то численно эта задержка может быть оценена выражением $\tau_{\text{КС}} = 4n_p \Delta t$, где Δt – длительность одного бита кода, а n_p – число разрядов аналогоцифрового и цифро-аналогового преобразования [3].

Для дальнейших исследований запишем передаточную функцию $\Phi(s, \omega_0)$ ПДММ в развернутом и параметризованном характеристической частотой ω_0 виде:

$$\Phi(s, \omega_0) = \frac{V_n \omega_0^n}{s^n + V_1 \omega_0 s^{n-1} + \dots + V_{n-1} \omega_0^{n-1} + V_n \omega_0^n}. \quad (3)$$

Тогда в силу соотношения (2) для $W(s, \omega_0)$ получим:

$$W(s, \omega_0) = \frac{V_n \omega_0^n}{(s^{n-1} + V_1 \omega_0 s^{n-2} + \dots + V_{n-1} \omega_0^{n-1})s}. \quad (4)$$

Погружение в канальную среду преобразует за счет наличия в ней задержек передаточную функцию разомкнутой системы $W(s, \omega_0)$ в передаточную функцию $\tilde{W}(s, \omega_0)$, определяемую соотношением

$$\tilde{W}(s, \omega_0) = W(s, \omega_0) e^{-\tau_{\text{КС}} s}. \quad (5)$$

Оценим влияние фактора канальной среды путем контроля изменения запаса устойчивости по фазе системы при переходе от передаточной функции $W(s, \omega_0)$ к передаточной функции $\tilde{W}(s, \omega_0)$ [1]. Запас устойчивости по фазе $\Delta\tilde{\varphi}$ системы с передаточной функцией $\tilde{W}(s, \omega_0)$ определяется выражением

$$\Delta\tilde{\varphi} = \pi + \tilde{\varphi}(\omega_c), \quad (6)$$

где $\tilde{\varphi}(\omega_c) = \arg \tilde{W}(j\omega, \omega_0)$ – значение фазовой характеристики частотной передаточной функции $\tilde{W}(j\omega, \omega_0)$ на частоте ω , равной частоте среза ω_c , которое вычисляется в силу (4) и (5) с помощью выражений

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\omega_c) &= \varphi(\omega_c) - \tau_{\text{КС}} \omega_c \quad (\omega_c = \gamma \omega_0); \\ \varphi(\omega_c) &= \arg \left\{ \frac{V_n \omega_0^n}{(s^{n-1} + V_1 \omega_0 s^{n-2} + \dots + V_{n-1} \omega_0^{n-1})s} \right\} \Bigg|_{s=j\omega_c} = \\ &= \arg \left\{ \frac{V_n}{(j\gamma)^n + V_1 (j\gamma)^{n-1} + \dots + jV_{n-1} \gamma} \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

В выражениях (7) учтено то обстоятельство, что при фиксированной локализации собственных значений матрицы состояния ПДММ, параметризованных характеристической частотой ω_0 , между ω_0 и частотой среза ω_c существует линейная связь с коэффициентом γ , который принимает свое значение для каждого порядка n ПДММ и каждой локализации собственных значений [4]. В силу этой связи значение фазы $\varphi(\omega_c)$ на частоте среза ω_c не зависит от характеристической частоты ω_0 .

Дальнейшие исследования проблемы проведем на примере локализации собственных значений Баттерворта третьего порядка, для которого передаточная функция $W(s, \omega_0)$ принимает вид

$$W(s, \omega_0) = \frac{\omega_0^3}{(s^2 + 2\omega_0 s + 2\omega_0^2)s}. \quad (8)$$

Проведенные исследования полинома Баттерворта третьего порядка позволяют охарактеризовать его:

- значением фазы $\varphi(\omega_c)$ на частоте среза ω_c , равным $\varphi(\omega_c) = -119,51^\circ$;
- значением запаса устойчивости по фазе $\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_c) = 60,49^\circ$;
- значением частоты среза $\omega_c = 0,4963\omega_0$.

Результаты исследования динамических свойств системы, построенной по схеме рис. 1 с передаточной функцией вида (8) и значениями задержки $\tau_{кс}$, порождающими на частоте среза $\omega_c = 0,4963\omega_0$ фазовый сдвиг $\Delta\Delta\varphi = \delta_{\Delta\varphi}\Delta\varphi$, где $\delta_{\Delta\varphi}$ – относительное приращение фазового сдвига, в модельной среде Simulink оболочки Matlab сведены в табл. 1. В таблице представлены следующие динамические показатели системы: σ , % – перерегулирование кривой переходного процесса по функциональному выходу, $t_{ny}\omega_0$ – длительность переходного процесса по функциональному выходу, $t_{ny}\tilde{\omega}_0$ – длительность переходного процесса по информационному выходу.

На основе полученных результатов для расширения банка моделей ПДММ были проведены аналогичные исследования для случая модифицированного распределения мод Баттерворта, который характеризуется частотой ω_0 и углом раскрытия сектора, симметрированного относительно вещественной оси в левой полуплоскости, равным $2\psi = 60^\circ$, порождающего колебательность системы $\mu = \text{tg}30^\circ = 0,5774$, что доставляет таковой ПДММ в случае отсутствия запаздывания переходные процессы без перерегулирования.

| Для ПДММ с каноническим распределением мод Баттерворта 3-го порядка | | | | | | | | | | | |
|---------------------------------------------------------------------|------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|
| $\Delta\Delta\varphi, \text{град}$ | 0 | -3,03 | -6,05 | -9,07 | -12,1 | -15,12 | -16,15 | -21,17 | -24,2 | -27,22 | -30,25 |
| $\delta_{\Delta\varphi}, \%$ | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |
| $t_{ny}\omega_0, c$ | 5,97 | 6,43 | 6,79 | 7,09 | 10,41 | 11,12 | 11,71 | 15,66 | 16,67 | 21,13 | 22,48 |
| $t_{ny}\tilde{\omega}_0, c$ | 5,97 | 6,38 | 6,68 | 6,94 | 10,20 | 10,95 | 11,34 | 15,3 | 16,25 | 20,64 | 21,95 |
| $\sigma, \%$ | 8,15 | 11,65 | 15,45 | 19,51 | 23,84 | 28,31 | 32,96 | 37,74 | 42,63 | 47,6 | 52,65 |

Таблица 1. Результаты исследования динамических свойств системы с передаточной функцией (8)

Для модифицированного распределения мод Баттерворта передаточная функция $W(s, \omega_0)$ принимает вид

$$W(s, \omega_0) = \frac{\omega_0^3}{(s^2 + (2 \cos \psi + 1)\omega_0 s + (2 \cos \psi + 1)\omega_0^2)s}. \quad (9)$$

Проведенные исследования модифицированного полинома Баттерворта третьего порядка при $\psi=30^\circ$ позволяют охарактеризовать его:

- значением фазы $\varphi(\omega_c)$ на частоте среза ω_c , равным $\varphi(\omega_c) = -110,77^\circ$,
- значением запаса устойчивости по фазе $\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_c) = -69,33^\circ$,
- значением частоты среза $\omega_c = 0,3595\omega_0$.

| Для ПДММ с модифицированным распределением мод Баттерворта 3-го порядка | | | | | | | | | | | |
|-------------------------------------------------------------------------|------|-------|-------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|-------|--------|
| $\Delta\Delta\varphi, \text{ град}$ | 0 | -3,47 | -6,93 | -10,34 | -13,87 | -17,33 | -20,8 | -24,27 | -27,73 | -31,2 | -34,67 |
| $\delta_{\Delta\varphi}, \%$ | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |
| $t_{ny}\omega_0, \text{ с}$ | 5,42 | 5,04 | 4,83 | 8,36 | 9,1 | 9,63 | 13,45 | 15,15 | 16,19 | 21,82 | 23,47 |
| $t_{ny}\tilde{\omega}_0, \text{ с}$ | 5,42 | 4,95 | 4,66 | 8,1 | 8,76 | 9,21 | 12,94 | 14,55 | 15,51 | 21,05 | 22,63 |
| $\sigma, \%$ | 0 | 1,55 | 4,41 | 8,16 | 12,56 | 17,44 | 22,67 | 28,16 | 33,83 | 39,66 | 45,59 |

Таблица 2. Результаты исследования динамических свойств системы с передаточной функцией (9)

Результаты исследования динамических свойств системы, построенной по схеме рис. 1, с передаточной функцией вида (9) и значениями задержки $\tau_{кс}$, порождающими на частоте среза $\omega_c = 0,3595\omega_0$ фазовый сдвиг $\Delta\Delta\varphi = \delta_{\Delta\varphi}\Delta\varphi$, где $\delta_{\Delta\varphi}$ – относительное приращение фазового сдвига, в модельной среде Simulink оболочки Matlab сведены в табл. 2. В таблице представлены следующие динамические показатели системы: $\sigma, \%$ – перерегулирование кривой переходного процесса, $t_{ny}\omega_0$ – длительность переходного процесса по функциональному выходу, $t_{ny}\tilde{\omega}_0$ – длительность переходного процесса по информационному выходу.

Для большей наглядности результатов кривые зависимостей перерегулирования σ и времени переходного процесса $t_{ny}\omega_0$ от относительной величины уменьшения запаса устойчивости $\delta_{\Delta\varphi}$ для полинома Баттерворта (кривая 1) и модифицированного полинома Баттерворта (кривая 2) представлены соответственно на рис. 2 и 3.

Исследования показали, что уменьшение запаса устойчивости на десять процентов ($\Delta\Delta\varphi = 0,12 \text{ рад} = 6,933^\circ$) за счет звена чистого запаздывания для ПДММ с каноническим распределением мод Баттерворта практически не меняет времени переходного процесса, но сильно увеличивает перерегулирование; для ПДММ с модифицированным распределением мод Баттерворта практически не меняет времени переходного процесса и перерегулирования. Таким образом, это значение $\Delta\Delta\varphi = 0,12 \text{ рад}$ для модифицированного распределения мод Баттерворта можно принять как допустимое при учете фактора канальной среды при синтезе системы дистанционного управления.

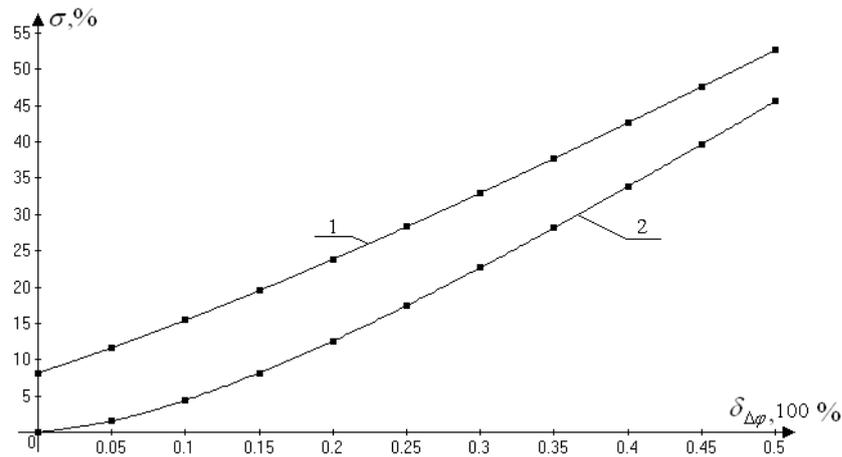


Рис. 2. Зависимости перегулирования σ от относительной величины уменьшения запаса устойчивости $\delta_{\Delta\varphi}$: 1 – для полинома Баттерворта, 2 – для модифицированного полинома Баттерворта

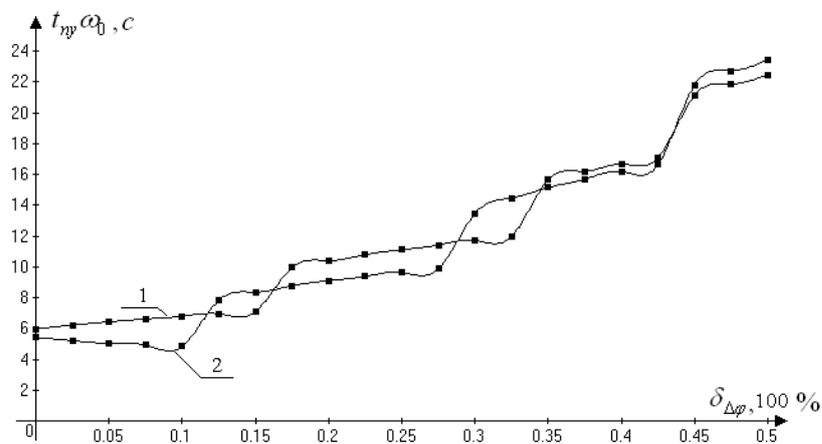


Рис. 3. Зависимости времени переходного процесса $t_{ny}\omega_0$ от относительной величины уменьшения запаса устойчивости $\delta_{\Delta\varphi}$: 1 – для полинома Баттерворта, 2 – для модифицированного полинома Баттерворта

Если величину $\Delta\Delta\varphi$ связать с длительностью бита Δt , числом разрядов кода n_p , характеристической частотой ω_0 используемого при синтезе распределения мод, а также коэффициентом γ связи частоты среза ω_c и ω_0 ПДММ, то получим

$$\Delta\Delta\varphi = 4n_p\Delta t\omega_0\gamma = 0,12. \quad (10)$$

Если при фиксированном значении параметра Δt предоставленной канальной среды разрешить выражение (10) относительно характеристической частоты ω_0 , то полученное значение $\omega_0 = \Delta\Delta\varphi(4n_p\Delta t\gamma)^{-1}$ следует использовать при формировании непрерывной модальной модели.

Если при заданном значении характеристической частоты ω_0 разрешить выражение (10) относительно параметра Δt канальной среды, то полученное значение $\Delta t = \Delta\Delta\varphi(4n_p\omega_0\gamma)^{-1}$ следует учитывать при выборе канальной среды для организации дистанционного управления.

Проведенные исследования позволяют построить алгоритм синтеза системы дистанционного непрерывного модального управления непрерывным техническим объектом на основе формирования требований к характеристической частоте ω_0 и параметрам канальной среды.

Алгоритм

1 По техническим требованиям к системе дистанционного управления непрерывным техническим объектом с учетом фактора канала связи предоставленного телемеханического протокола:

1.1 задать длительность Δt элементарного сигнала (бита) используемых в канальной среде двоичных кодов на основе пропускной способности предоставляемого телемеханического протокола (ТМП) в силу соотношения: $\Delta t = (c)^{-1}$, где c – пропускная способность канала ТМП;

1.2 охарактеризовать аппаратные средства кодовых преобразований при формировании сигнала управления, передаваемого по прямому каналу связи, и сигнала измерения выхода объекта, передаваемого по обратному каналу связи, величиной n_p – числом разрядов ЦАП, АЦП параллельного и последовательного кодов.

2 Сформировать требования к показателям качества в форме величин перерегулирования σ и времени переходного процесса t_{II} системы дистанционного управления непрерывным техническим объектом в переходном и установившемся режимах ее функционирования.

3 Сформировать (A, B, C) -представление дистанционно управляемого технического объекта.

4 Выбрать полиномиальную динамическую модель желаемого поведения «вход–выход» проектируемой системы.

5 Просинтезировать систему без учета фактора задержки в канальной среде.

6 Оценить значения частоты среза ω_{cp} и запаса устойчивости по фазе $\Delta\phi$ просинтезированной системы.

7 Ввести допустимое значение $\Delta\phi$ уменьшения запаса устойчивости по фазе на основе допустимого уровня изменения динамических показателей системы в виде величин перерегулирования σ и времени переходного процесса t_{ny} , обратив основное внимание на величину перерегулирования.

8 Осуществить переоценку:

8.1 значений характеристической частоты ω_0 при допустимом изменении запаса устойчивости при фиксированных значениях канальной среды (Δt);

8.2 параметров канальной среды при фиксированных параметрах модальной модели в форме значения характеристической частоты ω_0 на основании допустимого изменения запаса устойчивости.

9 По результатам пункта 8 просинтезировать систему по схеме пункта 5.

10 Провести комплексное исследование системы в программной оболочке Matlab 6.5 (Simulink).

Заключение

В статье использован подход, опирающийся на концепцию «черного ящика», вносящего чистое запаздывание и, как следствие, уменьшение запаса устойчивости по фазе $\Delta\phi$ при непрерывном модельном представлении канальной среды. Подход позволил предложить алгоритм синтеза системы дистанционного управления непрерывным объектом на основе непрерывных модельных представлений с помощью канонических и

модифицированных полиномиальных динамических модальных моделей (ПДММ) методом модального управления на основе формирования требований к характеристической частоте ω_0 путем оценки величины $\Delta\varphi$, не приводящей к нежелательному изменению динамических показателей системы. Одновременно подход позволяет сформулировать требования к параметрам канальной среды в форме величины Δt – длительности бита при выборе канала связи.

Литература

1. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – СПб: Изд-во «Профессия», 2003.
2. Ирвин Дж., Харль Д. Передача данных в сетях: инженерный подход. – Пер. с англ. – СПб: БХВ – Петербург, 2003.
3. Боженкова Н.Ю., Осипцева О.С., Ушаков А.В. Фактор канальной среды в задаче синтеза цифрового дистанционного управления непрерывным объектом // Изв.вузов. Приборостроение. – 2008. – Т.51. – №3.
4. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ / В.В. Григорьев, В.Н. Дроздов, В.В. Лаврентьев, А.В. Ушаков. – Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1983.

Боженкова Надежда Юрьевна

— Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, nyb9@yandex.ru

Осипцева Ольга Святославовна

— Компания Siemens, ведущий специалист, belcka@gmail.ru

Ушаков Анатолий Владимирович

— Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, доктор технических наук, профессор, ushakov-avg@yandex.ru

УДК 62.50

КОНТРОЛЬ ВЫРОЖДЕНИЯ СЛОЖНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ СОЗИДАТЕЛЬНОГО ТИПА С АНТРОПОКОМПОНЕНТАМИ

Н.А. Дударенко, М.В. Полякова, А.В. Ушаков

Рассматривается проблема контроля вырождения сложных динамических систем созидательного типа с антропокомпонентами. Для количественной оценки вырождения используются функционалы вырождения, конструируемые на спектре сингулярных чисел критериальной матрицы системы. Примером такой системы может быть любой функциональный или творческий коллектив: экипаж космического аппарата, персонал исследовательской лаборатории и т.д.

Ключевые слова: вырождение, контроль, сложная система, антропокомпонент, состязательный тип

Введение

Динамическая система с антропокомпонентами созидательного типа представляет собой контингент из n членов, каждый из которых несет конкретную функциональную нагрузку, вычлененную из общей задачи. Каждый из представителей коллектива функционирует с персональными параметрами передаточной функции (полосой пропускания, моторного запаздывания и т.д.) при определенным образом распределенной нагрузке. В случае неравномерно распределенной среди антропокомпонентов нагрузки может про-

изойти сбой в нормальном функционировании коллектива. В этой связи встает задача разработки технологии контроля возможного вырождения динамической системы созидательного типа, в состав которой входят антропокомпоненты, с целью предупреждения вырождения динамической системы и сохранения ее работоспособности.

В работе разработан инструментарий для контроля вырождения, базирующийся на функционале вырождения.

Сложная динамическая система созидательного типа с антропокомпонентами математически может быть представлена как линейный оператор, отображающий пространство целевых намерений в пространство осуществляемых реализаций. Задача решается в предположении, что размерности этих пространств согласованы и являются равными. В математической постановке линейный оператор становится вырожденным [1], если размерности указанных пространств оказываются несогласованными или его ранг становится равным меньшей из размерностей пространств. Причин вырождения может быть достаточно много. Система может вырождаться, когда из ее состава выпадает некоторый функциональный элемент. Как следствие, сокращается размерность пространства осуществляемых реализаций. Причины вырождения могут носить организационный характер, когда формируемые целевые намерения неудачно распределяются по входам сложной динамической системы. Вырождаться могут системы по причине параметрической природы, когда неудачно организованы связи между каналами системы, неудачно назначены по знаку и величине коэффициенты передачи этих связей или неудачно сформированы полосы пропускания каналов.

В статье рассматривается проблема контроля вырождения сложных динамических систем созидательного типа с антропокомпонентами параметризованных временем.

Для количественной оценки вырождения используются функционалы вырождения, конструируемые на спектре сингулярных чисел критериальной матрицы системы. В данной статье рассматривается случай динамических систем с антропокомпонентами созидательного типа, которые характеризуются тем, что антропокомпоненты задействованы в технологическом процессе, целью которого является достижение наилучшего совокупного эффекта при устремлении к общей цели. Примером такой системы может быть любой функциональный или творческий коллектив: экипаж космического аппарата, группа исследовательской лаборатории и т.д.

Постановка задачи контроля вырождения сложных динамических систем

Пусть задача управления сложной динамической системой созидательного типа с антропокомпонентами, представляющей собой контингент из n членов, сведена к линейной алгебраической задаче (ЛАЗ) вида

$$\eta(w) = N(w, \theta)\chi(w), \quad (1)$$

где $N(w, \theta)$ – $p \times p$ -матрица для любых w, θ ; $\eta(w), \chi(w)$ – p -мерные векторы; θ – p -мерный параметр, изменяющий алгебраические свойства матрицы N . Будем рассматривать ЛАЗ (1) как инструментальную модель контроля вырождения на спектре сингулярных чисел, порождаемых ими чисел обусловленности или функционалов вырождения. Степень близости матрицы N к ее вырождению может быть оценена с помощью глобального числа обусловленности $C\{N\}$ этой матрицы, при этом решение задачи заметно обогатится, если, помимо глобального числа обусловленности $C\{N\}$, контролируются ее числа обусловленности $C_j\{N\}$, определяемые на спектре сингулярных чисел матрицы N с помощью соотношения

$$C\{N\} = \alpha_M\{N\}\alpha_m^{-1}\{N\}, \quad C_v\{N\} = \alpha_M\{N\}\alpha_{v+1}^{-1}\{N\}, \quad (2)$$

где $\alpha_M \{N\} = \alpha_1 \{N\}$, $\alpha_m \{N\} = \alpha_p \{N\}$, $\alpha_{v+1} \{N\}$, $v = \overline{0, p-1}$ – соответственно максимальное, минимальное и v -ое сингулярные числа матрицы N , вычисляемые в силу соотношения

$$\alpha_j = |\mu_j^{1/2}|, \mu_j: \det(\mu I - N^T N) = 0. \quad (3)$$

Если воспользоваться сингулярным разложением матрицы (SVD-процедурой) [3, 4], то матрица N запишется в виде

$$N = U_N \Sigma_N V_N^T, \quad (4)$$

где $\Sigma_N = \text{diag}\{\alpha_j; j = \overline{1, p}\}$ – матрица с сингулярными числами на главной диагонали, построенная по правилу убывания их значений с ростом индекса j , U_N и V_N – матрицы соответственно левого и правого сингулярных базисов [3, 4], для которых выполняется соотношение

$$N V_{Nj} = \alpha_j U_{Nj}, \quad j = \overline{1, p}. \quad (5)$$

Векторно-матричное соотношение (5) придает исходной линейной алгебраической задаче (1) геометрическую интерпретацию, которая состоит в том, что вектор $\chi = V_{Nj}$ ($j = \overline{1, p}$) отражается в подпространство, натянутое на j -ый элемент U_{Nj} левого сингулярного базиса U_N так, что соответствующий ему вектор имеет норму, равную α_j . Таким образом, единичная сфера в пространстве, натянутом на векторы χ , отображается в эллипсоид, натянутый на левый сингулярный базис с размерами полуосей, совпадающих с сингулярными числами матрицы N .

Вырождение матрицы N в смысле достижения бесконечности ее числа обусловленности, записанного в форме (2), означает «сплющивание» этого эллипсоида вдоль его p -той полуоси, т.е. вдоль p -того левого сингулярного вектора U_{Np} . Нетрудно видеть, что, если параметр θ модифицирует матрицу $N(\theta)$ таким образом, что последовательно, начиная с α_p принимают нулевые значения остальные $p-1$ сингулярных чисел, кроме α_1 , то в пространстве, натянутом на левый сингулярный базис, будет наблюдаться последовательное «сплющивание» эллипсоида вдоль векторов U_{Np} , U_{Np-1}, \dots, U_{N2} . В итоге сфера отобразится в эллипсоид единичной размерности, т.е. в отрезок прямой. Система оказывается на границе глобального вырождения. В том случае, когда все сингулярные числа становятся нулевыми, констатируется глобальное вырождение линейной алгебраической задачи, которое характеризуется тем, что сфера отображается в точку.

Спектр сингулярных чисел и сконструированные на нем числа обусловленности матрицы N указывают механизм численного контроля процесса вырождения [2] при вариации параметра θ с помощью контроля сепаратных чисел обусловленности, последовательно устремляющихся к бесконечным значениям. Задача заметно упрощается, если матрица $N(w, \theta)$ представима в одной из следующих форм:

$$N(w, \theta) = N(\theta)R(w, \theta), \quad N(w, \theta) = Q(w, \theta)N(\theta), \quad (6)$$

где $R(w, \theta)$ и $Q(w, \theta)$ – ортогональные матрицы, которые не меняют спектра сингулярных чисел [3, 4], так что спектр сингулярных чисел матрицы $N(w, \theta)$ равен спектру сингулярных чисел $N(\theta)$.

Число обусловленности в силу определения численно [3, 4] удовлетворяет неравенствам $1 \leq C\{N\} < \infty$, где левое условие неравенства соответствует случаю хорошей обусловленности матрицы N , а правое – плохой. Контроль близости числа обусловленности матрицы к бесконечности весьма затруднителен. В этой связи вместо числа

обусловленности для оценки вырождения предлагается использовать функционалы вырождения J_{Dv} , задаваемые соотношением

$$J_{Dv} = C_v^{-1}\{N\}. \quad (7)$$

По свойству чисел обусловленности функционал вырождения удовлетворяет неравенствам

$$0 \leq J_{Dv} = C_v^{-1}\{N\} \leq 1. \quad (8)$$

Таким образом, процесс вырождения алгебраической задачи можно отслеживать по последовательному обнулению функционалов вырождения J_{Dv} .

Конструирование критериальных матриц

Поставим задачу приведения описания процессов в сложных динамических системах к виду (1) с последующим применением к ней предложенной схемы контроля вырождения. Сведение задачи управления к параметрической линейной алгебраической задаче проиллюстрируем на примере непрерывной многомерной системы:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t); \quad x(0); \quad y(t) = Cx(t), \quad (9)$$

где x, g, y – векторы состояния, задающего воздействия и выхода соответственно:

$x \in R^n, g, y \in R^m, F, G, C$ – матрицы состояния системы, входа и выхода объекта управления (ОУ), согласованные по размерности с размерностью векторов x, g, y так, что $F \in R^{n \times n}, G, C^T \in R^{n \times m}$. Задачу будем решать в предположении, что задающее воздействие $g(t)$ имеет конечномерное представление, задаваемое в форме

$$\dot{z}(t) = Ez(t); \quad z(0); \quad g(t) = Pz(t), \quad (10)$$

где $z \in R^l, E \in R^{l \times l}; P \in R^{m \times l}; z$ – вектор состояния модели задающего воздействия (МЗВ), E, P – матрицы состояния и выхода МЗВ соответственно, причем матрица P удовлетворяет условию: $P \cdot P^T = I$, где I – единичная матрица размерности $m \times m$. МЗВ выбирается минимальной размерности, но такой, чтобы ее выход

$$g(t) = Pz(t), \quad \text{где } z(t) = e^{Et}z(0), \quad (11)$$

на множестве начальных состояний $z(0)$ адекватно представлял весь класс конечномерных задающих воздействий системы (9). Решение системы (9) для переменных состояния $x(t)$ и выхода $y(t)$ для случая задающего воздействия $g(t)$ вида (11) может быть записано в форме

$$x(t) = e^{Ft}x(0) + [Te^{Et} - e^{Ft}T]z(0), \quad (12)$$

$$y(t) = Ce^{Ft}x(0) + C[Te^{Et} - e^{Ft}T]z(0), \quad (13)$$

где матрица T ищется из решения матричного уравнения Сильвестра [3, 4]

$$TE - FT = GP. \quad (14)$$

Ограничимся в решениях (12) и (13) вынужденными составляющими движения, которые имеют представления

$$x(t) = [Te^{Et} - e^{Ft}T]z(0), \quad (15)$$

$$y(t) = C[Te^{Et} - e^{Ft}T]z(0). \quad (16)$$

Матрица T решения уравнения Сильвестра (14) представляет собой матрицу подобия (в общем случае особого), которое связывает установившуюся составляющую вектора $x(t)$ и вектора $z(t)$ векторно-матричным соотношением

$$x(t) = Tz(t). \quad (17)$$

Это становится понятным, если учесть, что соотношение (15) в установившемся режиме в случае гурвицевости матрицы F принимает вид $x(t) = Te^{Et}z(0)$, и сравнить

полученный результат с выражением (11). Нетрудно видеть, что (15), (16) сводят задачу исследования процессов управления к линейной алгебраической задаче (1), где вектор $\eta(w)$ принимает смысл векторов $x(t)$ и $y(t)$, матрица $N(w, \theta)$ принимает смысл матриц

$$N_x(t) = [Te^{Et} - e^{Ft}T] \text{ и } N_y(t) = C[Te^{Et} - e^{Ft}T], \quad (18)$$

в которых вектор $\chi(w)$ принимает смысл вектора $z(0)$, переменная w является непрерывным временем t , а параметр θ , осуществляющий модификацию матрицы N , задается композицией параметров матриц E и F . Базовой в решении задач контроля вырождения является вторая из матриц (18), так как вырождение есть характеристика «вход-выходных» отношений.

Основной результат.

Алгоритм контроля вырождения сложной динамической системы

Сведение задачи управления сложной динамической системой (9) к линейной алгебраической задаче (1) в формах (15) и (16) с критериальными матрицами вида (18) позволяет конструировать оценки возможного вырождения в форме функций времени или модельного представления потока обрабатываемых заявок в классе конечномерных функциональных представлений. Специфика параметризации задачи временем состоит в оценке отрезка времени, на протяжении которого сложная система не вырождается, т.е. в контроле выполнения неравенства $t_D \geq t_{DR}$, где t_D , t_{DR} – соответственно реальное и допустимое (требуемое) времена наступления (фиксации факта) вырождения. Контроль указанного неравенства производится по моменту нарушения неравенства $J_D(t) \leq J_{DR}$, где $J_D(t)$, J_{DR} – соответственно реальное и допустимое значения функционала вырождения.

Алгоритм

1. Задать $\{F, G, C\}$ -представление многоканальной сложной системы с антропокомпонентами в своем составе, обрабатывающей входную векторную заявку, сформированную ИЗВ.
2. Задать $\{E, P, z(0)\}$ -представление конечномерной модели источника задающего воздействия (ИЗВ), формирующего на своем выходе обрабатываемую динамической системой заявку.
3. Задать допустимое значение J_{DR} функционала вырождения J_D .
4. Задать допустимое время наступления (фиксации факта) вырождения t_{DR} .
5. Сформировать динамическую критериальную матрицу динамической системы в форме (18). Провести эксперимент в оболочке Matlab по фиксации реального времени t_D наступления вырождения в форме нарушения неравенства $J_D(t) \leq J_{DR}$.
6. В случае нарушения неравенства $t_D \geq t_{DR}$ осуществить переход к п. 1 алгоритма с целью изменения параметров системы (модификация матрицы входа G для перераспределения потока заявок по сепаратным входам, модификация матрицы состояния F путем введения необходимых перекрестных связей и дублирования и т.д.), в случае выполнения неравенства $t_D \geq t_{DR}$ – переход к п. 7 алгоритма.
7. Фиксация результата, выход из алгоритма.

Пример использования предложенного алгоритма

Проиллюстрируем компоненты алгоритма на примере сложной системы с антропокомпонентами, когда контингент антропокомпонентов представлен двумя сотрудниками, вмонтированными в технологический процесс таким образом, что обрабатывае-

мые ими технические компоненты должны поступать на финальный этап формирования готового изделия синхронно. Предполагается, что два антропокомпонента работают на достижение общей цели без руководящего звена, самостоятельно, независимо друг от друга и, следовательно, не имеют перекрестных связей. Таким образом, ставится задача контроля возможного вырождения коллектива, порождаемая различными персональными свойствами участников, влияющими на достижение общей цели, которые представлены в передаточной функции антропокомпонента коэффициентами.

Остановимся на выполнении только п.1 алгоритма в связи с трудностями математического описания антропокомпонентов в форме векторно-матричной модели. Библиография по данному вопросу достаточно скудна [5]. Проведенный библиографический анализ ситуации позволил выделить два варианта наиболее употребляемых передаточных функций антропокомпонентов (обобщенных операторов).

В первом варианте антропокомпонент – обобщенный оператор описывается передаточной функцией

$$W_{AK}(s) = \frac{K(T_1s + 1)}{(T_2s + 1)(T_3s + 1)} e^{-\tau s}, \quad (19)$$

где K – коэффициент преобразования входной заявки в конкретное действие; T_1 – постоянная времени способности упреждения (экстраполирования) развития процесса; T_2 – постоянная времени процесса восприятия информации, вызванная несовершенством ее представления и индивидуальной способностью адаптации оператора к данному способу ее представления; T_3 – постоянная времени естественной задержки реакции оператора, вызванная динамикой нервно-мышечного механизма; τ – величина чистого запаздывания, определяемая тренированностью оператора.

Во втором варианте, который характерен для случая непрерывно изменяющихся входных потоков, возникает интегрирующее звено, отражающее свойство целостности восприятия ситуации (информации о потоке), и передаточная функция антропокомпонента как обобщенного оператора имеет вид

$$W_{AK}(s) = \frac{K(T_1s + 1)}{(T_2s + 1)s} e^{-\tau s}. \quad (20)$$

Постоянные времени передаточных функций (19), (20) имеют следующий порядок величин: $\tau = 0,1-0,3$ с, $T_1 = 1,6-2,0$ с, $T_2 = 15-25$ с, $T_3 = 0,05-0,15$ с.

Построим $\{F, G, C\}$ -представление системы, состоящей из двух антропокомпонентов – обобщенных операторов, формируемое на основе передаточных функций вида (19):

$$W_{AK1}(s) = \frac{K_1(T_{11}s + 1)}{(T_{21}s + 1)(T_{31}s + 1)} e^{-\tau_1 s}; \quad W_{AK2}(s) = \frac{K_2(T_{12}s + 1)}{(T_{22}s + 1)(T_{32}s + 1)} e^{-\tau_2 s}.$$

Тогда, следуя методике построения моделей «вход–состояние–выход», на основе передаточной функции «вход – выход» для матричных компонентов $\{F, G, C\}$ получим:

$$F = \begin{bmatrix} -T_{31}^{-1} & T_{31}^{-1}(1 - T_{21}^{-1}T_{11}) & 0 & 0 \\ 0 & -T_{21}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -T_{32}^{-1} & T_{32}^{-1}(1 - T_{22}^{-1}T_{12}) \\ 0 & 0 & 0 & -T_{22}^{-1} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_1 T_{21}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & K_2 T_{22}^{-1} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Заключение

Дальнейшее направление работы авторы связывают с формированием критериев оценки степени различия функциональных возможностей антропокомпонентов, гарантирующей работоспособность системы максимальной продолжительности. На основании этих критериев могут быть сформированы системные контингенты, что позволит предупредить возможность и упростить контроль вырождения в коллективах созидательного типа, в состав которых входят антропокомпоненты.

Литература

1. Математический энциклопедический словарь / Под ред. Ю.В. Прохорова. – М.: Советская энциклопедия, 1988.
2. Дударенко Н.А., Ушаков А.В. Технология контроля вырождения сложных динамических систем с помощью частотных сепаратных чисел обусловленности // Современные технологии: Сборник статей / Под ред. С.А. Козлова. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2003. – 298 с.
3. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984.
4. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления / Пер. с англ. – М.: Мир, 1999.
5. Ту Ю.Т. Современная теория управления / Пер. с англ. – М.: Машиностроение, 1971.

Дударенко Наталия Александровна

— Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, доцент, dudarenko@eyandex.ru

Полякова Майя Вячеславовна

— Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, l2noch@mail.ru

Ушаков Анатолий Владимирович

— Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, доктор технических наук, профессор, ushakov-avg@yandex.ru

УДК 62.50

СИНТЕЗ ДВУХКАНАЛЬНОЙ ОПТОЭЛЕКТРОННОЙ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕРВАЛЬНЫХ МОДЕЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

А.Ю. Цвентарный, А.В. Ушаков

Ставится и решается задача синтеза двухканальной оптоэлектронной измерительной системы с использованием интервальных модельных представлений. Для синтеза используется компенсационно-модальный метод, учитывающий фактор наличия единичной отрицательной обратной связи по выходу в структуре исходного динамического объекта.

Ключевые слова: оптоэлектронный, следящая система, интервальные параметры, компенсационно-модальный метод.

Введение

В настоящее время задача контроля (измерения) линейных и угловых перемещений элементов больших пространственных конструкций (радиотелескопы, мачты радиорелейной и мобильной связи) решается двумя способами. Первый способ состоит в

непосредственном преобразовании измеряемого перемещения в электрический сигнал аналогового или цифрового вида. Этот способ приемлем для случаев, характеризующихся незначительными угловыми и линейными перемещениями контролируемых элементов. Второй способ строится на принципе следящего преобразования и характеризуется практически неограниченным перемещением контролируемых элементов. Если требуется обеспечить бесконтактность измерения, то как первый, так и второй способы строятся с использованием информационных возможностей оптической среды.

В статье рассматриваются проблемы синтеза двухканальной оптоэлектронной измерительной системы, которая реализует принцип следящего преобразования на примере контроля деформации элементов металлоконструкции больших радиотелескопов (РТ) с диаметром раскрытия главного рефлектора (ГР) 32 и 64 метра. Так как большие РТ, в отличие от оптических телескопов, не покрываются защитным колпаком, то они функционируют в условиях воздействия на их конструкцию следующих деформирующих факторов: весовых (при угломестном повороте РТ); ветровых (в силу высокой парусности ГР); температурных градиентов и остужающего действия ветра (в силу большой площади поверхности металлоконструкции РТ); ускорения, развиваемого силовыми приводами РТ. Режим работы РТ и аппаратуры контроля деформаций его элементов – всепогодный и всесезонный с большим перепадом температур и влажности. Поэтому все перечисленное выше при построении модельных представлений оптоэлектронных измерительных систем приводит к необходимости использовать их интервальную версию.

Рассматриваемая в статье задача решается на примере двухканальной оптоэлектронной следящей системы (ОЭСС) для контроля угловых деформаций верхнего опорного узла (ВОУ) РТ, несущего на себе контррефлектор. При построении интервальных модельных представлений учитываются интервальность перекрестных связей между каналами двухканальной ОЭСС и коэффициента вязкого трения редуктора исполнительного привода (ИП).

Типовая структура двухканальной оптоэлектронной измерительной системы

Оптоэлектронная следящая система контроля угловых деформаций (ОЭССКУД) ВОУ РТ представляет собой функциональное объединение оптико-механических, оптических, оптоэлектронных, электронных, электро-механических и механических компонентов [1]. Указанный состав компонентов продиктован спецификой организации измерительного процесса, использующего принцип двухканального следящего преобразования угловой деформации ВОУ в угол поворота преобразователя вал-код, ось которого кинематически связана с помощью безлюфтового редуктора с приводом оптического компенсатора (КО). В соответствии с этим принципом ОЭССКУД ВОУ РТ строится таким образом, что измерения угловых деформаций ВОУ сводятся к измерению текущего углового положения установочной базы ВОУ относительно «квазинеподвижного» в пространстве луча газового лазера (ЛГ), размещаемого в окрестности физической вершины ГР на оптическом столе.

На рис. 1 показано соединение элементов ОЭССКУД в функциональном взаимодействии. Схема содержит оптические, механические и электрические связи. Векторным входным воздействием ОЭССКУД является угловое положение ВОУ РТ с планарными компонентами α и ψ относительно застabilизированного в пространстве выходного луча ЛГ. Выходным векторным сигналом системы с планарными компонентами α и ψ является вектор оценок угловых деформаций α и ψ .

На входной зрачок формирующей оптической системы (ФОС) специальным конструктивом устанавливается КО смещения ВОУ относительно оси OZ измерительной системы координат, задаваемой лучом ЛГ. Луч лазера через цепочку призм и входное окно вводится с выхода светоделительного устройства оптоэлектронной следящей сис-

темы стабилизации пространственного положения ЛГ. Далее луч с выхода КО направляется на вход длиннофокусной формирующей оптической системы, величина фокуса которой определяет достижимую погрешность измерения угловых деформаций ВОУ.

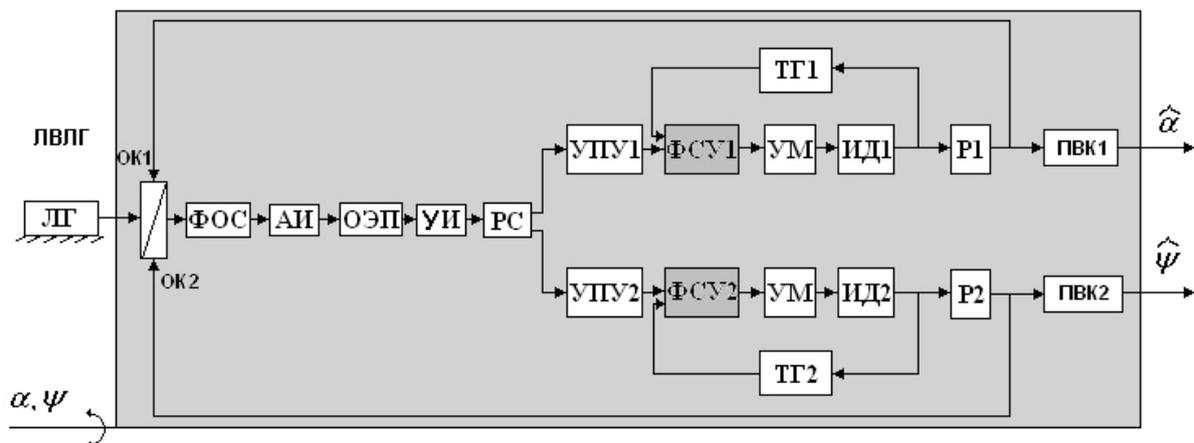


Рис. 1. Функциональная схема ОЭССКУД

Пройдя ФОС, луч лазера направляется на вход анализатора принятого изображения, смещенного в фокальной плоскости ФОС луча лазера под действием угловых деформаций ВОУ. Анализатор изображения (АИ) размещается в фокальной плоскости ФОС и решает задачу анализа изображения на предмет оценки его линейного смещения в фокальной плоскости по двум координатам. Луч (в некоторых случаях четыре луча) с выхода АИ поступает на вход оптико-электронного преобразователя (ОЭП) лучистой (световой) энергии в электрический аналог. С целью уменьшения уровня помех в электрическом тракте системы на непосредственном выходе ОЭП размещается плата предварительного усилителя сигнала, функционально входящего в ОЭП. Если АИ строится на основе четырехгранной оптической призмы, то в ОЭП сразу же формируется два видеосигнала, преобразуемые в составе ОЭП в электрические сигналы, являющиеся аналогами смещения пространственного луча лазера в каждой из плоскостей относительно его оптической оси, при этом знаки смещения луча определяют полярности или фазы электрических сигналов, формируемых ОЭП. Таким образом, функцию разделителя сигналов по каналным компонентам на оптическом уровне выполняет четырехгранная призма. Если АИ строится на основе полудискового модулятора (ПМ) светового пучка, то на выходе ОЭП формируется амплитудно-модулируемый сигнал, амплитуда которого определяется модулем вектора пространственного смещения луча ЛГ, частота – частотой вращения обтюратора (полудиска), а фаза – аргументом вектора смещения. В этой связи при использовании в качестве анализатора изображения ПМ на усилительно-преобразовательные устройства (УПУ) системы возлагается функция разделения амплитудно-модулированного сигнала, несущего информацию о векторе смещения луча ЛГ относительно оптической оси, на координатные (планарные) составляющие. Эта функция реализуется с помощью двух демодуляторов, опорные сигналы частоты вращения ПМ которых сдвинуты на 90° . Электрические аналоги величин смещения луча лазера, прошедшего через КО, формируемые с помощью каналных УПУ системы, подаются на формирователи сигналов управления (ФСУ), поступающие на входы усилителей мощности каналных исполнительных электроприводов. На входы каналных ФСУ подаются также сигналы отрицательной скоростной обратной связи, вырабатываемые тахогенераторами, агрегированными с исполнительными двигателями электропривода, таким образом, каналные ФСУ придают каналам ОЭССКУД требуемые динамические свойства в переходном и установившемся режимах. Сформированные сигналы управления, усиленные усилителями мощности, подаются на обмотки управления

исполнительных двигателей канальных электроприводов, которые преобразуют электрическую энергию в механическую энергию вращательного движения. Скорости вращательных движений роторов исполнительных двигателей при помощи механических редукторов понижаются до требуемой величины. Механический редуктор каждого канального исполнительного электропривода кинематически связывается с приводной частью каждого из каналов двухкоординатного оптико-механического компенсатора, тем самым осуществляя компенсацию отклонения входного луча ЛГ от оптической оси, образованной цепочкой ЛГ – КО – СДУ – ФОС, совмещая его с указанной оптической осью, где СДУ – светоделительное устройство. Для формирования оценок α и ψ угловых деформаций ВОУ входные оси механических редукторов оптических компенсаторов с помощью безлюфтовой кинематической передачи связываются с осями преобразователя вал–код, обеспечивая этим измерения угловых деформаций ВОУ α и ψ .

Описание функционирования ОЭССКУД ВОУ РТ, проведенное формирование ее компонентного состава, а также априорная оценка системных параметров функциональных компонентов ОЭССКУД позволяют констатировать, что система стабилизации, будучи двухканальной, характеризуется идентичностью исполнения ее каналов. Следует отметить, что использование в составе системы анализатора изображения в виде ПМ, разделителя векторного смещения изображения луча в фокальной плоскости анализатора на координатные компоненты на демодуляторах со смещенными на 90° опорными напряжениями, а также использование в цепи общего сигнала избирательных усилителей могут в силу совокупности факторов приводить к появлению антисимметричных перекрестных связей. Этими факторами являются:

- неточность привязки ПМ к системе координат компенсации смещения луча ЛГ, порожденная разворотом корпуса ПМ относительно его оси;
- нестабильность частоты вращения ПМ;
- нестабильность параметров избирательного усилителя, проявляющаяся в том, что его резонансная частота нестабильна;
- неконтролируемый набег фазы сигнала в тракте УПУ.

Кроме того, использование в ОЭССКУД унифицированного ИП при всесезонной эксплуатации системы приводит к значительным сезонным изменениям вязкости смазки его редуктора, которая, будучи приведенной к оси ИП, делает его функциональным компонентом с интервальными параметрами его модельного представления.

Таким образом, при использовании аппарата интервальных модельных представлений в работе основное внимание уделено:

- интервальному модельному описанию двухканального фотодатчика;
- интервальному модельному описанию исполнительного двигателя.

Приведение двухканальной системы к эквивалентной одноканальной

На рис. 2 представлена схема двухканальной ОЭССКУД с симметричными каналами измерения угловых деформаций и антисимметричными межканальными связями.

На рис. 2: $g_i, \varepsilon_i, \varepsilon_{\mu i}, u_{\varepsilon i}, v_i, u_i, u_{\omega i}, \omega_{\omega i}, \omega_{\omega i}, y_i, (i = 1, 2)$ – соответственно каналные составляющие углового смещения выходного луча ЛГ на его выходе; угловой ошибки его стабилизации относительно оптической оси ОЭССКУД; угловой ошибки в развернутой на угол μ системе координат; напряжения на выходе фотодатчика; напряжения на выходе фильтров демодуляторов; напряжения на входе усилителя мощности; напряжения на входе обмотки управления исполнительного двигателя; частоты вращения исполнительного двигателя; угловой скорости перемещения луча на выходе оптико-механического компенсатора; углового смещения луча ЛГ на выходе КО. На том же рисунке обозначены системные

параметры: μ , $K_{\Phi Di}$, $K_{умi}$, $K_{идi}$, K_{pi} , $T_{\Phi i}$, $T_{изni}$ ($i = 1, 2$) – угол разворота системы координат анализа изображения относительно системы координат смещения луча ЛГ, а также соответственно «канальные» значения коэффициентов передачи фотодатчика, усилителей мощности, исполнительного двигателя, полных редукций и постоянных времени фильтров и исполнительного электропривода.

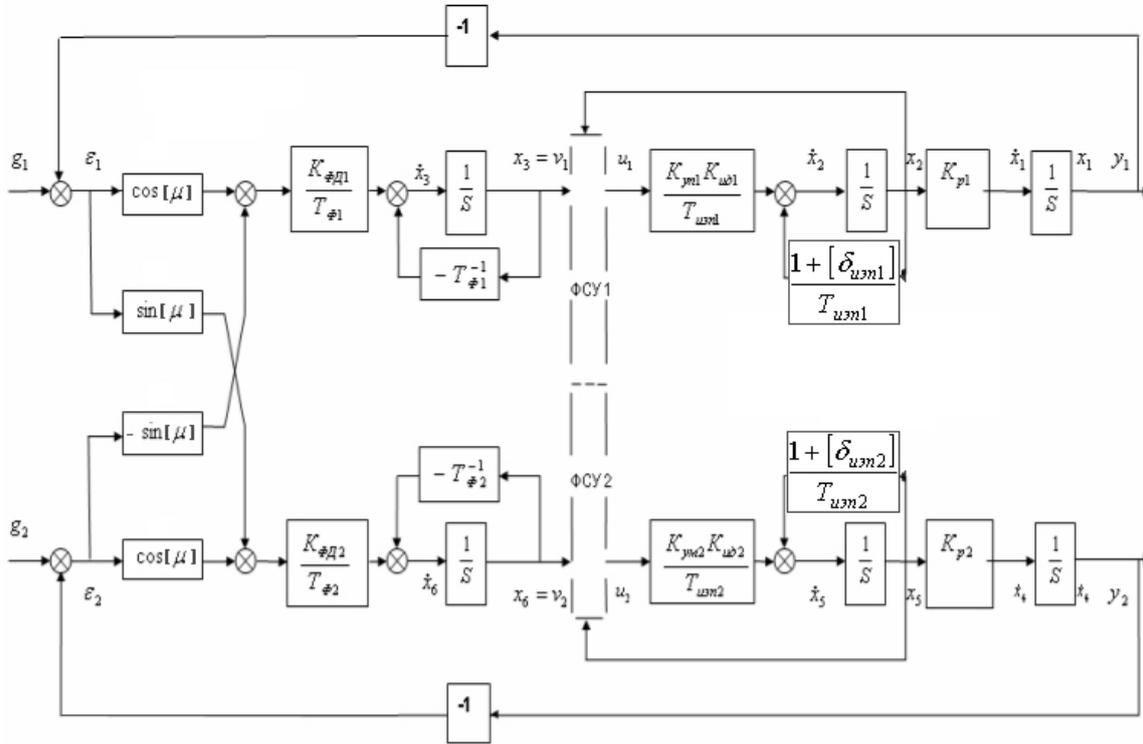


Рис. 2. Структурная схема двухканальной ОЭССКУД

Основными источниками интервальности параметров проектируемой системы являются:

- неточность первоначальной установки ПМ относительно осей отработки ОЭСС, а также ее возможная эксплуатационная девиация на интервальную угловую величину $[\mu] = \mu_0 + [\Delta\mu]$;
- коэффициент вязкого трения редуктора ИП, проявляющегося в интервальности сопрягающей частоты $\omega_{ип}$ ИП, имеющей представление $[\omega_{ип}] = \omega_{ип0} + [\Delta\omega_{ип0}]$, где $\omega_{ип0} = T_{ип}^{-1}$, $[\Delta\omega_{ип0}] = \omega_{ип0}[\delta_{вт}]$, $T_{ип}$ – номинальное (паспортное) значение постоянной времени привода; $\delta_{вт}$ – интервальное значение относительной вариации коэффициента вязкого трения привода.

Для решения задачи, вынесенной в название параграфа, будем рассматривать медианную версию системы в предположении, что ФСУ, просинтезированный с помощью компенсационно-модального принципа, известен, при этом каналы системы оказались идентичными. Структурная схема системы приведена на рис. 3.

На рис. 3 $W(s) = M(s)N^{-1}(s)$ есть передаточная функция прямой цепи «ошибка–выход» сепаратного канала спроектированной системы, где $M(s)$ – полином числителя $W(s)$ степени m , а $N(s)$ – полином ее знаменателя степени n , где $n > m$.

Рассмотрим влияние антисимметричных перекрестных связей между каналами на динамику системы на основании схемы на рис. 3. Для этого построим передаточную мат-

рицу $\Phi(s)$ отношения «вход–выход» $y(s) = \Phi(s)g(s)$, где $(*) (s) = L\{(*) (t)\}$ – преобразование Лапласа переменной $(*) (t)$, для которой, в силу структуры рис. 3, будем иметь:

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} 1 + W(s) \cos \mu & W(s) \sin \mu \\ -W(s) \sin \mu & 1 + W(s) \cos \mu \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} W(s) \cos \mu & W(s) \sin \mu \\ -W(s) \sin \mu & W(s) \cos \mu \end{bmatrix}.$$

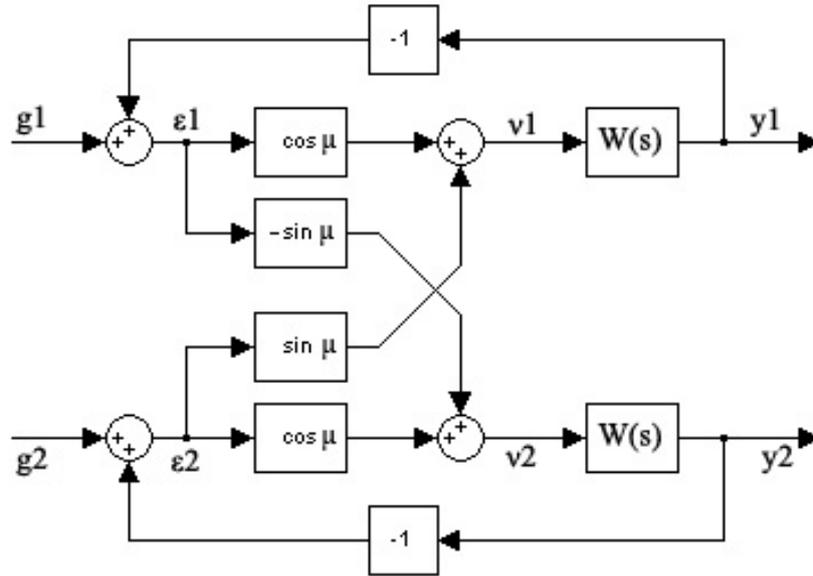


Рис. 3. Структурная схема преобразованной двухканальной ОЭСС

В силу правил обращения матриц полученное выражение можно привести к виду:

$$\Phi(s) = \frac{1}{1 + 2W(s) \cos \mu + W^2(s)} \Delta^T \left\{ \begin{bmatrix} 1 + W(s) \cos \mu & W(s) \sin \mu \\ -W(s) \sin \mu & 1 + W(s) \cos \mu \end{bmatrix} \right\} \times \begin{bmatrix} W(s) \cos \mu & W(s) \sin \mu \\ -W(s) \sin \mu & W(s) \cos \mu \end{bmatrix},$$

где $\Delta^T \{(\circ)\}$ – транспонированная союзная матрица матрицы $\{(\circ)\}$. Для получения выражения для характеристического полинома двухканальной системы запишем

$$1 + 2W(s) \cos \mu + W^2(s) = 1 + 2 \frac{M(s)}{N(s)} \cos \mu + \left(\frac{M(s)}{N(s)} \right)^2 = \frac{N^2(s) + 2M(s)N(s) \cos \mu + M^2(s)}{N^2(s)}.$$

Тогда для характеристического полинома $D(s, \mu)$ двухканальной системы с перекрестными антисимметричными связями получим

$$D(s, \mu) = N^2(s) + 2M(s)N(s) \cos \mu + M^2(s). \quad (1)$$

Соотношение (1) обнаруживает все очевидные трудности оценки влияния на динамику двухканальной системы с перекрестными связями этих перекрестных связей. Действительно, при $\mu = 0$

$$D(s, \mu = 0) = (N(s) + M(s))^2 = d(s)d(s), \quad (2)$$

где $d(s)$ – характеристический полином симметричных сепаратных каналов.

Покажем, что с помощью комплексификации векторных переменных двухканальной системы [2] можно построить эквивалентную ей систему типа «одномерный вход–одномерный выход», для чего сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 1. Двухканальная система (рис. 3) с симметричными каналами, каждый из которых характеризуется передаточной функцией $W(s)$, имеющая матрицу перекрестных связей $T = \text{col} \{[\cos \mu \quad \sin \mu], [-\sin \mu \quad \cos \mu]\}$, с помощью процедуры комплек-

сификации векторных переменных может быть приведена к скалярному случаю с эквивалентной передаточной функцией $W_3(s)$ прямой цепи, определяемой выражением

$$W_3(s) = e^{-j\mu}W(s). \quad (3)$$

Доказательство. Если воспользоваться рис. 3, то он позволяет связать вектор $y = [y_1 \ y_2]^T$ выхода двухканальной системы с вектором ошибки $\varepsilon = [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2]^T$ следующим соотношением:

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(s) & 0 \\ 0 & W(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \mu & \sin \mu \\ -\sin \mu & \cos \mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1(s) \\ \varepsilon_2(s) \end{bmatrix},$$

которое в покомпонентной форме записывается в виде

$$y_1(s) = W(s)(\cos \mu)\varepsilon_1(s) + W(s)(\sin \mu)\varepsilon_2(s); \quad (4)$$

$$y_2(s) = -W(s)(\sin \mu)\varepsilon_1(s) + W(s)(\cos \mu)\varepsilon_2(s). \quad (5)$$

Введем в рассмотрение комплексифицированные переменные двухканальной системы (рис. 3), задав их с помощью следующих соотношений:

$$\left. \begin{aligned} g^* &= g_1 + jg_2 \\ \varepsilon^* &= \varepsilon_1 + j\varepsilon_2 \\ y^* &= y_1 + jy_2 \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

Умножим соотношение (5) на j , в результате чего получим:

$$jy_2(s) = -W(s)(j \sin \mu)\varepsilon_1(s) + W(s)(\cos \mu)(j\varepsilon_2(s)). \quad (7)$$

Просуммировав выражения (4) и (7), получим

$$\begin{aligned} y^*(s) &= y_1(s) + jy_2(s) = W(s)(\cos \mu)\varepsilon_1(s) + W(s)(\sin \mu)\varepsilon_2(s) - \\ &- W(s)(j \sin \mu)\varepsilon_1(s) + W(s)(\cos \mu)(j\varepsilon_2(s)) = \\ &= W(s)(\cos \mu)\varepsilon_1(s) - W(s)(j \sin \mu)(j\varepsilon_2(s)) - W(s)(j \sin \mu)\varepsilon_1(s) + \\ &+ W(s)(\cos \mu)(j\varepsilon_2(s)) = \\ &= W(s)\{\cos \mu - j \sin \mu\}\varepsilon_1(s) + W(s)\{\cos \mu - j \sin \mu\}(j\varepsilon_2(s)) = \\ &= W(s)e^{-\mu}(\varepsilon_1(s) + j\varepsilon_2(s)) = e^{-\mu}W(s)\varepsilon^*(s) = W_3(s)\varepsilon^*(s). \end{aligned} \quad (8)$$

Доказанное утверждение делает справедливыми положения утверждения 2.

Утверждение 2. Двухканальная система (рис. 3) с симметричными каналами, каждый из которых характеризуется передаточной функцией $W(s)$, обладающей запасом устойчивости по фазе $\Delta\varphi$, имеющая матрицу перекрестных связей $T = \text{col}\{\cos \mu \ \sin \mu\} \begin{bmatrix} \cos \mu & \sin \mu \\ -\sin \mu & \cos \mu \end{bmatrix}$, оказывается на границе устойчивости, если $\mu = \Delta\varphi$, и становится неустойчивой, при $\mu > \Delta\varphi$.

Доказательство. Для доказательства справедливости утверждения необходимо применить критерий устойчивости Найквиста к системе типа «одномерный вход–одномерный выход» с передаточной функцией $W_3(s) = e^{-j\mu}W(s)$. ■

Примечание. Если величина μ оказывается интервальной, то в силу утверждения 2 при исследовании влияния $[\mu]$ на динамические свойства двухканальной системы достаточно ограничиться значением правой угловой реализации.

Синтез устройства формирования сигнала управления на основе компенсационно-модального метода

В основу компенсационно-модального метода синтеза сепаратного канала двухканальной ОЭСС закладывается желаемая полиномиальная динамическая модель

(ПДМ) «вход–выход» этого канала с передаточной функцией $\Phi(s, \omega_0)$, где ω_0 – характеристическая частота ПДМ, значение которой определяется требованиями к динамическим показателям системы в переходном и установившемся режимах для медианных значений параметров и требуемой величиной оценки относительной интервальности матричных компонентов спроектированной системы, а также передаточными функциями прямого канала, образованного исходными функциональными компонентами. Задача решается применительно к системе, характеризующейся исходной передаточной функцией прямого канала третьего порядка, медианная версия которого имеет представление

$$W_{\text{эг}}(s) = \frac{K_{\text{фд}} K_{\text{ум}} K_{\text{ип}}}{(T_{\text{ф}} s + 1)(T_{\text{ип0}} s + 1)s}. \quad (9)$$

Алгоритм компенсационно-модального метода синтеза сепаратного канала состоит из нижеследующих шагов.

1. Сформировать требования к характеристикам желаемой ПДМ «вход–выход» в классе канонических ПДМ [1], например,

$$\Phi = \frac{v_3 \omega_0^3}{s^3 + v_1 \omega_0 s^2 + v_2 \omega_0^2 s + v_3 \omega_0^3}, \quad (10)$$

для обеспечения показателей качества системы в переходном и установившемся режиме в форме требований:

- к дисперсиям ошибки D_{ε} и выхода D_y ;
- обеспечения требуемого значения оценки относительной интервальности матричных компонентов ИП системы.

2. С учетом наличия в составе исходного ОУ отрицательной единичной обратной связи по выходу осуществить формирование желаемой ПДМ «ошибка–выход» $W(s, \omega_0)$, на основе желаемой ПДМ отношения «вход–выход» $\Phi(s, \omega_0)$, согласно следующему выражению:

$$W(s, \omega_0) = \frac{\Phi(s, \omega_0)}{1 - \Phi(s, \omega_0)} = \frac{v_3 \omega_0^3}{(s^2 + v_1 \omega_0 s + v_2 \omega_0^2)s}. \quad (11)$$

3. Осуществить сравнительный анализ желаемой ПДМ отношения «ошибка–вход» $W(s, \omega_0)$ с исходной передаточной функцией $W_{\text{гс}}(s, \omega_0)$ на предмет возможного редуцирования желаемой модели, которое обнаруживает возможность перехода от модели $W(s, \omega_0)$ к модели $\tilde{W}(s, \omega_0)$ на единицу меньшей размерности, имеющей представление

$$\tilde{W}(s, \omega_0) = \frac{v_3 \omega_0^3}{s^2 + v_1 \omega_0 s + v_2 \omega_0^2}. \quad (12)$$

4. Модифицировать передаточную функцию $\tilde{W}(s, \omega_0)$ с целью ее возможного представления в форме

$$\tilde{W}(s, \omega_0) = W_{\text{ф}}(s, \omega_0, \omega_{\text{ф}}) W_{\text{ип}}(s, \omega_0),$$

где $W_{\text{ип}}(s, \omega_0)$ – желаемая передаточная функция ИП проектируемой ОЭССКУД; $W_{\text{ф}}(s, \omega_0, \omega_{\text{ф}})$ – передаточная функция фильтра-демодулятора расщепителя сигнала векторной ошибки по каналным компонентам с сопрягающей частотой $\omega_{\text{ф}}$, удовлетворяющей условию

$$\omega_0 = \min\{\omega_{0R}, \omega_{\text{ф}}\}, \quad (13)$$

где ω_{0R} – желаемая характеристическая частота, вычисленная в силу п. 1 настоящего алгоритма.

5. Ввести в желаемую ПДМ $\Phi(s, \omega_0)$ минимальные модификации, сформированные в п. 1, с тем, чтобы полином знаменателя передаточной функции $\tilde{W}(s, \omega_0)$ имел хотя бы один вещественный корень $s_1 = -\omega_\phi$.

6. В связи с модификацией модели построить аналитические выражения для дисперсии ошибки D_ϵ и выхода D_y $\Phi(s, \omega_0)$. Оценить величину ω_0 , гарантирующую требуемые дисперсии ошибки D_ϵ или выхода D_y .

7. Оценить величины дисперсий, полученных в п. 6.

8. Методами медианного модального управления осуществить синтез отрицательных скоростных обратных связей и формирование коэффициента усиления УМ с целью реализации желаемой передаточной функции $W_{\text{ип}}(s, \omega_0)$ с последующей оценкой значения оценки относительной интервальности матрицы состояния привода.

9. Провести исследования динамических свойств системы сепаратного канала в оболочке Matlab Simulink, характеризующейся передаточной функцией «вход–выход» $\Phi(s, \omega_0)$ в модифицированной версии.

Исследование двухканальной системы, сепаратные каналы которой просинтезированы в соответствии с предложенным алгоритмом, с учетом фактора межканальной связи в оболочке Matlab Simulink

Исследование проводится в соответствии со схемой, приведенной на рис. 3, где

$$W(s) = \frac{v_3 \omega_0^3}{s^2 + v_1 \omega_0 s + v_2 \omega_0^2} \cdot \frac{1}{s}.$$

Задачи исследования:

- установить степень влияния угла μ поворота системы координат, в которой осуществляется анализ принятого изображения, на устойчивость системы;
- установить необходимые значения ω_0 и ω_ϕ ;
- оценить влияние ω_0 на дисперсию D_ϵ и дисперсию выхода D_y .

В результате синтеза системы получены следующие значения компонентов передаточной функции $W(s, \omega_0)$:

$$v_1 = 3, \quad v_2 = 2, \quad v_3 = 1.$$

Расчетная характеристическая частота фильтра $\omega_\phi = 180 \text{ с}^{-1}$.

Определяется расчетное желаемое значение характеристической частоты ω_{0R} ПДМ через задание желаемой добротности системы D по скорости: $D = 58 \text{ с}^{-1}$, откуда, согласно выражению $\omega_{0R} = 2D$, находится $\omega_{0R} : \omega_{0R} = 116 \text{ с}^{-1}$. Согласно выражению (13), $\omega_0 = \min\{\omega_{0R}, \omega_\phi\} = \min\{116, 180\} = 116 \text{ с}^{-1}$. Схема моделирования исследуемой системы представлена на рис. 4.

Определим основные критерии качества рассматриваемой системы. Для этого рассмотрим ее переходный процесс при следующих значениях ее параметров: характеристическая частота $\omega_0 = 1$, медианное значений угла поворота системы $\mu = 0$. График переходного процесса системы представлен на рис. 5, а. По графику и с помощью математических функций пакета Matlab Simulink определим следующие показатели системы:

- время переходного процесса $t_{nn} = 8,5 \text{ с}$, откуда для любой ω_0 справедливо выра-

$$\text{жение } t_{nn}(\omega_{\forall 0}) = \frac{8,5}{\omega_{\forall 0}};$$

- перегуливание $\sigma = 15\%$, при этом σ не зависит от ω_0 ;
- частота среза $\omega_{cp} = 0,446 \text{ c}^{-1}$;
- из соотношения $\omega_{cp} = \gamma\omega_0$ $\gamma = \omega_{cp}\omega_0^{-1} = 0,446$;
- запас устойчивости по фазе $\delta = 53,4^\circ$, следовательно, максимальное значение интервального параметра $[\mu]$, при котором система будет находиться на границе устойчивости, равно $[\mu] = 53,4^\circ$.

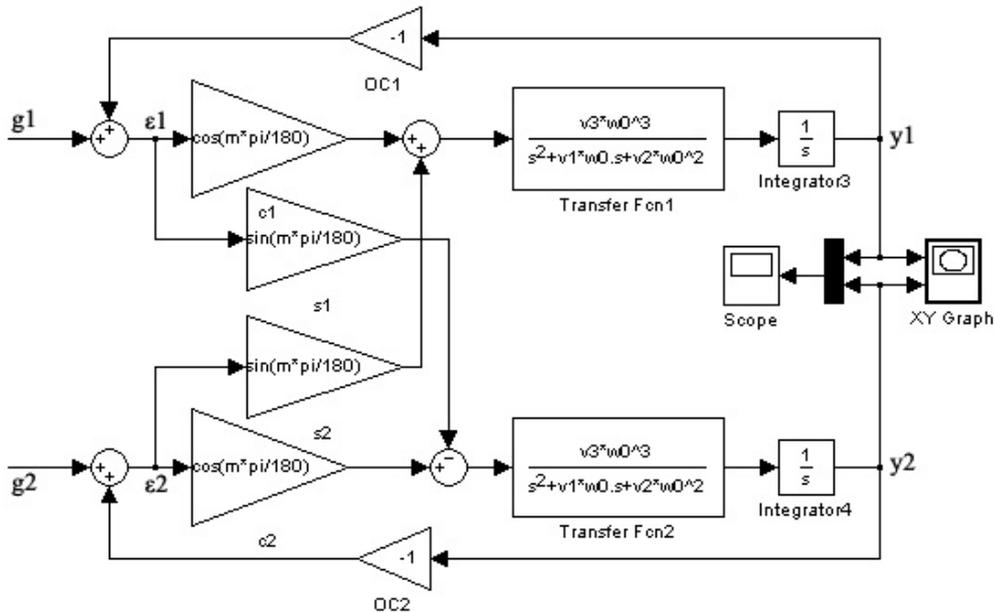


Рис. 4. Схема моделирования исследуемой системы

Для переходного процесса синтезированной системы, представленного на рис. 5, б, с характеристической частотой $\omega_0 = 116 \text{ c}^{-1}$ и $\mu = 0$ получим:

$$t_{nn} = \frac{8,5}{116} = 0,073 \text{ c}; \quad \omega_{cp} = \gamma\omega_0 = 51,74 \text{ c}^{-1}; \quad \sigma = 15\% = \text{const}; \quad \delta = 53,4^\circ = \text{const}.$$

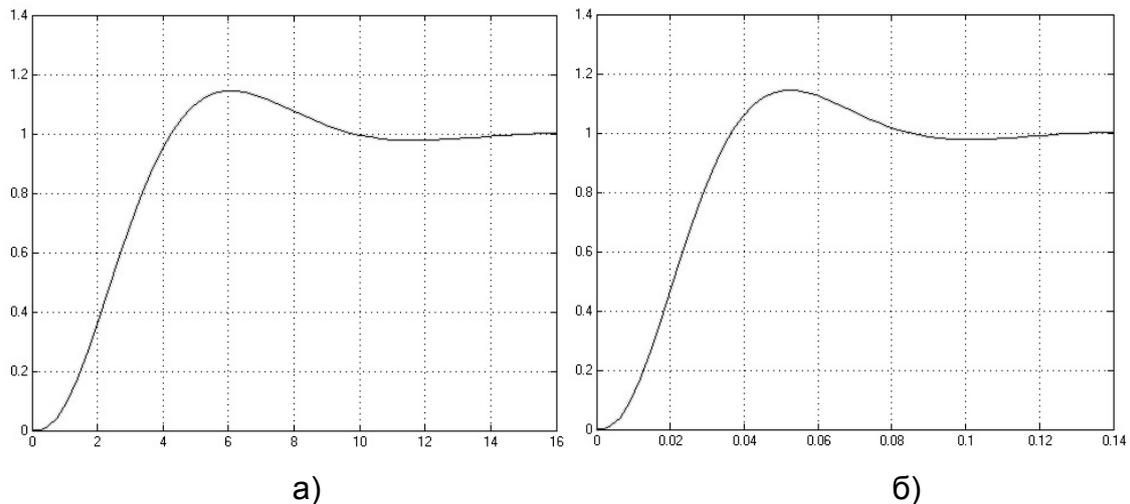


Рис. 5. Переходные процессы в системах с $\mu = 0$ и $\omega_0 = 1$ (а); $\omega_0 = 116$ (б)

Рассматривая динамические свойства системы с характеристической частотой $\omega_0 = 116$ и $\mu = 40^\circ$ в переходном процессе, график которого представлен на рис. 6, а, получим:

$$t_{nn} = \frac{8,5}{116} = 0,073 \text{ с}; \quad \omega_{cp} = \gamma\omega_0 = 51,74 \text{ с}^{-1}; \quad \sigma = 15\% = \text{const}; \quad \delta = 53,4^\circ = \text{const}.$$

Рассматривается система с углом поворота $\mu = 60^\circ > \delta$ и $\omega_0 = 116$, график переходного процесса которой приведен на рис. 6, б. Данная система является неустойчивой.

Рассматривается поведение исследуемой системы при входном воздействии типа «экспоненциально-коррелированный шум», представляемый воздействием типа «белый шум», и ФФ типа апериодическое звено первого порядка, модельно представляющий собой ветровое воздействие на ГР РТ. Так как модельное представление воздействия типа «белый шум» дискретно, необходимо перейти к дискретному представлению исследуемой системы, используя, например, встроенные функции пакета Matlab.

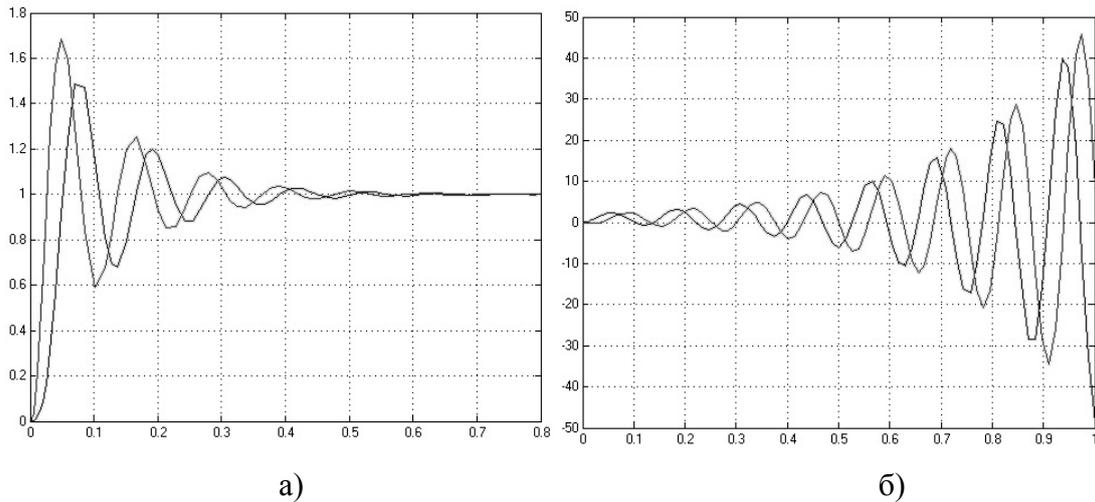


Рис. 6. Переходные процессы в системах: а – $\mu = 40^\circ$, $\omega_0 = 116$; б – $\mu = 60^\circ$, $\omega_0 = 116$

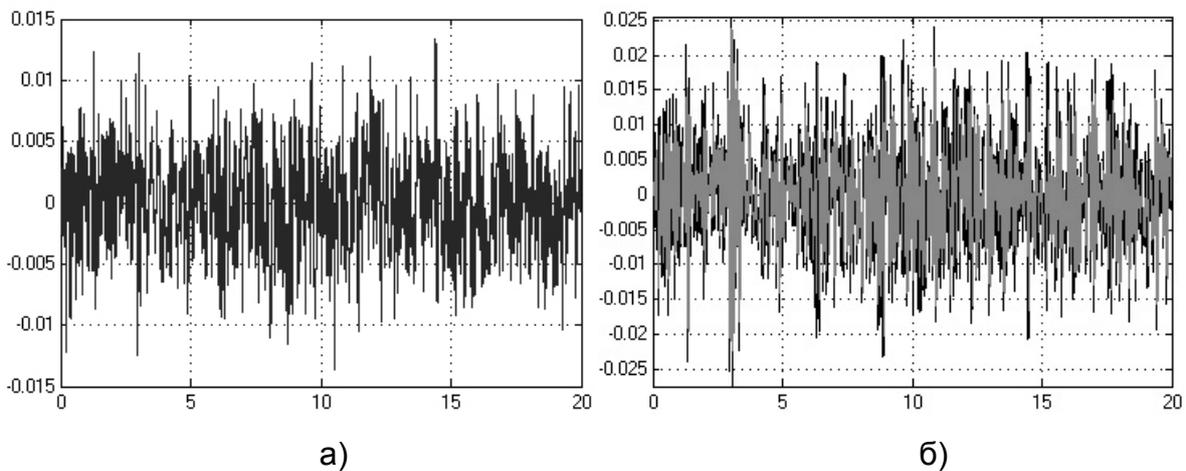


Рис. 7. Реакция систем: а – $\mu = 0$, $\omega_0 = 116$; б – $\mu = 40$, $\omega_0 = 116$

На рис. 7, а, приведена реакция исследуемой системы на входное воздействие типа «экспоненциально-коррелированный» шум, при $\omega_0 = 116 \text{ с}^{-1}$ и $\mu = 0^\circ$. По результатам моделирования получены следующие коэффициенты: дисперсия ошибки $D_\varepsilon = 0,032$; дисперсия по выходу $D_y = 0,988$. На рис. 7, б, приведена реакция исследуемой системы на входное воздействие типа «экспоненциально-коррелированный» шум, при $\omega_0 = 116 \text{ с}^{-1}$ и $\mu = 40^\circ$. По результатам моделирования получены следующие коэффициенты: дисперсия ошибки $D_\varepsilon = 0,036$; дисперсия по выходу $D_y = 0,991$.

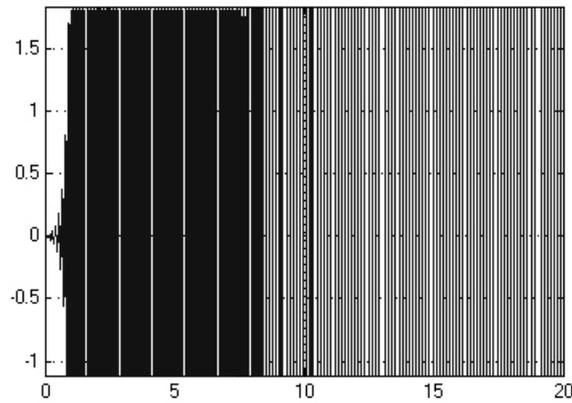


Рис. 8. Реакция системы с $\mu = 60$ и $\omega_0 = 116$

Рассматривается система с углом поворота $\mu = 60^\circ > \delta$ и $\omega_0 = 116$, график переходного процесса которой приведен на рис. 8. Видно, что данная система является неустойчивой.

Полученные результаты сведены в таблицу.

| | Единичное входное воздействие | | | «Экспоненциально-коррелированный» шум | | |
|------------------|-------------------------------|----|----|---------------------------------------|-------|----|
| | 0 | 40 | 60 | 0 | 40 | 60 |
| $\mu, ^\circ$ | | | | | | |
| $\sigma, ^\circ$ | 53,4 | | | | | |
| ω, c^{-1} | 116 | | | | | |
| $t_{пп}, c$ | 0,073 | | | — | | |
| $\sigma, \%$ | 15 | | | — | | |
| D_ε | — | | | 0,032 | 0,036 | — |
| D_γ | — | | | 0,988 | 0,991 | — |

Заключение

В статье рассмотрен фактор межканальных связей, существенно влияющий на динамику и устойчивость двухканальной ОСС. Показано, что, если μ – угол поворота системы координат, в которой осуществляется анализ принятого изображения и которая определяет величину межканальных связей – меньше запаса устойчивости отдельных каналов по фазе, то эта двухканальная система остается устойчивой. Поэтому при синтезе двухканальных систем встает задача максимизации запаса устойчивости по фазе отдельных каналов.

Литература

1. Сударчиков С.А., Ушаков А.В. Информационное обеспечение алгоритмов динамической юстировки больших радиотелескопов. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2007. – 184 с.
2. Бесекерский В.А. Теория систем автоматического управления. – СПб, 2003. – 752 с.

Цвентарный Артем Юрьевич

— Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, taifun@nm.ru

Ушаков Анатолий Владимирович

— Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, доктор технических наук, профессор, ushakov-avg@yandex.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТА ВЛИЯНИЯ НЕСИММЕТРИЧНОГО НАГРЕВА ВАЛА НА ЕГО ТРАЕКТОРИЮ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ПОДШИПНИКЕ

А.Е. Федоров, Б.С. Григорьев

Работа посвящена анализу влияния прогрева неуравновешенного вала на траекторию синхронного вихря в цилиндрическом подшипнике. Разработана математическая модель, включающая в себя как термогидродинамический анализ подшипников, так и анализ влияния несимметричного прогрева вала на его траекторию. Построена схема численного решения уравнений, входящих в модель.

Ключевые слова: цилиндрический подшипник, эффект Мортонна, статический дисбаланс, тепловой изгиб

Введение

Анализ устойчивости вращающихся валов в роторных системах является одной из важных проблем в машиностроении. Существует много факторов, которые могут влиять на устойчивость валов. В данной работе рассматривается один из таких факторов – несимметричный нагрев вала, который может привести к появлению спиральных вибраций [1]. Такие вибрации характеризуются увеличением со временем амплитуды прецессии вала. Исходной причиной этих вибраций является наличие статического дисбаланса (неуравновешенности) вала или диска. Этот дисбаланс приводит к появлению прецессии. При этом скорость прецессии равна скорости вращения вала вокруг своей оси. Такая прецессия приводит к несимметричному нагреву вала, что, в свою очередь, является причиной температурного изгиба вала. Этот изгиб приводит к появлению дополнительного дисбаланса. При этом центр вала переходит на новую орбиту, что может привести к увеличению вибраций вала, которые могут стать опасными.

Процесс возникновения и развития спиральных вибраций имеет несколько особенностей, которые сильно затрудняют построение и реализацию математических моделей для его описания. С одной стороны, необходимо учитывать процессы, происходящие в смазке, с другой – нагрев и изгиб вала. Еще одной серьезной проблемой при реализации построенной модели является сильное различие временных масштабов процессов в смазке и вале. Температура и давление в смазке осциллируют быстро, вал греется медленно. Также определенную сложность для построения модели представляют конструктивные особенности подшипника, такие как наличие секторов.

Впервые качественное описание спиральных вибраций сделал Newkirk в работе [2]. Он пришел к выводу, что причиной этого явления было трение между валом и втулкой. В процессе работы центр вала вращался вокруг своего положения равновесия по орбите с периодом, равным периоду вращения вала вокруг своей оси. Эта ситуация обеспечивает трение между частью поверхности вала и статором, в то время как диаметрально противоположная часть поверхности никогда не контактирует со статором. Исходя из этого, температура этой части поверхности остается равной температуре смазки. Получающаяся в результате разность температур приводит к появлению температурного градиента, который, в конечном счете, является причиной изгиба.

В дальнейшем было опубликовано достаточно большое число работ, в которых авторы пытались объяснить и рассчитать нагрев вала и возникновение вибраций. Однако можно сказать, что на данный момент нет моделей, которые бы достаточно аккуратно описывали тепловые процессы в подшипнике и при этом давали бы возможность анализировать наличие и устойчивость спиральных вибраций. В каких-то моделях [1] используются эмпирические коэффициенты, определение которых может являться не менее трудоемкой задачей, чем исходная. В других работах [3] используются очень точные модели для расчета тепловых эффектов, но при этом отсутствует анализ влияния теплового изгиба на вибрацию вала. Все эти обстоятельства приводят к выводу, что

необходимо попытаться построить более точную и полную модель. Построение такой модели и является целью данной работы.

В результате работы построена математическая модель, включающая как термодинамический анализ подшипников, так и анализ влияния несимметричного нагрева вала на его траекторию в цилиндрическом подшипнике. В качестве примера рассматривалась система, состоящая из вала с двумя подшипниками и свисающего диска.

1. Математическая модель и основные уравнения

1.1. Общая схема расчета

Построенная модель включает в себя этапы, показанные на рис. 1. Сначала рассчитывается давление p в смазочном слое; на следующем этапе задается статический дисбаланс $d_{СТ}$ и рассчитываются параметры траектории центра вала; полученная траектория, также как и давление, используется в дальнейшем для расчета распределения температуры в смазочном слое, на основе которого определяется тепловой поток F между смазкой и валом. Затем рассчитывается процесс нагрева вала и определяется максимальная разность температур $\max \Delta T^k$ (k – номер итерации) по сечению вала. Эта разность температур используется для определения прогиба вала. Далее на основе этого прогиба определяется температурный дисбаланс d_T , который используется на следующем шаге цикла для определения новых параметров орбиты. Вычисления продолжают до тех пор, пока не установится максимальная разность температур по сечению вала, т.е. пока не выполнится условие $-\delta_T < \varepsilon$, где $\delta_T = |\max \Delta T^k - \max \Delta T^{k-1}|$.

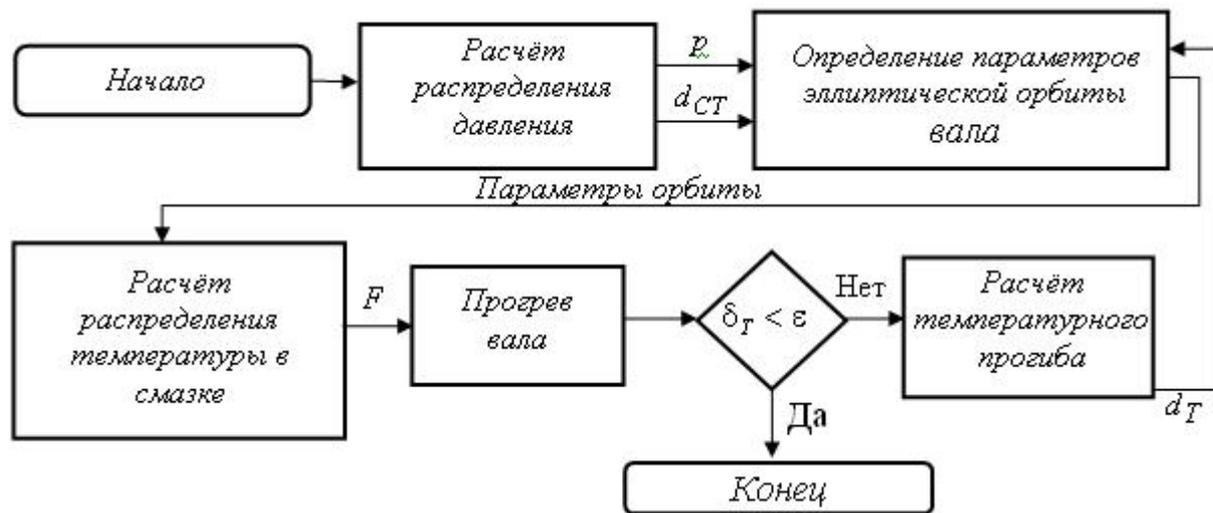


Рис. 1. Математическая модель (цикл расчета)

1.2. Определение параметров эллиптической орбиты вала

Объектом исследования является широко распространенный секторный цилиндрический подшипник, геометрия которого и используемая система координат изображены на рис. 2. Здесь e_0 – эксцентриситет в положении статического равновесия, R_j – радиус вала, O_n – центр подшипника, O_s – центр вала, θ_{si} – угловая координата начала i сектора, θ_{fi} – угловая координата конца i сектора, $\theta_{сект}$ – угловая протяженность сектора, ω – угловая скорость вращения вала вокруг собственной оси, h – толщина зазора, θ – угловая координата, отсчитываемая от оси X.

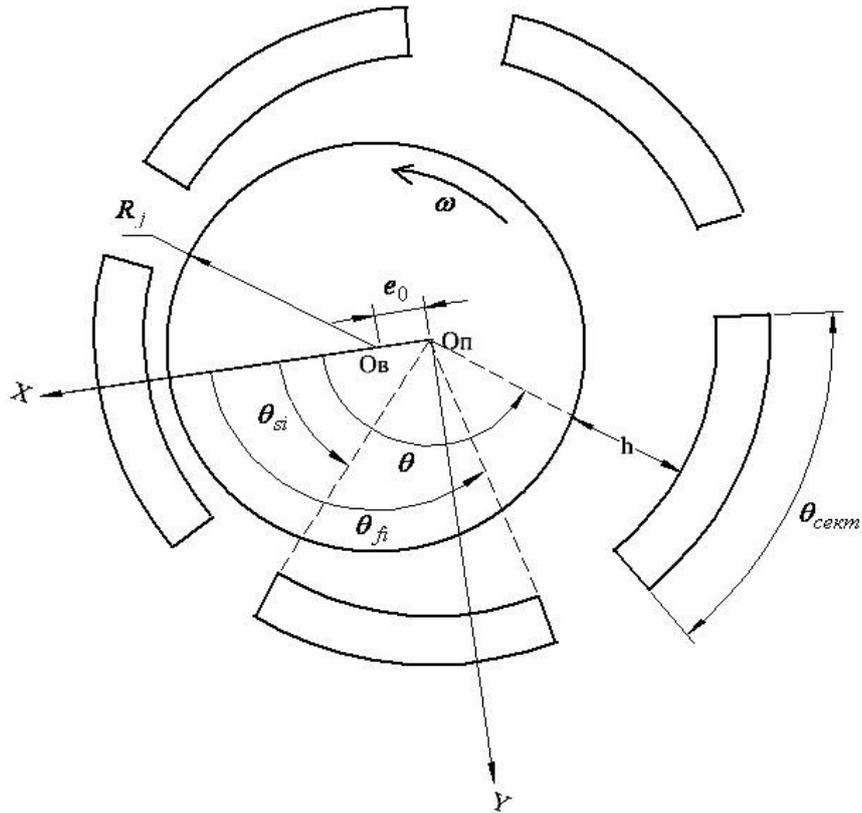


Рис. 2. Геометрия секторного подшипника

Для расчета распределения давления в смазочном слое подшипника используется уравнение Рейнольдса [4]

$$\frac{1}{R_j^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu \left(\omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right), \quad (1)$$

где μ – динамическая вязкость смазки. Толщина смазки, согласно [4], представляется следующим образом

$$h = C_b(1 - \varepsilon \cos \theta), \quad (2)$$

где C_b – радиальный зазор, $\varepsilon = \frac{e}{C_b}$ – относительный эксцентриситет. Отметим, что на

данном этапе не стояла задача построить максимально строгую модель, важно было создать замкнутую схему расчета и провести качественное сравнение полученных результатов с имеющимися экспериментальными данными. Поэтому были сделаны некоторые упрощающие предположения: рассматривался длинный подшипник, для которого

производная $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$, за исключением тонких областей, прилегающих к торцам. Также считалась постоянной вязкость смазки. Вследствие этого вместо уравнения (1) решалось более простое одномерное уравнение Рейнольдса для длинного подшипника

$$\frac{1}{R_j^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = 6\mu \left(\omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right). \quad (3)$$

Выражение для толщины смазочного слоя (2) с учетом прецессии вала может быть записано в виде $h = 1 - \varepsilon_0 \cos \theta - x \cos \theta - y \sin \theta = h_0 + \delta h$, где x, y – координаты центра вала относительно статического положения равновесия. Индекс 0 соответствует значению величин в положении статического равновесия.

Предположим, что δh – величина малая, и будем искать решение уравнения (3) в виде

$$p = p_0 + \delta p, \quad (4)$$

считая δp также малым. Добавка δp разыскивается в виде

$$\delta p(t, \theta) = p_x(\theta)x + p_y(\theta)y + p_{1x}(\theta)\dot{x} + p_{1y}(\theta)\dot{y}. \quad (5)$$

Уравнения для расчета p_x, p_y, p_{1x}, p_{1y} могут быть получены при подстановке выражений (4) и (5) в (3).

Для определения силы реакции смазочного слоя необходимо проинтегрировать давление по поверхности вала

$$\mathbf{W} = -\int_{\Omega} p \mathbf{n} d\Omega. \quad (6)$$

В то же время, исходя из структуры выражения (4) для давления, эту реакцию можно представить как сумму реакции в положении статического равновесия и реакции на прецессию

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_0 + \delta \mathbf{W}. \quad (7)$$

Будем рассматривать движение вала относительно положения статического равновесия. Тогда интерес будет представлять только второе слагаемое в выражении (7). Используя (5), (6) и (7), выражения для проекций реакции $\delta \mathbf{W}$ запишем в виде

$$\delta W_x = -\int_{\Omega} \delta p \cos \theta d\Omega = -(c_{xx}x + c_{xy}y + d_{xx}\dot{x} + d_{xy}\dot{y}), \quad (8)$$

$$\delta W_y = -\int_{\Omega} \delta p \sin \theta d\Omega = -(c_{yx}x + c_{yy}y + d_{yx}\dot{x} + d_{yy}\dot{y}),$$

где $c_{xx} = \int_{\Omega} p_x \cos \theta d\Omega$, $c_{xy} = \int_{\Omega} p_y \cos \theta d\Omega$, $d_{xx} = \int_{\Omega} p_{1x} \cos \theta d\Omega$, $d_{xy} = \int_{\Omega} p_{1y} \cos \theta d\Omega$,
 $c_{yx} = \int_{\Omega} p_x \sin \theta d\Omega$, $c_{yy} = \int_{\Omega} p_y \sin \theta d\Omega$, $d_{yx} = \int_{\Omega} p_{1x} \sin \theta d\Omega$, $d_{yy} = \int_{\Omega} p_{1y} \sin \theta d\Omega$. Эти ве-

личины называются динамическими коэффициентами.

Для рассматриваемой роторной системы, состоящей из вала с двумя подшипниками свисающего диска, мы можем записать, используя (8), уравнения движения в виде

$$\begin{cases} m_d \ddot{x} + c_{xx}x + c_{xy}y + d_{xx}\dot{x} + d_{xy}\dot{y} = m_d d_{CT} \omega^2 \cos \omega t, \\ m_d \ddot{y} + c_{yx}x + c_{yy}y + d_{yx}\dot{x} + d_{yy}\dot{y} = m_d d_{CT} \omega^2 \sin \omega t, \end{cases} \quad (9)$$

где m_d – масса диска. Решение уравнения (9) ищется в виде эллиптической траектории.

1.3. Расчет теплового потока и процесса нагрева вала

Для определения температуры в смазочном слое исходным является уравнение энергии для тонкого слоя [5]. Однако общее уравнение можно упростить, приняв ряд допущений. Так как нас интересует общий поток тепла, идущий от смазочного слоя к валу, можно полагать, что для его определения достаточно знания средней по толщине слоя температуры. Кроме того, в отличие от вала, сектора прогреваются медленно, и поэтому теплообмен с ними не будем принимать во внимание. Теплообмен с валом будем учитывать по закону Ньютона. С учетом принятых допущений уравнение энергии для температуры T , осредненной по толщине смазочного слоя, запишется в виде

$$\rho c_v \left[h \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{R_j^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{Th}{2} \left(UR_j - \frac{h^2}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \right) + T \frac{\partial h}{\partial t} \right] + \alpha_j (T - T_j) = \frac{h^3}{12\mu R_j^2} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{U^2}{h}, \quad (10)$$

где T – температура смазки, усредненная по толщине смазочного слоя, ρ – плотность смазки, c_v – коэффициент удельной теплоемкости при постоянном объеме, α_j – коэф-

коэффициент теплообмена между смазкой и валом, T_J – температура поверхности вала. Полагая, что возмущения температуры, вызванные движением вала, малы, решение с точностью до малых второго порядка будем искать в виде

$$T = T_0 + \delta T = T_0 + T_1(\theta)\cos(\omega t) + T_2(\theta)\sin(\omega t). \quad (11)$$

Уравнения для T_0 , T_1 и T_2 получаются при подстановке (11) в (10).

Для расчета температуры вала решалось уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T_J}{\partial t} = \frac{\lambda_J}{c_J \rho_J} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_J}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_J}{\partial \varphi^2} \right), \quad (12)$$

где ρ_J – плотность вала, λ_J – теплопроводность вала, c_J – коэффициент удельной теплоемкости, φ – угловая координата. Важно отметить, что уравнение теплопроводности рассматривается во вращающейся системе координат. Исходя из этого, координата φ связана с угловой координатой θ , введенной ранее, соотношением $\varphi = \theta - \omega t$.

В качестве начального условия для (12) задавалась постоянная температура. По угловой координате использовались условия периодичности.

На границе между валом и смазкой ставилось условие равенства тепловых потоков. Как было сказано выше, имеет место сильное различие временных масштабов тепловых процессов, происходящих в смазке и вале. Для уравнения энергии можно принять за масштаб по времени $1/\omega$. При $\omega = 942$ рад/с единица безразмерного времени в уравнении энергии соответствует примерно 0,001 с реального времени. Для уравнения теплопроводности введен масштаб $c_J \rho_J R_j^2 / \lambda_J$. При $c_J = 460$ Дж/(кг·К), $\rho_J = 7800$ кг/м³, $\lambda_J = 45$ Вт/(м·К) (это параметры стали), $R_j = 0.038$ м единица безразмерного времени в уравнении теплопроводности будет соответствовать примерно 115 с реального времени. Легко видеть, что масштабы отличаются в 10^5 раз.

Очевидно, что вал «не успевает» отслеживать быстрые изменения температуры смазки, он только реагирует на «осредненные» осцилляции этой температуры.

Учет приведенного эффекта позволяет упростить вычисления. Для этого используется схема, предложенная в [3]. Рассчитывается температура смазки за один оборот вала. В течение этого времени температура поверхности вала полагается постоянной. Далее вычисляется тепловой поток согласно выражению

$$F(t, \theta) = \alpha_g [T_0(\theta) - T_J(\theta - \omega t) + T_1(\theta)\cos(\omega t) + T_2(\theta)\sin(\omega t)].$$

Полученный поток усредняется по времени одного оборота вала для каждой фиксированной точки поверхности вала:

$$\bar{F}(\varphi) = \frac{\alpha_g}{T_{rot}} \int_0^{T_{rot}} [T_0(\varphi + \omega t) - T_J(\varphi) + T_1(\varphi + \omega t)\cos(\omega t) + T_2(\varphi + \omega t)\sin(\omega t)] dt.$$

Здесь T_{rot} – период обращения вала вокруг своей оси. Этот усредненный поток используется как граничное условие для уравнения теплопроводности.

Для определения температурного изгиба вала использовалась модель, описанная в [6]. Вал рассматривался как стержень. При выводе уравнений использовалась теория изгиба балок, описанная в [7, 8]. В результате было получено выражение для определения температурного отклонения вала в месте прикрепления диска (рис. 3):

$$d_T = \frac{\alpha \max \Delta T}{2R_j} LL_d. \quad (13)$$

Здесь L_d – расстояние между центрами подшипника и диска, α – коэффициент температурного расширения. В дальнейшем выражение (13) использовалось для определения дисбаланса, вызванного тепловым изгибом вала.

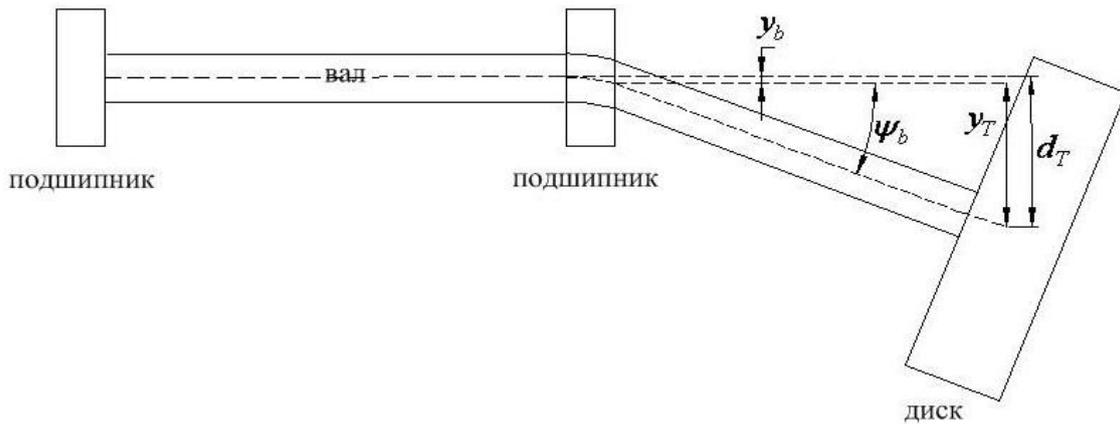


Рис. 3. Температурный изгиб вала

На рис. 4 приведена векторная схема, иллюстрирующая действие силы, вызванной статическим дисбалансом с учетом температурного изгиба.

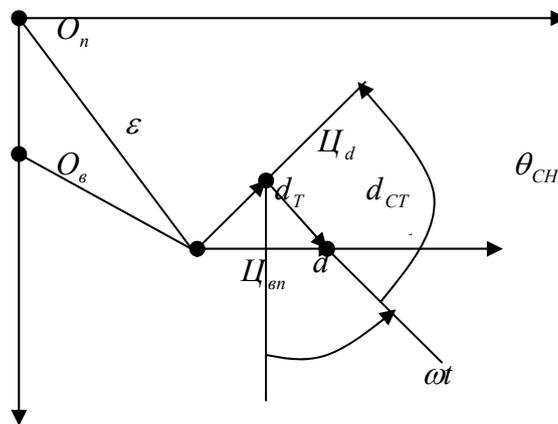


Рис. 4. Статический дисбаланс с учетом изгиба

На схеме обозначено: O_n – центр подшипника; O_b – статическое равновесное положение центра вала; $\text{Ц}_{\text{вп}}$ – центр вала в подшипнике; Ц_d – центр диска; $\text{Ц}_{\text{мд}}$ – центр масс диска; $\theta_{\text{СН}}$ – угол между смещением центра диска вследствие изгиба и смещением центра масс. Исходя из приведенной схемы, в случае температурного изгиба уравнения движения изменятся и примут вид

$$\begin{cases} m_d \ddot{x} + c_{xx} x + c_{xy} y + d_{xx} \dot{x} + d_{xy} \dot{y} = m_d d_{CT} \omega^2 \cos \omega t + m_d d_T \cos(\omega t + \theta_{\text{СН}}), \\ m_d \ddot{y} + c_{yx} x + c_{yy} y + d_{yx} \dot{x} + d_{yy} \dot{y} = m_d d_{CT} \omega^2 \sin \omega t + m_d d_T \sin(\omega t + \theta_{\text{СН}}). \end{cases}$$

2. Результаты расчета

Расчеты проводились для подшипника, основные параметры которого приведены в таблице.

На рис. 5 представлена траектория движения центра вала для случая, когда статический относительный эксцентриситет $\varepsilon_0 = 0,8$. Эта траектория была построена следующим образом. В промежутке между началом расчета и его окончанием выбиралось несколько последовательных моментов времени. Для каждого момента времени опре-

делялись текущие параметры эллиптической орбиты. Далее определялось положение вала. Полученные точки соединялись отрезками прямых.

| Параметр | Значение |
|------------------------------------------------|------------|
| Количество секторов | 5 |
| R_j , радиус подшипника | 0,038 м |
| L , длина подшипника | 0,114 м |
| C_b , радиальный зазор | 0,00012 м |
| ω , угловая скорость вращения | 942 рад/с |
| m_d , масса диска | 50 кг |
| ε_0 , относительный эксцентриситет | 0,6; 0,8 |
| T_b , температура подачи смазки | 50 °С |
| T_{0J} , начальная температура вала | 25 °С |
| d_{CT} , статический дисбаланс | $0,75 C_b$ |

Таблица. Параметры исследуемого подшипника

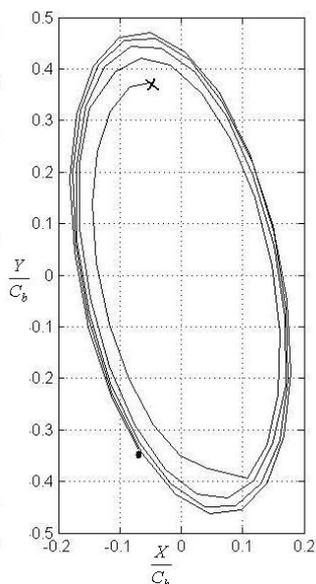


Рис. 5. Траектория вала при $\varepsilon_0 = 0,8$

Как можно видеть из рис. 5, траектория вала представляет собой раскручивающуюся спираль, что приводит к контакту ротора и статора. Момент контакта обозначен на рисунке черным кружком.

Также был рассмотрен случай, когда $\varepsilon_0 = 0,6$. Из рис. 6 можно видеть, что в этом случае спираль траектории снова раскручивается, но не так сильно, как при большем эксцентриситете. Опасности контакта нет. Эта спираль переходит в стационарную траекторию к моменту, когда устанавливается максимальная разность температур по сечению вала. Процесс установления температуры занимает приблизительно 10 мин.

При построении описанной модели было сделано еще одно важное допущение. Предполагалось, что максимальный изгиб вала в подшипнике достаточно мал по сравнению с радиальным зазором. Такое предположение позволяло не учитывать в уравнении Рейнольдса изогнутость оси вала, что еще раз обосновывало возможность использования уравнений для длинного подшипника.

Расчет показал, что сделанное предположение вполне оправдано, поскольку максимальный изгиб вала в подшипнике не превышал 4 % от радиального зазора.

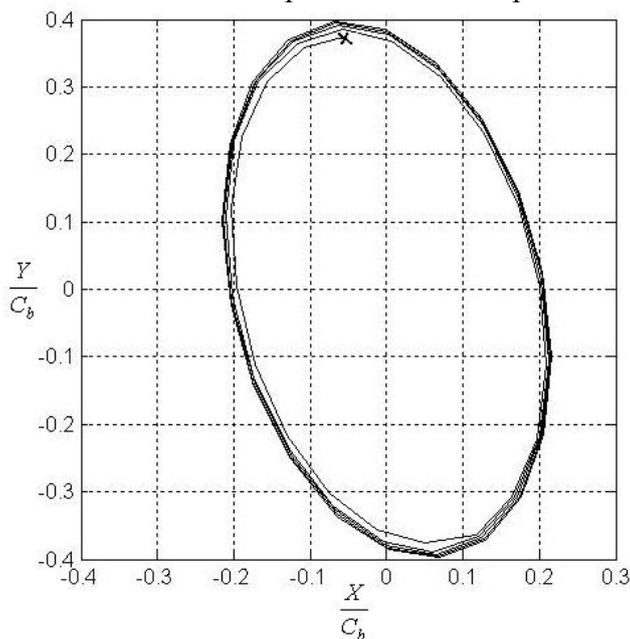


Рис. 6. Траектория вала при $\varepsilon_0 = 0,6$

С целью проверки адекватности построенной модели было проведено качественное сравнение рассчитанного распределения температуры поверхности вала с экспериментальными данными, опубликованными в [9]. Сравнение показало, что имеет место хорошее качественное согласование рассчитанных значений с экспериментальными.

Заключение

В данной работе был произведен анализ влияния прогрева неуравновешенного вала на траекторию синхронного вихря в цилиндрическом подшипнике. Разработана математическая модель, включающая в себя как термогидродинамический анализ подшипников, так и анализ влияния несимметричного прогрева вала на его траекторию. Построены схемы численного решения уравнений, входящих в модель. Исследовано влияние температурного прогиба вала на его траекторию для простой роторной системы, состоящей из вала с двумя подшипниками и свисающего диска. Полученные результаты хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными данными.

Литература

1. Schmied J. Spiral Vibrations of Rotors // Rotating Machinery Dynamics. – 1987. – Vol. 2. – P. 449–456.
2. Newkirk B.L. Shaft Rubbing // Mechanical Engineering. – August 1926. – Vol. 48. – № 8. – P. 830–832.
3. Gomiciaga R., Keogh P.S. Orbit Induced Journal Temperature Vibration in Hydrodynamic Bearings // ASME Journal of Tribology. – July 1999. – Vol. 121. – P. 77–84.
4. Камерон А. Теория смазки в инженерном деле. – М.: Машгиз, 1962. – 295 с.
5. Коровчинский М.В. Теоретические основы работы подшипников скольжения. – М.: Машгиз, 1959. – 404 с.
6. Kirk R.G., Zenglin G., Balbahadur A.C. Synchronous Thermal Instability Prediction For Overhung Rotors // Proceedings of the thirty-second turbomachinery symposium. – 2003. – P. 121–135.

7. Беляев Н.М. Соппротивление материалов. – 15-е изд., перераб. – М.: Наука, 1976. – 608 с.
8. Тимошенко С.П., Джеймс Г. Механика материалов. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1976. – 672 с.
9. de Jongh F.M., van der Hoeven P. Application of a Heat Barrier Sleeve to Prevent Synchronous Rotor Instability //Proceedings of the 27th Turbomachinery Symposium. –1998. – P. 17–26.

Фёдоров Александр Евгеньевич

— Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, аспирант, alexandr.fml@gmail.com

Григорьев Борис Семёнович

— Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, доктор технических наук, профессор, grig@tu.neva.ru

УДК 681.513.675

КОМПЕНСАЦИЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

**А.А. Бобцов, А.А. Пыркин, С.А. Колюбин, К.П. Рогожина,
М.В. Слинченкова**

Статья посвящена развитию методов компенсации входных гармонических возмущений по измерениям выходной переменной объекта. Предлагается подход компенсации гармонического возмущения неизвестной частоты, действующего на линейный объект управления. В работе рассматривается задача компенсации возмущения для линейного объекта с любой относительной степенью.

Ключевые слова: идентификация частоты, компенсация возмущения, управление по выходу.

Введение

В работе предлагается алгоритм компенсации параметрически неопределенного гармонического возмущения, действующего на линейный стационарный объект управления. Имеется ряд работ, посвященных управлению в условиях неизвестной частоты ω возмущающего воздействия $\bar{w}(t) = \bar{\sigma} \sin(\omega t + \bar{\phi}_0)$ по измерениям только выходной переменной и сигнала управления. В предлагаемой статье развиваются подходы, опубликованные в [1–3]. В статье [1] для линейного устойчивого объекта с известными параметрами предлагается компенсирующий возмущение регулятор размерности $(2n+6)$. Полученный в [1] алгоритм сложен в реализации, и для его построения требуется много вычислений, а также знание нижней границы параметра ω гармонического возмущающего воздействия. В [1] предполагается, что линейный объект управления имеет единичную относительную степень, допущение такого рода сужает применимость алгоритма [1] для более широкого класса систем. В развитие подхода [1] в работе [2] предлагается регулятор размерности $(n+4)$, обладающий более простой структурой (по сравнению с [1]) и не предусматривающий при своем построении знания нижней границы параметра ω . Однако в [2], также как и в [1], относительная степень объекта управления равна единице, а параметры самого объекта являются известными. В [3] предложен алгоритм компенсации гармонического возмущающего воздействия для случая параметрически неопределенного, но строго минимально фазового линейного объекта. Алгоритм, предложенный в [3], проще по структуре и меньше по размерности по сравнению с опубликованными в [1, 2]. Также следует отметить, что, в отличие от [1, 2], в [3] предполагается, что объект управления может быть неустойчивым, а его параметры неизвестны (в [1, 2] рассматривались только асимптотически устойчивые объекты с известными параметрами).

В этой статье будет предложен алгоритм компенсации параметрически неопределенного гармонического возмущения, действующего на линейный объект управления, относительная степень которого, в отличие от [1–3], может быть любой. Размерность предлагаемого регулятора равна $(n+3)$.

Постановка задачи

Как и в работах [1, 2], рассмотрим линейный объект вида

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + g(\bar{u}(t) + \bar{w}(t)), \quad y(t) = h^T z(t), \quad (1.1)$$

где вектор переменных состояния $z(t) \in R^n$ не измеряется, $\bar{u}(t)$ – скалярный сигнал управления, $y(t)$ – скалярная регулируемая переменная. Входное возмущение $\bar{w}(t)$ представлено в виде функции

$$\bar{w}(t) = \bar{\sigma} \sin(\omega t + \bar{\phi}_0),$$

включающей в себя синусоиду с неизвестными амплитудой $\bar{\sigma}$, частотой ω и фазой $\bar{\phi}_0$.

Наряду с моделью вход-состояние-выход (1.1), рассмотрим модель вход-выход вида

$$y(t) = \frac{b(p)}{a(p)}(\bar{u}(t) + \bar{w}(t)), \quad (1.2)$$

где $p = d/dt$; $a(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0$ и $b(p) = b_m p^m + \dots + b_1p + b_0$, где $m < n$, – соответствующие полиномы, полученные в результате перехода от модели вход-состояние-выход к модели вход-выход,

$$\frac{b(p)}{a(p)} = h(pI - F)^{-1} g.$$

Рассмотрим следующие допущения относительно системы (1.1), (1.2).

Допущение 1. Будем полагать, что измеряются только сигналы $y(t)$ и $\bar{u}(t)$.

Допущение 2. Коэффициенты матриц F , g и h известны.

Допущение 3. Пара (F, g) полностью управляема, пара (F, h^T) полностью наблюдаема.

Допущение 4. Полином $a(p)$ гурвицев.

Допущение 5. Полином $b(p)$ не имеет корней $\pm j\omega$, где ω – частота возмущающего воздействия.

Сформулируем цель управления как решение задачи синтеза алгоритма, обеспечивающего при любых начальных состояниях объекта выполнение условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0. \quad (1.3)$$

Синтез закона управления

Очевидно, что цель (1.3) будет достигнута при законе управления

$$\bar{u}(t) = -\bar{w}(t).$$

Однако переменная $\bar{w}(t)$ не измеряется. Таким образом, требуется построить устройство оценки неизвестного возмущения $\bar{w}(t)$. Представим уравнение (1.2) в виде

$$y(t) = u(t) + w(t), \quad (2.1)$$

где

$$u(t) = \frac{b(p)}{a(p)}\bar{u}(t), \quad w(t) = \frac{b(p)}{a(p)}\bar{w}(t).$$

Так как переменная $\bar{w}(t)$ имеет синусоидальную форму, то с учетом допущений 4 и 5 справедливо соотношение

$$w(t) = L \cdot \bar{w}(t + \frac{\varphi}{\omega}) + \varepsilon_1,$$

где $L = \left| \frac{b(j\omega)}{a(j\omega)} \right|$ – положительный коэффициент передачи, $\varphi = \arg \frac{b(j\omega)}{a(j\omega)} < 0$ – фазовый сдвиг, ε_1 – экспоненциально затухающая составляющая [4]. Следовательно, если пренебречь экспоненциально затухающей составляющей ε_1 , переменная $w(t)$ также имеет синусоидальную форму. Пренебрегая экспоненциальной составляющей ε_1 , выберем $\bar{u}(t)$ следующим образом:

$$\bar{u}(t) = -\frac{1}{\hat{L}} \cdot \hat{w}(t - \frac{\hat{\varphi}}{\hat{\omega}}), \quad (2.2)$$

где функция $\hat{w}(t)$ – оценка переменной $w(t)$, $\hat{L} = \left| \frac{b(j\hat{\omega})}{a(j\hat{\omega})} \right|$ – оценка коэффициента L ,

$\hat{\varphi} = \arg \frac{b(j\hat{\omega})}{a(j\hat{\omega})}$ – оценка фазового сдвига φ , $\hat{\omega}$ – оценка частоты ω .

Замечание 1. В силу того, что функция $\sin(x)$ имеет период 2π , значение оценки фазы $\hat{\varphi}$ целесообразно определять в диапазоне $(-2\pi; 0]$. В этом случае будет справедливо соотношение

$$\varphi = \varphi_0 + 2\pi \cdot k,$$

где $\varphi_0 \in (-2\pi; 0]$ – остаток от деления φ на 2π , k – целое число. При выполнении соотношений

$$\hat{\omega} = \omega, \hat{w}(t) = w(t), \hat{L} = L \text{ и } \hat{\varphi} = \varphi_0 \quad (2.3)$$

получим

$$\bar{u}(t) = -\frac{1}{\hat{L}} \hat{w}(t - \frac{\hat{\varphi}}{\hat{\omega}}) = -\frac{1}{L} w(t - \frac{\varphi_0}{\omega}) = -\frac{1}{L} w(t - \frac{\varphi}{\omega} - \frac{2\pi}{\omega} \cdot k) = -\frac{1}{L} w(t - \frac{\varphi}{\omega}) = -\bar{w}(t),$$

где $\frac{2\pi}{\omega} \cdot k$ – целое число периодов синусоидального возмущения. Таким образом, закон управления вида (2.2) обеспечивает полную компенсацию возмущения и достижение цели управления (1.3). Далее требуется построить устройство оценки, обеспечивающее выполнение соотношений (2.3).

Идентификация возмущения

Будем решать задачу идентификации параметров неизвестного возмущения. Временно предположим, что сигнал $w(t) = \sigma \sin(\omega t + \phi_0)$ измеряется. Известно, что для генерирования сигнала $w(t)$ можно использовать дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2 w(t)}{dt^2} = -\omega^2 w(t) = \theta w(t), \quad (2.4)$$

где $\theta = -\omega^2$ – постоянный параметр. Основываясь на работе [5], рассмотрим лемму.

Лемма. Введем в рассмотрение вспомогательный фильтр второго порядка

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1(t) = \zeta_2(t), \\ \dot{\zeta}_2(t) = -2\alpha\zeta_2(t) - \alpha^2\zeta_1(t) + \alpha^2 w(t), \\ \zeta(t) = \zeta_1(t) \end{cases}$$

или

$$\zeta(t) = \frac{\alpha^2}{(p + \alpha)^2} w(t), \quad (2.5)$$

где p – оператор дифференцирования и число $\alpha > 0$. Тогда дифференциальное уравнение (2.4) может быть представлено в виде

$$w(t) = \frac{2}{\alpha} \dot{\zeta}(t) + \zeta(t) + \frac{1}{\alpha^2} \theta \zeta(t) + \varepsilon_y(t), \quad (2.6)$$

где $\varepsilon_y(t)$ – экспоненциально затухающая функция времени, определяемая ненулевыми начальными условиями.

Доказательство. Переходя к изображениям Лапласа для уравнения (2.4), получаем

$$W(s) = \frac{1}{(s + \alpha)^2} \theta W(s) + \frac{2\alpha s + \alpha^2}{(s + \alpha)^2} W(s) + \frac{D(s)}{(s + \alpha)^2}, \quad (2.7)$$

где s – комплексная переменная, $W(s) = L\{w(t)\}$ – образ Лапласа сигнала $w(t)$, а полином $D(s)$ обозначает сумму всех членов, содержащих ненулевые начальные условия.

Из уравнения (2.7) находим

$$w(t) = \frac{1}{(p + \alpha)^2} \theta w(t) + \frac{2\alpha p + \alpha^2}{(p + \alpha)^2} w(t) + \varepsilon_y(t), \quad (2.8)$$

где экспоненциально затухающая функция времени $\varepsilon_y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{D(s)}{(s + \alpha)^2} \right\}$ определяется

ненулевыми начальными условиями. Подставляя (2.5) в уравнение (2.8), получаем

$$w(t) = \frac{2}{\alpha} \dot{\zeta}(t) + \zeta(t) + \frac{1}{\alpha^2} \theta \zeta(t) + \varepsilon_y(t),$$

что и требовалось доказать.

Наблюдатель сигнала $w(t) = \sigma \sin(\omega t + \phi_0)$ построим на основе уравнения (2.5):

$$\hat{w}(t) = \frac{2}{\alpha} \dot{\zeta}(t) + \zeta(t) + \frac{1}{\alpha^2} \hat{\theta}(t) \zeta(t), \quad (2.9)$$

где $\hat{\theta}(t)$ – оценка неизвестного параметра θ . Для синтеза идентификатора неизвестного параметра θ введем новую переменную – измеряемый сигнал вида

$$z(t) = \ddot{\zeta}(t) = \alpha^2 w(t) - 2\alpha \dot{\zeta}(t) - \alpha^2 \zeta(t).$$

Пренебрегая экспоненциально затухающим членом, для модели (2.6) имеем

$$z(t) = \theta \zeta(t). \quad (2.10)$$

Построим адаптивный наблюдатель для сигнала (2.10)

$$\hat{z}(t) = \hat{\theta}(t) \zeta(t),$$

где $\hat{z}(t)$ – оценка сигнала $z(t)$, а $\hat{\theta}(t)$ – настраиваемый параметр, одновременно являющийся оценкой параметра θ .

Утверждение. Пусть параметр $\hat{\theta}(t)$ настраивается следующим образом:

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = k \zeta(t) (z(t) - \hat{z}(t)), \quad (2.11)$$

тогда $\lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{\theta}(t) - \theta| = 0$.

Доказательство. Рассмотрим ошибку

$$\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}. \quad (2.12)$$

Дифференцируя (2.12), получаем

$$\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta} - \dot{\hat{\theta}} = 0 - k \zeta (z - \hat{z}) = -k \zeta (\theta \zeta - \hat{\theta} \zeta) = -k \zeta^2 \tilde{\theta}. \quad (2.13)$$

Рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$V = \frac{\tilde{\theta}^2}{2}. \quad (2.14)$$

Дифференцируя (2.14) с учетом уравнения (2.13), получаем

$$\dot{V} = -2k\zeta^2 V. \quad (2.15)$$

Интегрируя (2.15), имеем

$$V(t) = V(t_0)e^{-k\gamma(t, t_0)}, \quad (2.16)$$

где функция $\gamma(t, t_0) = \int_{t_0}^t \zeta^2(\tau) d\tau$ и $\gamma(t, t_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \zeta^2(\tau) d\tau \rightarrow \infty$. Из уравнения (2.16) легко

показать, что $\lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{\theta}(t) - \theta| = 0$. Утверждение доказано.

Замечание 2. Из доказательства утверждения можно показать, что, увеличивая коэффициенты k и α в алгоритме (2.5), (2.9), (2.10), (2.11), можно увеличить скорость сходимости параметра $\hat{\theta}(t)$ к θ . Однако алгоритм (2.11) технически нереализуем, так как содержит неизмеримый сигнал $z(t) = \alpha^2 w(t) - 2\alpha\dot{\zeta}(t) - \alpha^2 \zeta(t)$, и, следовательно, (2.11) имеет вид

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = k\zeta(t)(z(t) - \hat{z}(t)) = k\zeta(t)(\alpha^2 w(t) - 2\alpha\dot{\zeta}(t) - \alpha^2 \zeta(t) - \hat{\theta}(t)\zeta(t)). \quad (2.17)$$

Чтобы получить реализуемый алгоритм, представим уравнение (2.1) в виде

$$y(t) - u(t) = w(t). \quad (2.18)$$

Тогда для (2.5) имеем

$$\zeta(t) = \frac{\alpha^2}{(p + \alpha)^2} (y(t) - u(t)).$$

Подставляя в (2.17) уравнения (2.9) и (2.18), получаем

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = k\alpha^2 \zeta(t)(y(t) - u(t) - \hat{w}(t)). \quad (2.19)$$

Частоту гармонического возмущения найдем из (2.4):

$$\hat{\omega}(t) = \sqrt{|\hat{\theta}(t)|}.$$

Реализуемый закон управления

Для реализации закона управления (2.2) временно будем полагать, что синусоидальный сигнал $w(t)$ измеряется. Построим закон управления в виде

$$\bar{u}(t) = -W_u(p)w(t) = -(k_p + k_d p)w(t), \quad (2.20)$$

где $W_u(p) = k_p + k_d p$ – линейный оператор. Так как $w(t)$ имеет синусоидальную форму, то

$$\bar{u}(t) = -|W_u(j\omega)| w(t + \frac{\arg W_u(j\omega)}{\omega}) + \varepsilon_2, \quad (2.21)$$

где $|W_u(j\omega)|$ – коэффициент передачи, $\arg W_u(j\omega)$ – фазовый сдвиг, ε_2 – экспоненциально затухающая составляющая. Пренебрегая экспоненциальной составляющей ε_2 , выберем коэффициенты k_p и k_d в (2.20) так, чтобы уравнение (2.21) было эквивалентно (2.2) при выполнении (2.3):

$$\left\{ \begin{array}{l} |W_u(j\hat{\omega})| = \frac{1}{\hat{L}}, \\ \arg W_u(j\hat{\omega}) = -\hat{\varphi} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |k_p + jk_d \hat{\omega}| = \frac{1}{\hat{L}}, \\ \arg(k_p + jk_d \hat{\omega}) = -\hat{\varphi} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_p^2 + (k_d \hat{\omega})^2 = \frac{1}{\hat{L}^2}, \\ \frac{k_p}{k_p^2 + (k_d \hat{\omega})^2} = \cos(-\hat{\phi}), \\ \frac{k_d}{k_p^2 + (k_d \hat{\omega})^2} = \sin(-\hat{\phi}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_p = \frac{\cos \hat{\phi}}{\hat{L}}, \\ k_d = -\frac{\sin \hat{\phi}}{\hat{\omega} \hat{L}}. \end{cases}$$

Перепишем (2.20) в реализуемой форме:

$$\bar{u}(t) = -(k_p \cdot \hat{w}(t) + k_d \cdot \dot{\hat{w}}(t)).$$

Наблюдатель сигнала $\dot{w}(t)$ построим на основе уравнения (2.6):

$$\hat{w}(t) = \frac{2}{\alpha} \ddot{\zeta}(t) + \dot{\zeta}(t) + \frac{1}{\alpha^2} \hat{\theta}(t) \dot{\zeta}(t).$$

Для расчета коэффициентов \hat{L} и $\hat{\phi}$ воспользуемся следующим алгоритмом. Рассмотрим частотную передаточную функцию

$$W(j\omega) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \Big|_{s=j\omega} = \frac{A(\omega) + jB(\omega)}{C(\omega) + jD(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (2.22)$$

где

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sum_{i=0}^{2i \leq m} (-1)^i b_{2i} \omega^{2i}, \quad B(\omega) = \sum_{i=0}^{2i+1 \leq m} (-1)^i b_{2i+1} \omega^{2i+1}, \\ C(\omega) &= \sum_{i=0}^{2i \leq n-1} (-1)^i a_{2i} \omega^{2i}, \quad D(\omega) = \sum_{i=0}^{2i+1 \leq n-1} (-1)^i a_{2i+1} \omega^{2i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \\ P(\omega) &= \frac{A(\omega)C(\omega) + B(\omega)D(\omega)}{C^2(\omega) + D^2(\omega)}, \quad Q(\omega) = \frac{B(\omega)C(\omega) - A(\omega)D(\omega)}{C^2(\omega) + D^2(\omega)}. \end{aligned}$$

Из (2.22) выразим искомые функции

$$\begin{aligned} L(\omega) &= |W(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}, \\ \varphi(\omega) &= \begin{cases} -\arccos \frac{P(\omega)}{L(\omega)}, & \text{если } Q(\omega) \leq 0, \\ -2\pi + \arccos \frac{P(\omega)}{L(\omega)}, & \text{если } Q(\omega) > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

В силу того, что обеспечено равенство $\lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{\theta}(t) - \theta| = 0$, справедливы соотношения (2.3), и, как следствие, закон управления (2.2) обеспечивает цель управления (1.3). Таким образом, получен регулятор, решающий задачу компенсации неизмеряемого параметрически неопределенного гармонического возмущения, со следующей структурой:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\bar{u}(t) = -(k_p \cdot \hat{w}(t) + k_d \cdot \dot{\hat{w}}(t)), \\
\hat{w}(t) = \frac{2}{\alpha} \zeta(t) + \zeta(t) + \frac{1}{\alpha^2} \hat{\theta}(t) \zeta(t), \\
\dot{\hat{w}}(t) = \frac{2}{\alpha} \dot{\zeta}(t) + \dot{\zeta}(t) + \frac{1}{\alpha^2} \hat{\theta}(t) \dot{\zeta}(t), \\
k_p = \frac{\cos \hat{\varphi}}{\hat{L}}, \text{ где } \hat{L} \neq 0, \\
k_d = -\frac{\sin \hat{\varphi}}{\hat{\omega} \cdot \hat{L}}, \text{ где } \hat{\omega} \neq 0, \hat{L} \neq 0, \\
\hat{L} = \left| \frac{b(j\hat{\omega})}{a(j\hat{\omega})} \right|, \\
\hat{\varphi} = \arg \frac{b(j\hat{\omega})}{a(j\hat{\omega})}, \\
\hat{\omega}(t) = \sqrt{|\hat{\theta}(t)|}, \\
\dot{\hat{\theta}}(t) = k\alpha^2 \zeta(t)(y(t) - u(t) - \hat{w}(t)), \\
\zeta(t) = \frac{\alpha^2}{(p + \alpha)^2} (y(t) - u(t)), \\
u(t) = \frac{b(p)}{a(p)} \bar{u}(t).
\end{array} \right. \quad (2.23)$$

Пример

Для иллюстрации работоспособности алгоритма управления (2.23) рассмотрим задачу стабилизации линейного стационарного объекта управления, описываемого уравнением

$$y(t) = \frac{p+1}{(p+2)(p+3)(p+4)} (\bar{u}(t) + \bar{w}(t)).$$

Рассмотрим возмущающее воздействие вида $\bar{w}(t) = \sin(t)$, для которого справедливы соотношения $\omega = 1$, $L \approx 0,049$, $\varphi \approx -0,245$. Закон управления (2.23) обеспечивает $\hat{\omega} \rightarrow 1$, $\hat{L} \rightarrow 0,049$, $\hat{\varphi} \rightarrow -0,245$, $k_p \rightarrow 20$, $k_d \rightarrow 5$. На рис. 1–4 представлены результаты моделирования замкнутой системы.

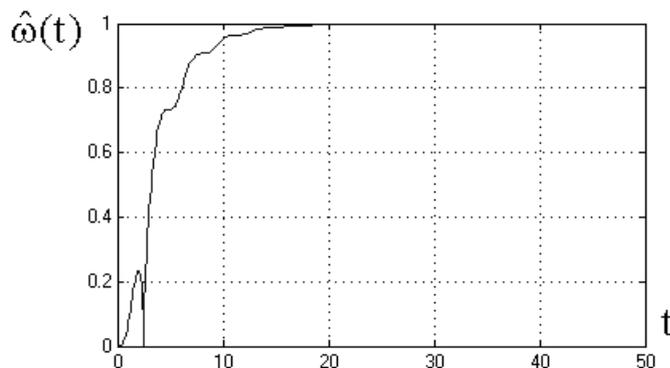


Рис. 1. Переходный процесс для $\hat{\omega}(t)$ при возмущающем воздействии $\bar{w}(t) = \sin(t)$, $k = 1000$, $\alpha = 1$

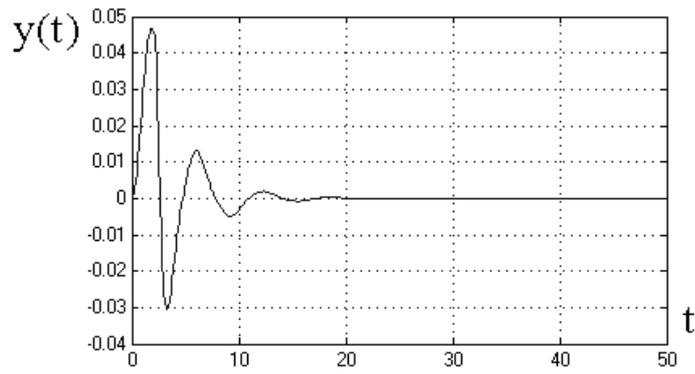


Рис. 2. Переходный процесс для $y(t)$ при возмущающем воздействии $\bar{w}(t) = \sin(t)$, $k = 1000$, $\alpha = 1$

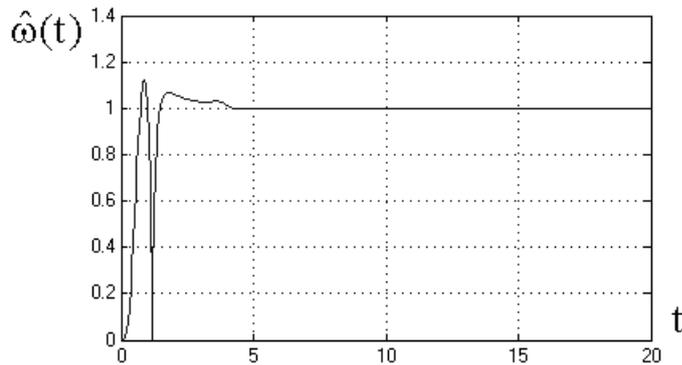


Рис. 3. Переходный процесс для $\hat{w}(t)$ при возмущающем воздействии $\bar{w}(t) = \sin(t)$, $k = 10000$, $\alpha = 2$

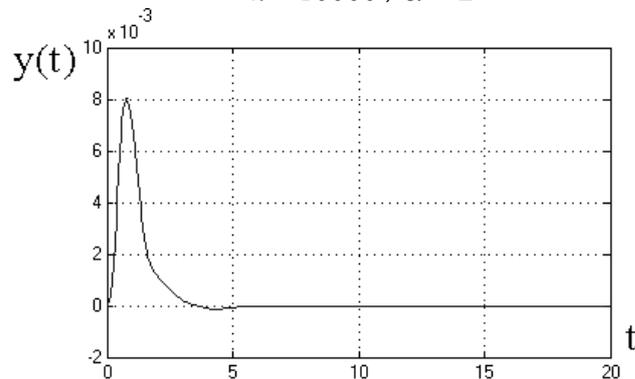


Рис. 4. Переходный процесс для $y(t)$ при возмущающем воздействии $\bar{w}(t) = \sin(t)$, $k = 10000$, $\alpha = 2$

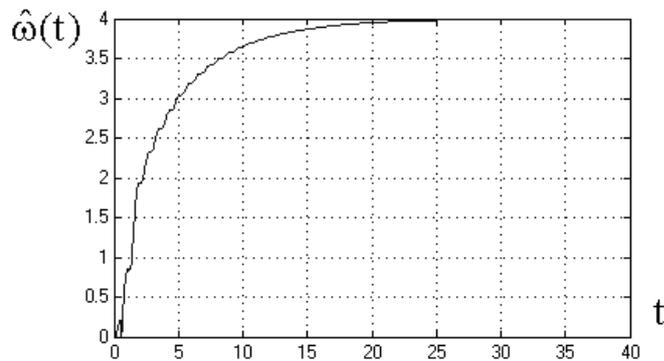


Рис. 5. Временная диаграмма для $\hat{w}(t)$ при возмущающем воздействии $\bar{w}(t) = 3 \sin(4t + 5)$, $k = 1000$, $\alpha = 2$

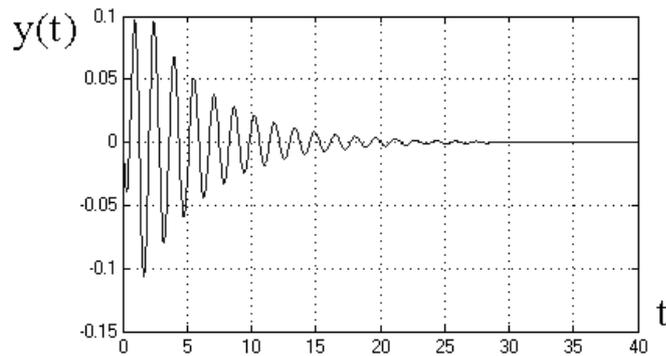


Рис. 6. Временная диаграмма для $y(t)$ при возмущающем воздействии $\bar{w}(t) = 3 \sin(4t + 5)$, $k = 1000$, $\alpha = 2$

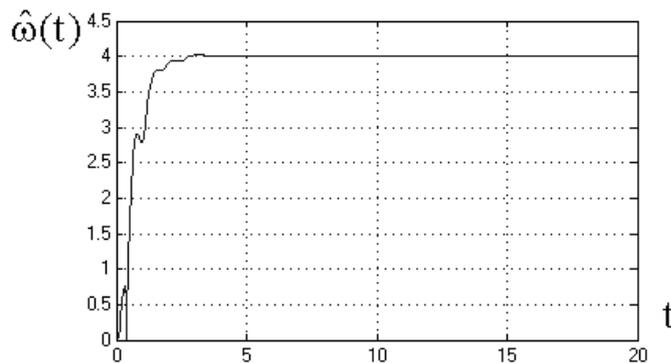


Рис. 7. Временная диаграмма для $\hat{\omega}(t)$ при возмущающем воздействии $\bar{w}(t) = 3 \sin(4t + 5)$, $k = 1000$, $\alpha = 10$

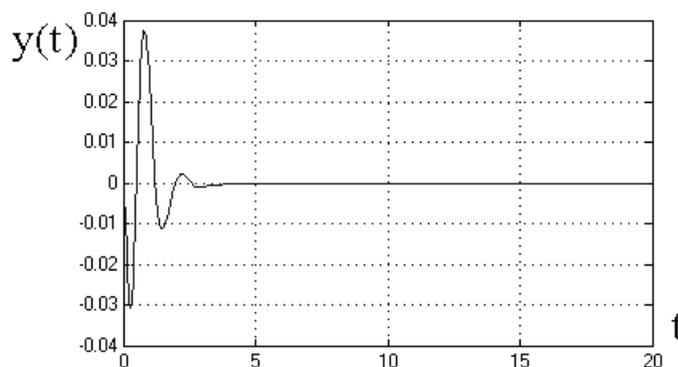


Рис. 8. Временная диаграмма для $y(t)$ при возмущающем воздействии $\bar{w}(t) = 3 \sin(4t + 5)$, $k = 1000$, $\alpha = 10$

Рассмотрим возмущающее воздействие вида $\bar{w}(t) = 3 \sin(4t + 5)$, для которого справедливы соотношения $\omega = 4$, $L \approx 0,033$, $\varphi \approx -1,5$. Закон управления (2.23) обеспечивает $\hat{\omega} \rightarrow 4$, $\hat{L} \rightarrow 0,033$, $\hat{\varphi} \rightarrow -1,5$, $k_p \rightarrow 2,36$, $k_d \rightarrow 7,65$. На рис. 5–8 представлены результаты моделирования замкнутой системы.

Заключение

В статье предложен алгоритм компенсации (2.23) параметрически неопределенного гармонического возмущения, действующего на линейный объект управления (1.1). В развитие результатов [1–3] допускалось, что относительная степень объекта управления может быть любой, что, в свою очередь, расширяет область применения предложенного результата.

Литература

1. Marino R., Santosuosso G.L., Tomei P. Robust adaptive compensation of biased sinusoidal disturbances with unknown frequency // Automatica. – 2003. – V.39. – P. 1755–1761.
2. Alexey Bobtsov, Artem Kremlev. Adaptive compensation of biased sinusoidal disturbances with unknown frequency // 16th IFAC World Congress, Prague, 2005.
3. Бобцов А.А. Алгоритм управления по выходу с компенсацией гармонического возмущения со смещением // АиТ. – 2008. – №7.
4. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления: Учеб. пособ. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 616 с.
5. Арановский С.В., Бобцов А.А., Кремлев А.С., Лукьянова Г.В. Робастный алгоритм идентификации частоты синусоидального сигнала // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2007. – №3. – С. 1–6.

Бобцов Алексей Алексеевич

— Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, доктор технических наук, профессор, bobtsov@mail.ru

Пыркин Антон Александрович

— Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, a.pyrkin@gmail.com

Колюбин Сергей Александрович

— Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, студент, ksa_tau@mail.ru

Рогожина Ксения Петровна

— Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, студент, xenia_r@pochta.ru

Слинченкова Мария Владимировна

— Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, студент, n_e_l_l@mail.ru

УДК 517.946:518.12:538.3:538.5

**ПРИМЕНЕНИЕ ТЕХНОЛОГИИ ВЫДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ
ПРИ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ
КВАДРУПОЛЬНОЙ ЛИНЗЫ**

М.М. Корсун, А.Н. Игнатъев, М.Э. Рояк

Приводятся вариационная и конечноэлементная постановки трехмерных задач магнитостатики с выделением нормального поля и использованием двух скалярных потенциалов. Применение рассматриваемого подхода показано на примере решения задачи численного моделирования квадрупольной линзы.

Ключевые слова: численное моделирование, магнитостатика, ускорители заряженных частиц

Введение

Довольно часто при моделировании трехмерных физических процессов, в том числе и магнитостатических, искомое поле имеет достаточно хорошее приближение, получаемое как решение другой, возможно, двумерной задачи, которое можно получить с более высокой точностью, чем требуется от решения исходной задачи. В том случае, если разница результатов решений рассматриваемых задач составляет не более 10–15%, можно построить более эффективные как в плане вычислительных затрат, так и в плане точности расчетные схемы, учитывающие это обстоятельство. В этих схемах, основанных на выделении основной части поля, ставится задача нахождения разницы полей, являющихся решением двух рассматриваемых задач, причем требования к точности решения такой задачи существенно ослабляются в силу того, что разница является достаточно малой по сравнению с искомым решением [1, 2].

Рассмотрим вычислительную схему, являющуюся модификацией схемы решения трехмерных задач магнитостатики с использованием двух потенциалов, с выделением главной части поля.

Математическая модель для метода скалярных потенциалов

Будем считать, что рассматриваемое магнитное поле имеет довольно хорошее приближение в виде решения более простой задачи, определяющей напряженность магнитного поля \vec{H}^0 , которая удовлетворяет системе уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H}^0 = \vec{J}^0, \\ \operatorname{div}(\mu^0 \vec{H}^0) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где \vec{J}^0 – плотность стороннего тока, μ^0 – относительная магнитная проницаемость среды. Заметим, что \vec{J}^0 и μ^0 могут как совпадать с соответствующими величинами полной задачи, так и отличаться от них. Решение исходной задачи

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}, \\ \operatorname{div}(\mu \vec{H}) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

будем искать в виде

$$\vec{H} = \vec{H}^0 + \vec{H}^+, \quad (3)$$

считая вектор-функцию \vec{H}^0 известной и удовлетворяющей системе (1), при этом будем называть поле \vec{H}^0 нормальным, а поле \vec{H}^+ – аномальным (или добавочным).

Учитывая соотношения (1), (3), систему (2) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} \text{rot}(\vec{H}^+) = \vec{J} - \vec{J}^0, \\ \text{div}(\mu\vec{H}^+ + (\mu - \mu^0)\vec{H}^0) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Важно отметить, что в случае равенства токов полной и нормальной задач первое уравнение системы (4) будет иметь нулевую правую часть, и в этом случае решение задачи нахождения аномального поля \vec{H}^+ является достаточно простым за счет возможности представления его в виде градиента некоторой функции. В дальнейшем будем рассматривать общий случай, учитывающий, что поле \vec{H}^+ не является безвихревым.

Аналогично тому, как это сделано в [3], выделим в расчетной области Ω полной задачи две подобласти: область Ω_p , содержащую токи $\vec{J} - \vec{J}^0$, с относительной магнитной проницаемостью $\mu = 1$, и область Ω_ψ , содержащую ферромагнитные материалы. Обратим особое внимание на тот факт, что токи аномальной задачи представляют собой разность токов исходной и нормальной задач, при этом по-прежнему должно выполняться условие, что никакой контур, лежащий в области Ω_ψ , не должен охватывать ненулевой ток.

В области Ω_ψ добавочное поле \vec{H}^+ является безвихревым, а значит, его можно определить как градиент некоторой функции ψ (полного потенциала):

$$\vec{H}^+ = \vec{H}_\psi^+ = -\text{grad} \psi. \quad (5)$$

В области Ω_p добавочное поле \vec{H}^+ имеет ненулевой ротор, потому определим его как сумму двух полей – создаваемого разностью токов $\vec{J} - \vec{J}^0$ в однородном пространстве и градиентом функции p (неполного потенциала). Таким образом, в области Ω_p

$$\vec{H}^+ = \vec{H}_c^+ + \vec{H}_p^+ = \vec{H}_c^+ - \text{grad} p, \quad (6)$$

где $\text{rot}(\vec{H}_c^+) = \vec{J} - \vec{J}^0$, $\text{div}(\vec{H}_c^+) = 0$.

Вариационная постановка и конечноэлементная дискретизация

При определении добавочного поля \vec{H}^+ , согласно формулам (5), (6), первое уравнение системы (4) автоматически выполнилось, поэтому потенциалы ψ и p будем искать как решение второго дифференциального уравнения этой системы в области Ω . При этом выберем область Ω настолько большой, чтобы на ее границах можно было положить $\vec{H} = \vec{H}^+ + \vec{H}^0 = 0$. Для решения этого уравнения перейдем к эквивалентной вариационной формулировке, умножив это уравнение на пробную функцию v и проинтегрировав по Ω :

$$\int_{\Omega} \text{div}(\mu\vec{H}^+ + (\mu - \mu^0)\vec{H}^0) v d\Omega = 0. \quad (7)$$

Представив область Ω в виде объединения областей полного и неполного потенциалов Ω_Ψ и Ω_p , перейдем от уравнения (7) к уравнению

$$\int_{\Omega_\Psi} \operatorname{div}(\mu \bar{H}^+ + (\mu - \mu^0) \bar{H}^0) \upsilon d\Omega + \int_{\Omega_p} \operatorname{div}(\mu \bar{H}^+ + (\mu - \mu^0) \bar{H}^0) \upsilon d\Omega = 0.$$

Далее, подставляя в полученное равенство соотношения (5), (6) и учитывая, что в области Ω_p $\mu = 1$, а поле \bar{H}_c^+ является соленоидальным, получим

$$\int_{\Omega_\Psi} \operatorname{div}(\mu \bar{H}_\Psi^+ + (\mu - \mu^0) \bar{H}^0) \upsilon d\Omega + \int_{\Omega_p} \operatorname{div}(\bar{H}_p^+ + (1 - \mu^0) \bar{H}^0) \upsilon d\Omega = 0. \quad (8)$$

Применяя к каждому слагаемому в левой части равенства (8) формулу Грина интегрирования по частям и учитывая, что на внешней границе S области Ω $\bar{H}^0 + \bar{H}^+ = \vec{0}$, перейдем к следующему соотношению:

$$\begin{aligned} & - \int_S \mu^0 \bar{H}^0 \upsilon d\bar{S} - \int_{\Omega_p} \bar{H}_p^+ \operatorname{grad} \upsilon d\Omega - \int_{\Omega_p} (1 - \mu^0) \bar{H}^0 \operatorname{grad} \upsilon d\Omega + \\ & + \int_{S_p} \bar{H}_p^+ \upsilon d\bar{S} + \int_{S_p} (1 - \mu^0) \bar{H}^0 \upsilon d\bar{S} - \int_{\Omega_\Psi} \mu \bar{H}_\Psi^+ \operatorname{grad} \upsilon d\Omega - \int_{\Omega_\Psi} (\mu - \mu^0) \bar{H}^0 \operatorname{grad} \upsilon d\Omega + \\ & + \int_{S_\Psi} \mu \bar{H}_\Psi^+ \upsilon d\bar{S} + \int_{S_\Psi} (\mu - \mu^0) \bar{H}^0 \upsilon d\bar{S} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

В данном равенстве S_Ψ – граничная поверхность между областями Ω_Ψ и Ω_p с нормалью \bar{n}_Ψ , внешней для области Ω_Ψ , а поверхность S_p – та же поверхность, но с нормалью \bar{n}_p , внешней для области Ω_p . Таким образом, нормали \bar{n}_Ψ и \bar{n}_p являются противоположно направленными, а значит, определив нормаль единым образом, например, $\bar{n} = \bar{n}_\Psi$, и обозначив соответствующую поверхность S_u , поверхностные интегралы в соотношении (9) можно свести в один. Используя в объемном интеграле единое обозначение μ для магнитной проницаемости во всей области Ω , получим:

$$\begin{aligned} & - \int_S \mu^0 \bar{H}^0 \upsilon d\bar{S} - \int_{\Omega_p} \bar{H}_p^+ \operatorname{grad} \upsilon d\Omega - \int_{\Omega_\Psi} \mu \bar{H}_\Psi^+ \operatorname{grad} \upsilon d\Omega - \\ & - \int_{\Omega} (\mu - \mu^0) \bar{H}^0 \operatorname{grad} \upsilon d\Omega + \int_{S_u} (\mu \bar{H}_\Psi^+ - \bar{H}_p^+ + (\mu - \mu_\Psi^0) \bar{H}_\Psi^0 - (1 - \mu_p^0) \bar{H}_p^0) \upsilon d\bar{S} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где \bar{H}_Ψ^0 и \bar{H}_p^0 – нормальное поле, а μ_Ψ^0 и μ_p^0 – относительные магнитные проницаемости в прилегающих к поверхности областях полного и неполного потенциалов соответственно.

Рассмотрим более подробно выражение, стоящее внутри полученного поверхностного интеграла. Заметим, что на поверхности S_u нормальные составляющие вектора магнитной индукции как нормального, так и суммарного поля должны быть непрерывны. Это условие можно записать в виде следующей системы:

$$\begin{cases} \left[\mu (\bar{H}_\Psi^0 + \bar{H}_\Psi^+) \right]_n = \left[\bar{H}_p^0 + \bar{H}_p^+ + \bar{H}_c^+ \right]_n, \\ \left[\mu_\Psi^0 \bar{H}_\Psi^0 \right]_n = \left[\mu_p^0 \bar{H}_p^0 \right]_n. \end{cases} \quad (11)$$

Из первого уравнения системы (11) получаем

$$\left[\vec{H}_c^+ \right]_n = \left[\mu \left(\vec{H}_\psi^0 + \vec{H}_\psi^+ \right) - \vec{H}_p^0 - \vec{H}_p^+ \right]_n.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \left[\mu \vec{H}_\psi^+ - \vec{H}_p^+ + \left(\mu - \mu_\psi^0 \right) \vec{H}_\psi^0 - \left(1 - \mu_p^0 \right) \vec{H}_p^0 \right]_n = \\ & = \left[\vec{H}_c^+ - \mu_\psi^0 \vec{H}_\psi^0 + \mu_p^0 \vec{H}_p^0 \right]_n = \left[\vec{H}_c^+ \right]_n. \end{aligned} \quad (12)$$

С учетом равенства (12), справедливого на поверхности S_u , уравнение (10) может быть записано в более простом виде:

$$\begin{aligned} & - \int_S \mu^0 \vec{H}^0 \circ \vec{dS} - \int_{\Omega_p} \vec{H}_p^+ \operatorname{grad} \circ d\Omega - \int_{\Omega_\psi} \mu \vec{H}_\psi^+ \operatorname{grad} \circ d\Omega - \\ & - \int_{\Omega} \left(\mu - \mu^0 \right) \vec{H}^0 \operatorname{grad} \circ d\Omega + \int_{S_u} \vec{H}_c^+ \circ \vec{dS} = 0. \end{aligned}$$

Переносим в правую часть все слагаемые, не содержащие неизвестного поля \vec{H}^+ в явном виде, и подставляя выражения (5), (6) для добавочного поля через градиенты скалярных потенциалов, получим окончательное уравнение:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_p} \operatorname{grad} p \operatorname{grad} \circ d\Omega + \int_{\Omega_\psi} \mu \operatorname{grad} \psi \operatorname{grad} \circ d\Omega = \\ & = \int_S \mu^0 \vec{H}^0 \circ \vec{dS} + \int_{\Omega} \left(\mu - \mu^0 \right) \vec{H}^0 \operatorname{grad} \circ d\Omega - \int_{S_u} \vec{H}_c^+ \circ \vec{dS}. \end{aligned} \quad (13)$$

Это уравнение обеспечивает выполнение равенства $\operatorname{div}(\mu \vec{H}) = 0$ в области Ω , а также необходимую для этого непрерывность нормальной составляющей вектора $\mu \vec{H}$ на поверхности $S_u = \Omega_\psi \cap \Omega_p$. Чтобы на границе S_u между областями Ω_ψ и Ω_p выполнялись требуемые для решения исходного уравнения условия сопряжения, зададим соотношение между значениями полного и неполного потенциалов в следующем виде:

$$\psi = p + u, \quad (14)$$

где функция u – скачок (или разрыв) потенциалов аномальной задачи. Значения этой функции на поверхности S_u определяются из условия непрерывности тангенциальной составляющей напряженности суммарного магнитного поля \vec{H} на этой поверхности. Далее для определенности представим область Ω в виде тетраэдров с линейными базисными функциями, а в качестве пробной функции \circ в уравнении (13) будем поочередно выбирать глобальные базисные функции, получаемые сшивкой локальных.

Представим функции ψ и p в виде линейных комбинаций базисных функций ϕ_i :

$$\psi = \sum_{i \in I(\Omega^\psi)} q_i^\psi \phi_i, \quad p = \sum_{i \in I(\Omega^p)} q_i^p \phi_i. \quad (15)$$

Здесь $I(\Omega^\psi)$ – множество индексов узлов сетки, принадлежащих области Ω^ψ , включая ее границы, а $I(\Omega^p)$ – аналогичное множество для области Ω^p . Обозначим множество индексов узлов, принадлежащих поверхности S^u , как $I(S^u)$, т.е. $I(S^u) = I(\Omega^\psi) \cap I(\Omega^p)$. Тогда из равенства (14) следует, что

$$q_i^\Psi = q_i^P + u_i, \quad i \in I(S^u), \quad (16)$$

где u_i – значение скачка потенциалов u в i -ом узле заданной сетки. Подставим выражения (15) в уравнение (13). В результате получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_p} \left(\sum_{i \in I(\Omega_p)} q_i^P \operatorname{grad} \varphi_i \right) \operatorname{grad} \upsilon d\Omega + \int_{\Omega_\Psi} \mu \left(\sum_{i \in I(\Omega_\Psi)} q_i^\Psi \operatorname{grad} \varphi_i \right) \operatorname{grad} \upsilon d\Omega = \\ = \int_S \mu^0 \bar{H}^0 \upsilon \bar{dS} + \int_{\Omega} (\mu - \mu^0) \bar{H}^0 \operatorname{grad} \upsilon d\Omega - \int_{S_u} \bar{H}_c^+ \upsilon \bar{dS}. \end{aligned} \quad (17)$$

Неизвестными в данном уравнении являются q_i^Ψ , $i \in I(\Omega^\Psi)$ и q_i^P , $i \in I(\Omega^P)$, т.е.

узлам с номерами $i \in I(S^u)$ соответствуют по две неизвестные. Чтобы ввести единый вектор неизвестных \vec{q} , размерность которого совпадает с числом узлов конечноэлементной сетки (а, следовательно, и с числом базисных функций), используем соотношение (14). В этом случае компоненты вектора \vec{q} можно определить следующим образом:

$$q_i = \begin{cases} q_i^\Psi, & i \in I(\Omega^\Psi), \\ q_i^P, & i \in I(\Omega^P) \setminus I(S^u). \end{cases}$$

Вводя дополнительный вектор \vec{q}^u той же размерности, что и вектор \vec{q} , компоненты которого определяются соотношениями

$$q_i^u = \begin{cases} u_i, & i \in I(S^u), \\ 0, & i \in (I(\Omega^\Psi) \cup I(\Omega^P)) \setminus I(S^u), \end{cases}$$

перепишем уравнение (17) в виде

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mu \left(\sum_{i=1}^N q_i \operatorname{grad} \varphi_i \right) \operatorname{grad} \upsilon d\Omega - \int_{\Omega_\Psi} \left(\sum_{i=1}^N q_i^u \operatorname{grad} \varphi_i \right) \operatorname{grad} \upsilon d\Omega = \\ = \int_S \mu^0 \bar{H}^0 \upsilon \bar{dS} + \int_{\Omega} (\mu - \mu^0) \bar{H}^0 \operatorname{grad} \upsilon d\Omega - \int_{S_u} \bar{H}_c^+ \upsilon \bar{dS}, \end{aligned}$$

где N – полное число узлов в конечноэлементной сетке.

Выбирая поочередно в качестве пробной функции υ базисные функции, получим систему уравнений, которая в матричном виде может быть записана как $A\vec{q} = \vec{F}$, где

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_{\Omega} \mu \operatorname{grad} \varphi_i \operatorname{grad} \varphi_j d\Omega, \quad i, j = \overline{1, N}, \\ F_j &= \int_{\Omega_p} \left(\sum_{i=1}^N q_i^u \operatorname{grad} \varphi_i \right) \operatorname{grad} \varphi_j d\Omega + \int_{\Omega} (\mu - \mu^0) \bar{H}^0 \operatorname{grad} \varphi_j d\Omega - \\ &- \int_{S_u} \bar{H}_c^+ \bar{n} \varphi_j \bar{dS} + \int_S \mu^0 \bar{H}^0 \varphi_j \bar{dS}, \quad j = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Полученная система уравнений, очевидно, является в общем случае нелинейной, так как коэффициент относительной магнитной проницаемости μ в большинстве ре-

альных задач является функцией от напряженности магнитного поля, аномальная часть которого в области Ω_Ψ определяется через полный потенциал Ψ .

Результаты численного моделирования

Рассмотрим задачу моделирования постоянного магнитного поля в квадрупольной линзе, предложенную ИЯФ СО РАН им. Г.И. Будкера. Дадим описание расчетной области. Конструкция магнита симметрична относительно плоскости $z = 0$, что дает возможность решать задачу в одной, например, верхней его половине при задании соответствующих краевых условий на плоскости симметрии. Также плоскостями симметрии являются плоскости $x = 0$ и $y = 0$. Значит, мы можем перейти к решению задачи в области $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, что позволяет задавать в этой области более подробную сетку, чем это было бы возможно при решении задачи во всей конструкции. Требуемая симметрия обеспечивается краевыми условиями первого рода на границах $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$.

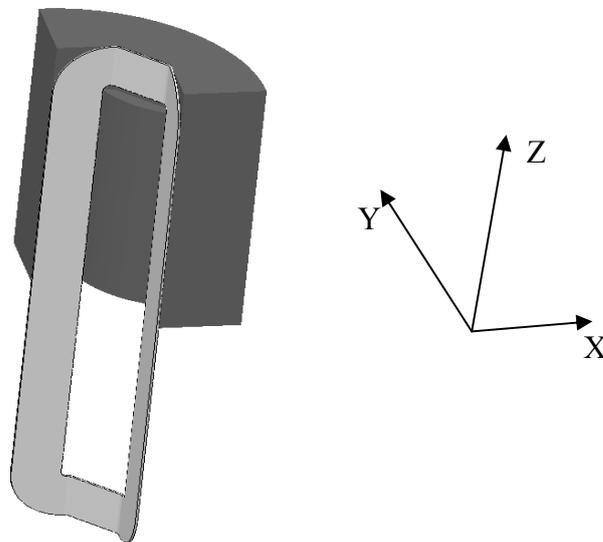


Рис. 1. Трехмерная конструкция

На рис. 1 представлена часть расчетной области, обладающая ферромагнитными свойствами. Высота рассматриваемого фрагмента – 68.8 см, внешний радиус – 42 см, толщина боковых стенок – 16.5 см. Полюс магнита в плоскости $z = const$ описывается гиперболой, радиус гиперболы 23 см, высота полюса – 56 см.

Таким образом, в полной конструкции было четыре полюса, на каждом из которых была расположена токовая обмотка. Плотность тока во всех четырех обмотках одинакова и составляет 1780 кА/см^2 , сечение обмоток – $0.5 \times 11.26 \text{ см}$, при этом направление токов в обмотках меняется при переходе к следующему полюсу.

Базовое сечение расчетной области, с учетом удаленных границ большого объема для задания первых краевых условий, имеет вид, представленный на рис. 2, а; на рис. 2, б, представлена дискретизация базового сечения конечными элементами.

Квадрупольная линза имеет хорошее двумерное приближение, поэтому для ее моделирования можно очень эффективно применить технологию выделения нормального поля, поскольку мы можем очень точно решить двумерную задачу, а затем перейти к решению трехмерной задачи на аномалию. Для решения двумерной задачи воспользуемся постановкой с вектор-потенциалом. Стационарное магнитное поле описывается уравнением

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{J}, \quad (18)$$

где \vec{J} – плотность тока, \vec{B} – вектор магнитной индукции, μ – коэффициент магнитной проницаемости среды. Вводя векторный потенциал \vec{A} такой, что $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$, преобразуем уравнение (18) к виду

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{J}. \quad (19)$$

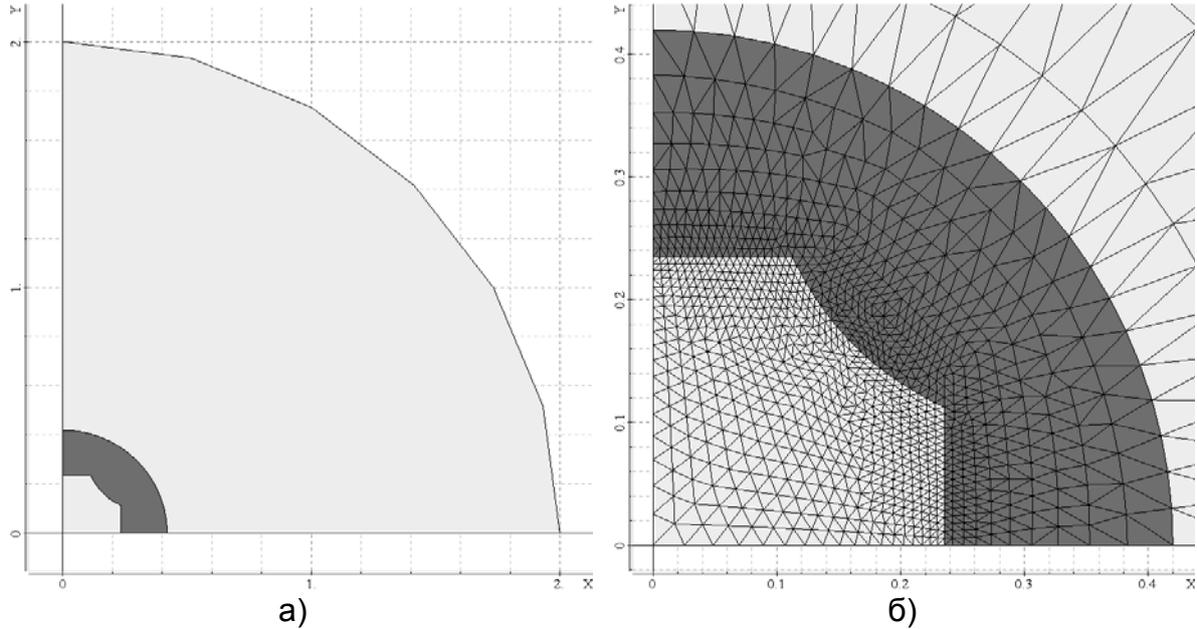


Рис. 2. Базовое сечение расчетной области

В рассматриваемой двумерной задаче вектор плотности тока \vec{J} и векторный потенциал \vec{A} имеют только одну ненулевую компоненту, т.е. $\vec{J} = (0, 0, J_z)$ и $\vec{A} = (0, 0, A_z)$. Это позволяет переписать уравнение (19) в скалярном виде:

$$-\operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{grad} A_z \right) = J_z. \quad (20)$$

На внешней границе Γ расчетной области положим A_z равным нулю:

$$A_z|_{\Gamma} = 0. \quad (21)$$

Используя найденное из уравнения (20) с краевыми условиями (21) распределение A_z , компоненты вектора магнитной индукции вычисляем по формулам

$$\vec{B}_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}, \quad \vec{B}_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}.$$

Так как решение рассматриваемой двумерной задачи используется как нормальное поле для решения другой задачи, его необходимо получить с очень высокой точностью, поэтому конечноэлементная сетка для решения этой задачи была взята очень подробной. Число узлов при конечноэлементной дискретизации составило 688168. Использование столь подробной сетки для решения задачи в трехмерной постановке, очевидно, нереально. На рис. 3 представлено распределение вектор-потенциала \vec{A} .

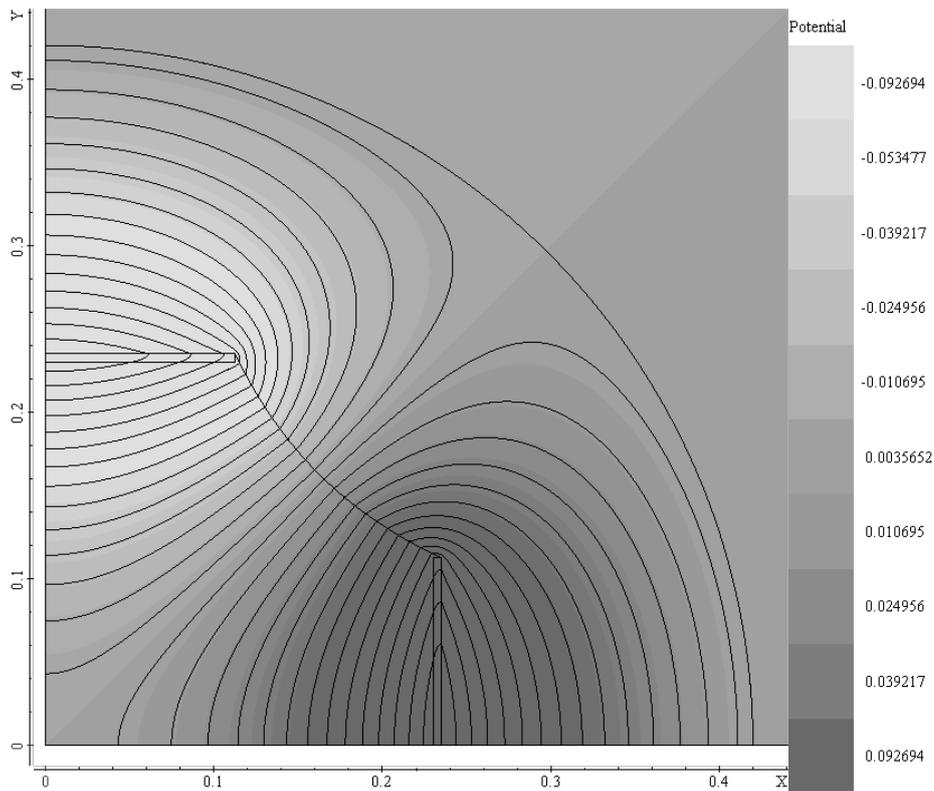


Рис. 3. Решение двумерной задачи

Искомыми характеристиками, которые применяются на практике для оценки качества квадрупольной линзы, являются гармоники магнитного поля \vec{B} . Гармоники представляют собой коэффициенты ряда Фурье:

$$A_n = \frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi r} I_B \sin\left(n \frac{\varphi}{r}\right) r d\varphi, \quad B_n = \frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi r} I_B \cos\left(n \frac{\varphi}{r}\right) r d\varphi,$$

где n – номер гармоники, r – радиус, на котором проводятся измерения, а величина I_B рассчитывается по формуле $I_B = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{B}_{\varphi}(r, \varphi) dz$. В силу симметрии конструкции все гармоники $A_n = 0$, а ненулевыми являются только гармоники B_n с номерами $n = 4i - 2$, $i = \overline{1, \infty}$.

Оценим эффективность применения технологии выделения поля, вычислив гармоники с номерами 2, 6 и 10 при $r = 19$ см, $\alpha = 0$ см, $\beta = 56$ см, в сравнении с результатами, полученными непосредственно при решении трехмерной исходной задачи (2). Для этого решим задачи (2) и (4) на вложенных конечноэлементных сетках, при этом за грубую примем сетку с числом узлов 28368 (дискретизация базового сечения такой сетки изображена на рис. 2, б). Следовательно, удвоенная и учетверенная трехмерные сетки будут содержать 217469 и 1708689 узлов соответственно. При этом оценку точности конечноэлементной аппроксимации построенной трехмерной сетки для решения задачи (2) напрямую дополнительно проверим следующим образом: зададим ферромагнитную часть расчетной области и обмотки как бесконечно длинные. В этом случае мы фактически будем решать двумерную задачу, т.е. в любом сечении $z = const$ получим двумерное решение, точность которого будем оценивать путем сравнения с решением двумерной задачи на подробной сетке (используемым как нормальное поле).

| | B_2 | B_6 | B_{10} |
|------------------------------------------------------------------------|------------|------------|------------|
| Двумерное решение (нормальное поле) | 0.50528427 | 0.00004262 | 0.00000254 |
| Решение исходной трехмерной задачи как двумерной на грубой сетке | 0.50477600 | 0.00029760 | 0.00001469 |
| Решение исходной трехмерной задачи как двумерной на удвоенной сетке | 0.50510539 | 0.00028654 | 0.00005079 |
| Решение исходной трехмерной задачи как двумерной на учетверенной сетке | 0.50521215 | 0.00010346 | 0.00001654 |

Таблица 1. Результаты вычисления гармоник на основе двумерных решений

| | B_2 | B_6 | B_{10} |
|--------------------------------------------------------------------|-------------|-------------|------------|
| Решение исходной трехмерной задачи на грубой сетке | 0.49887337 | -0.00011270 | 0.00052052 |
| Решение исходной трехмерной задачи на удвоенной сетке | 0.49909997 | 0.00000941 | 0.00057038 |
| Решение исходной трехмерной задачи на учетверенной сетке | 0.49910367 | -0.00011407 | 0.00053633 |
| Решение задачи с выделением аномальной части на грубой сетке | 0.50067227 | -0.00060202 | 0.00039387 |
| Решение задачи с выделением аномальной части на удвоенной сетке | 0.50094538 | -0.00057088 | 0.00039105 |
| Решение задачи с выделением аномальной части на учетверенной сетке | 0.501045418 | -0.00056978 | 0.00041062 |

Таблица 2. Результаты вычисления гармоник на основе трехмерных решений

Из полученных результатов (табл. 1) решения двумерной задачи (нормальное поле) и трехмерной задачи как двумерной видим, что трехмерность задачи вносит существенную погрешность в решение. С дроблением конечноэлементной сетки, конечно, трехмерное решение постепенно сходится к точному решению, однако вычислительные затраты, например, на учетверенной сетке являются уже критическими, и дальнейшие дробления практически невозможны.

Рассмотрим результаты решения трехмерных задач, приведенные в табл. 2. Здесь следует отметить, что аномалия поля достаточно низка, т.е. на 2–3 порядка меньше нормального поля. Вследствие этого можем утверждать, что технология выделения поля уже на самой грубой сетке дает результаты гораздо точнее, чем решение трехмерной задачи (2) напрямую на самой подробной сетке.

Заключение

Разработанная вычислительная схема реализована в конечноэлементном программном комплексе TELMA и довольно эффективно применяется для решения сложных практических задач.

Построенная вычислительная схема решения трехмерных задач магнитостатики с использованием скалярных потенциалов, основанная на выделении главной части напряженности магнитного поля, позволяет получить более высокую точность решения, чем исходная схема, при проведении расчетов на одной и той же конечноэлементной сетке. Чтобы получить такую же точность базовым методом, необходима гораздо более подробная сетка, использование которой приводит к значительному увеличению потребностей в ресурсах ЭВМ и временных затрат на решение поставленной задачи.

Высокая точность и эффективность такой вычислительной схемы, основанной на том, что главная часть поля определяется из решения более простых (двумерных) задач

с высокой точностью, продемонстрирована на примере решения практической задачи моделирования магнитостатического поля в квадрупольной линзе.

Литература

1. Игнатъев А.Н., Рояк М.Э. Выделение основной части поля при решении трехмерных нелинейных задач магнитостатики // Актуальные проблемы электронного приборостроения. Материалы 8 междунар. конф. – Новосибирск, 2006. – Т. 6. – С. 37–44.
2. Соловейчик Ю.Г., Рояк М.Э., Персова М.Г. Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач: Учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. – 869 с.
3. Шурина Э.П., Соловейчик Ю.Г., Рояк М.Э. Решение трехмерных нелинейных магнитостатических задач с использованием двух потенциалов. – Новосибирск, 1996. – 28 с. (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. ВЦ; № 1070).

Корсун Мария Михайловна

— Новосибирский государственный технический университет, аспирант, maria.korsun@gmail.com

Игнатъев Александр Николаевич

— Новосибирский государственный технический университет, аспирант, ignat@hotmail.ru

Рояк Михаил Эммануилович

Новосибирский государственный технический университет, кандидат технических наук, доцент, royak@fmp.ami.nstu.ru

УДК 519.6

ТРЕХМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ САМОГРАВИТИРУЮЩЕГО ГАЗА

И.М. Куликов, В.А. Вшивков

Получены равновесные конфигурации вращающегося самогравитирующего газа в результате трехмерного моделирования нестационарных процессов в гравитирующей газовой системе с самосогласованным полем. Описан метод численной реализации, использование которого позволило исключить влияние направления сеточных линий и эмпирических параметров на решение.

Ключевые слова: газовая динамика, математическое моделирование, уравнение Пуассона, тесты ударной трубы, равновесные конфигурации

Введение

Моделирование в астрофизике является основной методикой изучения нелинейных процессов эволюции космических структур и проверки теорий возникновения Вселенной. Вначале при создании космологических моделей использовались методики решения задачи многих тел. Для моделирования процессов видимой Вселенной требуется вводить дополнительные физические процессы. В первую очередь возникает необходимость введения газового компонента, связанного с темной материей через влияние сил гравитации. На современном этапе наиболее актуально численное моделирование нестационарной и пространственно трехмерной динамики гравитирующего газа [1, 2].

В настоящее время из всего широкого диапазона численных методов используются следующие: лагранжев метод сглаженных частиц SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics), в основе которого лежит интерполяция расчетных ячеек в области сглаживания [3], и эйлеровы методы на адаптивных сетках AMR (Adaptive Mesh Refinement), базирующиеся в основном на кусочно-параболическом методе PPM (piece-parabolic method) [4], который является конечно-разностным методом высокого порядка точности типа метода Годунова. Метод сглаженных частиц SPH, разработанный в 1977 г. [5, 6], имеет большие воз-

возможности адаптации к любой геометрии задачи. Более того, лагранжева природа метода позволяет локально изменять разрешение, которое «автоматически» следует за локальной массовой плотностью. Введение адаптивных сеток (Adaptive Mesh Refinement) позволяет повысить точность сеточных методов решения газодинамических задач. Такие особенности, как развитие больших градиентов в ударных волнах или контактных разрывах, особенно для сжимаемого течения, без использования переопределяемой адаптивной сетки становятся источниками ошибок для всего решения. Методика AMR путем локального переопределения сетки оптимизирует качество численного решения. При использовании такого подхода стало возможным изучение физических процессов отдельно или совместно с астрофизическими течениями в широком диапазоне временных и пространственных масштабов.

В ходе эксплуатации разработанных кодов, помимо численного моделирования астрофизических задач, можно получить интересные результаты фундаментального характера, например, построить равновесные конфигурации самогравитирующих газовых тел [7–12]. Хорошо известны равновесные конфигурации самогравитирующей вращающейся жидкости [13]. Аналитическим путем можно получить равновесные конфигурации самогравитирующего вращающегося газа только при условии наличия ограничений на газодинамические параметры [13]. Задачу получения равновесных конфигураций самогравитирующего вращающегося газа можно решить только в ходе проведения численного эксперимента. Существующее аналитическое решение для стационарного самогравитирующего газового шара в настоящей работе выступает в качестве тестового решения.

Описание численного метода

Рассмотрим систему уравнений газовой динамики, дополненную уравнением Пуассона, в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{v}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho \bar{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{v} \rho \bar{v}) &= -\operatorname{grad}(p) - \rho \operatorname{grad} \Phi, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho E \bar{v}) &= -\operatorname{div}(p \bar{v}) - (\rho \operatorname{grad} \Phi, \bar{v}), \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(p \bar{v}) &= -\operatorname{div}(\bar{v}) p (\gamma - 1), \\ \Delta \Phi &= 4\pi \rho, \\ p &= (\gamma - 1) \rho \varepsilon. \end{aligned}$$

Здесь ρ – плотность, \bar{v} – вектор скорости, p – давление, Φ – потенциал, ρE – плотность полная энергия, ε – внутренняя энергия, γ – показатель адиабаты.

За основу метода решения системы уравнений газовой динамики выбран метод крупных частиц Белоцерковского–Давыдова [14], который ранее применялся для решения газодинамических уравнений без учета гравитации [15], поэтому метод требовал модификаций для решения задач гравитационной газовой динамики. Этот метод обеспечивает автоматическое выполнение законов сохранения массы, импульса и полной энергии. Исходная система газодинамических уравнений решается в три этапа. Система уравнений на первом, эйлеровом, этапе получается из исходной системы уравнений, если в них опустить дивергентные слагаемые плотности потоков массы, компонент импульса и полной энергии. Эта система уравнений описывает процесс изменения пара-

метров газа в произвольной области течения за счет работы сил давления, а также за счет разности потенциалов:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \rho_1 \bar{v}_1}{\partial t} = -\text{grad}(p) - \rho \text{grad} \Phi, \quad \frac{\partial \rho_1 E_1}{\partial t} = -\text{div}(p \bar{v}) - \rho (\text{grad} \Phi, \bar{v}), \quad \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\text{div}(\bar{v}) p (\gamma - 1).$$

Система уравнений на втором, лагранжевом, этапе, содержит дивергентные слагаемые и отвечает за процесс конвективного переноса газодинамических величин:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \text{div}(\rho_2 \bar{v}_2) = 0, \quad \frac{\partial \rho_2 \bar{v}_2}{\partial t} + \text{div}(\rho_2 \bar{v}_2 \bar{v}_2) = 0, \quad \frac{\partial \rho_2 E_2}{\partial t} + \text{div}(\rho_2 E_2 \bar{v}_2) = 0, \quad \frac{\partial p_2}{\partial t} + \text{div}(p_2 \bar{v}_2) = 0.$$

На каждом временном шаге решение уравнений неразрывности, движения, полной и внутренней энергии сводится к последовательной реализации эйлера и лагранжева этапов. В качестве начального условия для эйлера этапа берется значение функций с предыдущего момента времени, для лагранжева этапа начальным условием является решение с эйлера этапа.

Значения внутренней энергии независимо вычисляются с целью контроля выполнения законов сохранения как полной, так и внутренней энергии [16]. Контроль, происходящий на заключительном этапе, осуществляется перенормировкой схемных скоростей переноса массы, импульса и двух видов энергий на лагранжевом этапе метода Белоцерковского–Давыдова. Такая перенормировка сохраняет направление скорости, корректируя его длину.

Введем в трехмерной области решения равномерную прямоугольную сетку с узлами $x_i = ih$, $y_i = kh$, $z_i = lh$, где $i = 1 \dots I_{\max}$, $k = 1 \dots K_{\max}$, $l = 1 \dots L_{\max}$, h – шаг сетки в трех направлениях, $I_{\max}, K_{\max}, L_{\max}$ – количество узлов по направлениям x, y, z :

$$h = \frac{r_x}{I_{\max}}, \quad h = \frac{r_y}{K_{\max}}, \quad h = \frac{r_z}{L_{\max}}. \quad \text{Определим ячейки, имеющие своими вершинами во-}$$

$$\text{семь узлов, через их центры с координатами } x_{i+1/2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \quad y_{i+1/2} = \frac{y_i + y_{i+1}}{2},$$

$$z_{i+1/2} = \frac{z_i + z_{i+1}}{2}. \quad \text{Для численной реализации необходимо перейти от функций с непре-}$$

рывными аргументами к дискретным наборам чисел, их заменяющих. Определим в узлах только компоненты вектора скорости $v_{\xi, ikl}^n = v_{\xi}(x_i, y_k, z_l, t^n)$, где $\xi = x, y, z$, остальные газодинамические параметры определим в ячейках $f_{ikl}^n = f(x_{i+1/2}, y_{k+1/2}, z_{l+1/2}, t^n)$, где

$$f = \rho, \rho v_{\xi}, p, T, \Phi.$$

Рассмотрим подробнее численную реализацию первого этапа. Для исключения влияния направлений координатных линий используем операторный подход [17].

$$\begin{aligned} \rho_{ikl} &= \rho_{ikl}^n, \\ \frac{\rho_{ikl} v_{x, ikl} - \rho_{ikl}^n v_{x, ikl}^n}{\tau} &= -\frac{p_{i+1, kl}^n - p_{i-1, kl}^n}{2h_x} - \rho_{ikl}^n \frac{\Phi_{i+1, kl}^n - \Phi_{i-1, kl}^n}{2h_x}, \\ \frac{\rho_{ikl} v_{y, ikl} - \rho_{ikl}^n v_{y, ikl}^n}{\tau} &= -\frac{p_{i, k+1, l}^n - p_{i, k-1, l}^n}{2h_y} - \rho_{ikl}^n \frac{\Phi_{i, k+1, l}^n - \Phi_{i, k-1, l}^n}{2h_y}, \\ \frac{\rho_{ikl} v_{z, ikl} - \rho_{ikl}^n v_{z, ikl}^n}{\tau} &= -\frac{p_{ik, l+1}^n - p_{ik, l-1}^n}{2h_z} - \rho_{ikl}^n \frac{\Phi_{ik, l+1}^n - \Phi_{ik, l-1}^n}{2h_z}, \\ \frac{\rho_{ikl} E_{ikl} - \rho_{ikl}^n E_{ikl}^n}{\tau} &= -\frac{p_{i+1, kl}^n m(v_{x, i+1, kl}^n) - p_{i-1, kl}^n m(v_{x, i-1, kl}^n)}{2h_x} - \\ & - \frac{p_{i, k+1, l}^n m(v_{y, i, k+1, l}^n) - p_{i, k-1, l}^n m(v_{y, i, k-1, l}^n)}{2h_y} - \frac{p_{ik, l+1}^n m(v_{z, ik, l+1}^n) - p_{ik, l-1}^n m(v_{z, ik, l-1}^n)}{2h_z} \end{aligned}$$

$$-\left(m(v_{x,ikl}^n) \rho_{ikl}^n \frac{\Phi_{x,i+1,kl}^n - \Phi_{x,i-1,kl}^n}{2h_x} + m(v_{y,ikl}^n) \rho_{ikl}^n \frac{\Phi_{y,i,k+1,l}^n - \Phi_{y,i,k-1,l}^n}{2h_y} + m(v_{z,ikl}^n) \rho_{ikl}^n \frac{\Phi_{z,ik,l+1}^n - \Phi_{z,ik,l-1}^n}{2h_z} \right),$$

$$\frac{p_{ikl} - p_{ikl}^n}{\tau} = -(\gamma - 1) p_{ikl}^n \left(\frac{m(v_{x,i+1,kl}^n) - m(v_{x,i-1,kl}^n)}{2h_x} + \frac{m(v_{y,i,k+1,l}^n) - m(v_{y,i,k-1,l}^n)}{2h_y} + \frac{m(v_{z,ik,l+1}^n) - m(v_{z,ik,l-1}^n)}{2h_z} \right).$$

Схема является консервативной и аппроксимирует уравнения второго порядка по пространству и первого порядка по времени.

На лагранжевом этапе реализуется конвективный перенос плотности, импульса, полной и внутренней энергии через грани ячеек со схемной скоростью. Схемная скорость не соответствует искомой скорости газа, которая определяется после завершения лагранжева этапа системы как результирующая итоговых значений импульса и плотности. Перемещенную по одному из направлений (x, y, z) долю значения физической величины можно записать в виде $a = \left| \frac{\tau v_\xi}{h_\xi} \right|$, где $v_\xi = \frac{\rho v_\xi}{\rho}$. Значение каждой газодинамической величины разделяется между исходной ячейкой и семью соседними. Поток через грани, ребра и вершины ячейки газодинамического параметра M , $M = \rho, \rho \bar{v}, \rho E, p$ имеют следующий вид: $M(1-a_y)(1-a_z)a_x$ – поток через грань, ортогональную оси x ,

$M(1-a_x)(1-a_z)a_y$ – поток через грань, ортогональную оси y , $M(1-a_x)(1-a_y)a_z$ – поток через грань, ортогональную оси z , $M(1-a_x)a_y a_z$ – поток через ребро, параллельное оси x , $M(1-a_y)a_x a_z$ – поток через ребро, параллельное оси y , $M(1-a_z)a_x a_y$ – поток через ребро, параллельное оси z , $Ma_x a_y a_z$ – поток через вершину. В ячейке остается

$M(1-a_x)(1-a_y)(1-a_z)$. Здесь $a_\xi = \left| \frac{\tau v_\xi}{h_\xi} \right|$.

С целью получения разностной схемы со свойством инвариантности относительно вращения применяется модифицированный расчет скоростей переноса на лагранжевом этапе [18]:

$$\bar{v}_\xi = \frac{V_{\xi_1}}{1 + \frac{\tau}{h_\xi} (V_{\xi_1} - V_{\xi_2})},$$

где V_ξ – осредненная скорость на внешней грани, когда направление вектора скорости совпадает с направлением внешней нормали, или внутренней грани, ортогональной оси ξ , в противном случае. В программной реализации лагранжева этапа направление перемещения величин учитывается через определение знаков компонент вектора скорости ($\text{sign } x, \text{sign } y, \text{sign } z$).

На заключительном этапе на каждом временном шаге производится корректировка баланса энергий [19]. С этой целью осуществляется перенормировка схемных скоростей переноса массы, импульса и двух видов энергий на лагранжевом этапе метода Белоцерковского–Давыдова:

$$\|V_i^n\| = \sqrt{2 \left(E_i^n - \frac{1}{\rho_i^n} \frac{p_i^n}{\gamma - 1} \right)}.$$

Таким образом, происходит корректировка длины вектора скорости при неизменном направлении. Такая модификация метода обеспечивает справедливость детального баланса энергий. Заметим, что разностная схема не становится полностью консервативной, поскольку коррекция скорости вносит погрешность в закон сохранения импульса.

Решение уравнения Пуассона основано на разложении функции потенциала и плотности в виде суперпозиции по собственным функциям оператора Лапласа [20]. Ис-

пользуя 27-точечный шаблон, получим следующую формулу перехода в пространстве гармоник от амплитуды гармоник плотности к амплитудам гармоник потенциала:

$$\varphi_{jmn} = - \frac{4\pi h^2 \rho_{jmn}}{6 \left(1 - \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 \left(\frac{\pi j}{I} \right) \right) \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 \left(\frac{\pi m}{K} \right) \right) \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 \left(\frac{\pi n}{L} \right) \right) \right)}.$$

Основной вычислительной сложностью является нахождение амплитуд гармоник, поэтому оно реализовано с помощью быстрого преобразование Фурье.

Тестирование газодинамической части программы

Так как в астрофизике математическое моделирование зачастую выступает единственной возможностью подтвердить или опровергнуть новые теории, то исследователи особенно нуждаются в применении надежных и заслуживающих доверия программ. Прежде чем представлять новые результаты моделирования, необходимо провести разнообразные тестовые расчеты для обоснования и верификации используемой программы. Верификация и обоснование – основные этапы развития для любой технологии, будь это пакет программ для математического моделирования или инструментарий для наблюдений. Для вычислительной технологии целью такого этапа тестирования является оценка правомерности и точности моделирования. В области вычислительной гидродинамики проделана большая работа по обоснованию и верификации [21].

В процессе создания комплекса программ проводилась верификация численного алгоритма на тестах с решениями из специализированного банка данных [22]. Рассмотрим результаты тестирования на задачах Годунова и исследование работы численного метода на границе газ–вакуум. Тесты Годунова основаны на решении задачи распада разрыва. В расчетной области $[0; \Omega]$ задан скачок значений плотности, давления и скорости, время счета t , $\gamma = 1.4$ (см. табл. 1).

| ρ_1 | V_1 | p_1 | ρ_2 | V_2 | p_1 | x_0 | Ω | t |
|----------|---------|---------|----------|----------|--------|-------|----------|-------|
| 2 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | 1.0 | 2 | 0.2 |
| 1 | 0.75 | 1 | 0.125 | 0 | 0.1 | 0.3 | 1 | 0.2 |
| 1 | -2 | 0.4 | 1 | 2 | 0.4 | 0.5 | 1 | 0.15 |
| 1 | 0 | 1000 | 1 | 0 | 0.01 | 0.5 | 1 | 0.012 |
| 5.99924 | 19.5975 | 460.894 | 5.99242 | -6.19633 | 46.095 | 0.4 | 1 | 0.035 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1.0 | 2 | 0.4 |

Таблица 1. Начальные данные для задач Годунова и распространения газа в вакууме

Целью теста №1 является определение правильности описания контактного разрыва. Большинство методов решения газодинамических уравнений дает либо осцилляцию, либо диффузию («размазывание» ударных волн) [22]. Метод Белоцерковского–Давыдова дает размазывание решения в области контактного разрыва, которое уменьшается с дроблением сетки (рис. 1, a1, б1, в1, г1).

Отличие теста №2 от первого состоит в задании начальной скорости газа с левой части ударной трубы. Особенность постановки приводит к провоцированию усиленного размазывания ударных волн. При дроблении сетки размазывание ударной волны уменьшается (рис. 1, a2, б2, в2, г2).

В ходе теста №3 газ с одинаковыми термодинамическими параметрами разлетается в разные стороны, образуя в центре существенную область разрежения. Тест выявляет способность физически правдоподобно моделировать такую ситуацию. Из литературы

известно, что многие методы дают ошибочный (нефизический) рост температуры в области сильного разрежения, как следствие, получаемое решение искажается. Метод Белоцерковского–Давыдова успешно моделирует область разрежения (рис. 1, а3, б3, в3, г3).

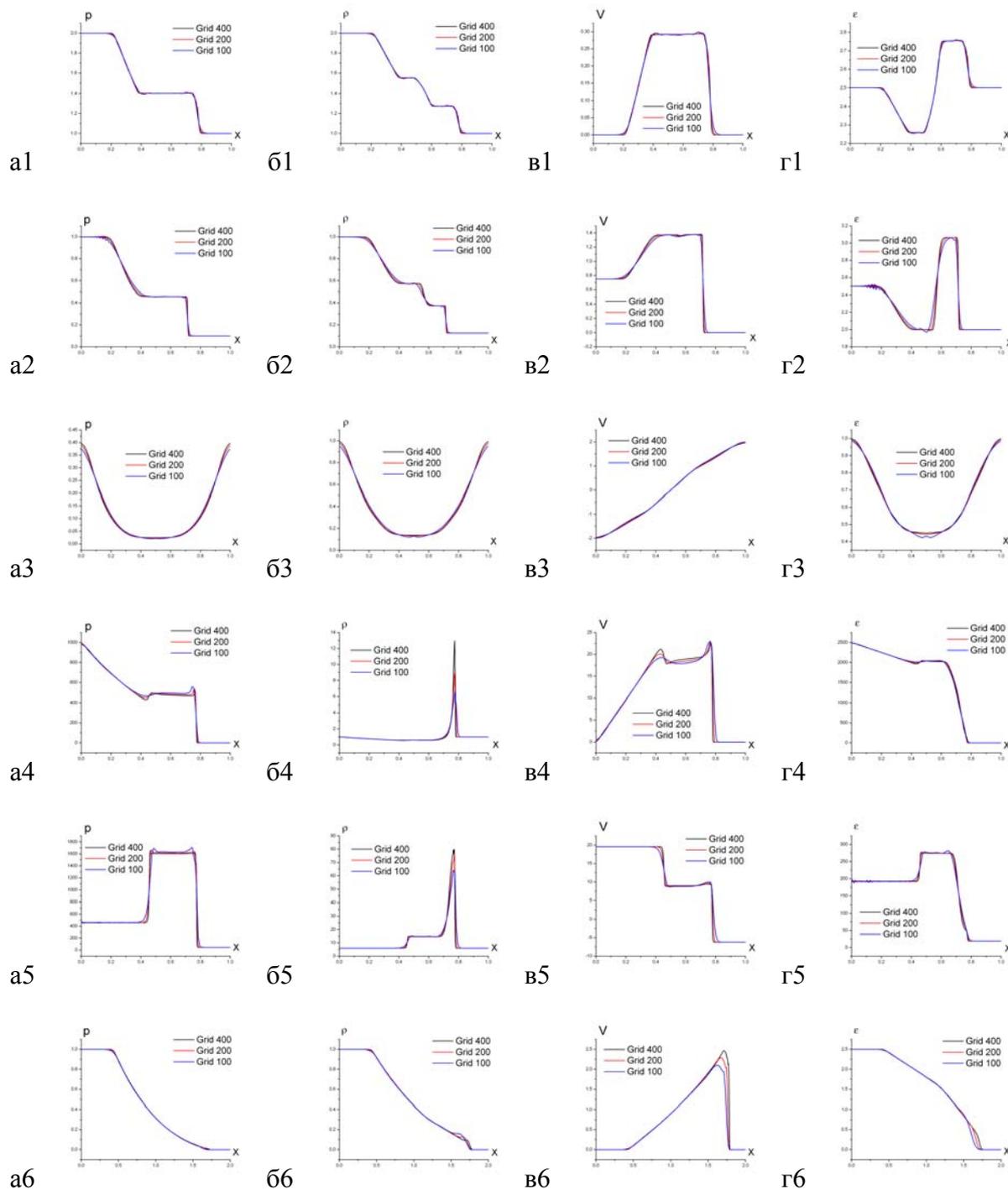


Рис. 1. Распределение давления (а), плотности (б), скорости (в), внутренней энергии (г). Тесты № 1–6

Основная задача теста №4 – проверка устойчивости численного метода. Огромный перепад давления (5 десятичных порядков) должен выявить способность метода устойчиво моделировать сильные возмущения с возникновением быстро распространяющихся ударных волн. Графики на рис. 1, а4, б4, в4, г4, показывают, что имеют место малые осцилляции решения в области контактного разрыва. Так называемая волна-

предшественник (ступенька на графике внутренней энергии на правом фронте ударной волны) отражена корректно, без размазывания, что говорит в пользу метода.

Особенностью теста №5 является наличие трех разрывов: две ударные волны и один контактный разрыв, движущийся направо. При дроблении сетки сокращаются осцилляции давления и скорости и уменьшается размазывание ударных волн (рис. 1, а5, б5, в5, г5).

Тест №6 предназначен для проверки точности воспроизведения решения на границе газ–вакуум методом крупных частиц. Из рис. 1, аб, бб, вб, гб, видно, что газодинамические функции на границе газ–вакуум являются гладкими и ограниченными, имеет место характерный пик плотности на границе, совпадающий с экспериментальными данными.

Получение равновесных фигур самогравитирующего газа

Как показывают наблюдения [7], большая часть звезд находится в состоянии гидростатического равновесия, и поэтому значительный интерес с точки зрения астрофизики представляют различные стационарные и квазистационарные образования вращающегося самогравитирующего газа. Особенно важно исследовать процессы, которые приводят начальную конфигурацию газового облака к таким стационарным состояниям. Облако газа может либо коллапсировать под действием сил гравитации, либо разлетаться под действием сил давления. Равновесные конфигурации самогравитирующих облаков газа являются результатом равновесия этих двух процессов [23]. В качестве начального приближения используем стационарную конфигурацию самогравитирующего газового шара. При введении в начальное распределение небольших значений угловой скорости (как постоянных, так и вытекающих из закона Кеплера) удастся получить последовательность равновесных фигур вращающегося самогравитирующего газа.

Рассмотрим подробнее результаты численного моделирования задачи о самогравитирующем газовом шаре. Расчетная область задана в виде куба. Область заполнена вакуумом. В центре области находится самогравитирующее газовое облако в форме шара с заданным начальным распределением плотности и давления.

В качестве начальных данных для системы уравнений возьмем гидростатически равновесную стационарную конфигурацию, которую можно найти [24, 25], задав распределение плотности, из системы уравнений газовой динамики, дополненной уравнением Пуассона, записанных в сферических координатах:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dr} = -\frac{M(r)\rho}{r^2} \\ \frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho \\ p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon \end{cases}.$$

Существование аналитического решения позволяет рассматривать эту задачу в качестве тестовой. Выберем радиус шара $r_0 = 1$ и начальное распределения плотности в виде

$$\rho_0(r) = \begin{cases} 1-r, & r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases}.$$

Тогда начальные распределения давления и гравитационного потенциала имеют вид

$$p_0(r) = \begin{cases} -\frac{\pi r^2}{36}(9r^2 - 28r + 24) + \frac{5\pi}{36}, & r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases}, \quad \Phi_0(r) = \begin{cases} -\frac{\pi}{3}(r^3 - 2r^2) - \frac{2\pi}{3}, & r \leq 1 \\ -\frac{\pi}{3r}, & r > 1 \end{cases}.$$

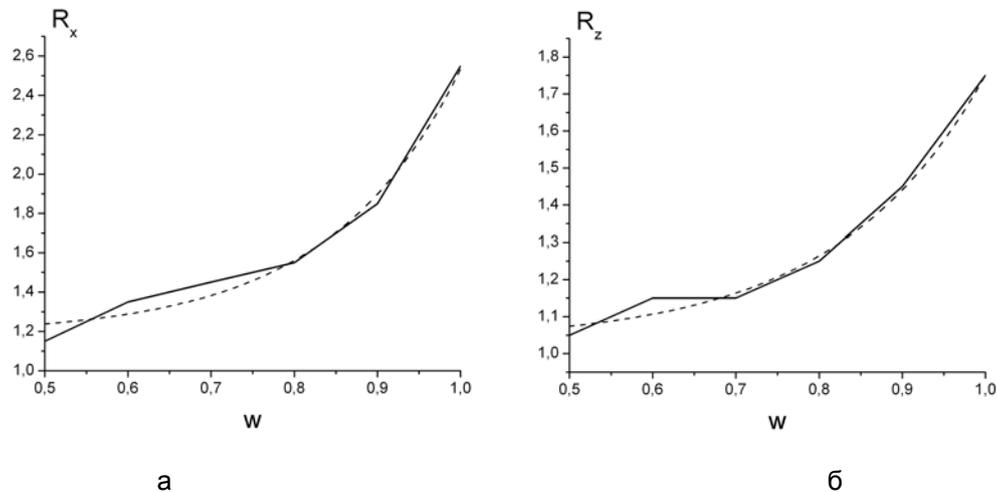


Рис. 2. Изменение формы самогравитирующего газового шара при вращении. Зависимость длин полуосей эллипса (а, б) от угловой скорости (сплошная линия) и ее аппроксимация (пунктирная линия)

Угловая скорость ω должна удовлетворять условию

$$0 < \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \omega^2 r^2 d\Omega < 0.4 \left| \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \Phi d\Omega \right|.$$

С увеличением угловой скорости самогравитирующий газовый шар принимает форму эллипсоида вращения, полуоси которого можно аппроксимировать функциями (рис. 2)

$$R_x(w) = 2.35 \cdot 10^{-3} \exp\left(\frac{w}{0.15736}\right) + 1.18171, \quad R_z(w) = 2.52 \cdot 10^{-3} \exp\left(\frac{w}{0.17686}\right) + 1.03146.$$

Параллельная реализация программы для модели общей памяти

Большие объемы обрабатываемых данных и большое время счета заставляют использовать суперкомпьютеры. Данная задача требует использования суперкомпьютеров с распределенной памятью, для начала ограничимся архитектурой с общей памятью. Суть реализации алгоритма решения задачи гравитационной газовой динамики – независимые вычисления газодинамических параметров на трех этапах. Для параллельной реализации программы для модели общей памяти используется библиотека OpenMP [26, 27], в основе которой находится модель fork-join. Программа разработана для SMP-системы calc2.amn.nstu.ru факультета прикладной математики и информатики Новосибирского государственного университета.

Выводы

В статье изложены результаты моделирования динамики самогравитирующих газовых объектов. Эволюция облака газа описывается системой уравнений газовой динамики с учетом уравнения Пуассона для гравитационного потенциала. Описан метод численной реализации, использование которого позволило исключить влияние направления сеточных линий и эмпирических параметров на решение. Приведены результаты верификации газодинамической части результирующей численной модели. В результа-

те трехмерного моделирования нестационарных процессов в гравитирующей газовой системе с самосогласованным полем получены равновесные конфигурации вращающегося самогравитирующего газа. Получены аналитические зависимости длин полуосей эллипсоида – формы тела вращения газового облака. Разработана параллельная программа для модели общей памяти.

Работа выполнена при поддержке программы Рособразования «Развитие научного потенциала ВШ» (проект РНП.2.2.1.1.3653).

Литература

1. Снытников В.Н., Пармон В.Н. Жизнь создает планеты? // Наука из первых рук. – 2004. – Т. 0. – С. 20–31.
2. Снытников В.Н., Вшивков В.А., Дудникова Г.И., Никитин С.А., Пармон В.Н., Снытников А.В. Численное моделирование гравитационных систем многих тел с газом // Вычислительные технологии. – 2002. – Т. 7. – № 3. – С. 72–84.
3. Monaghan J.J., Gingold R.A. Shock simulation by the particle method SPH // Journal of computational Physics. – 1983. – Vol. 52. – P. 374–389.
4. Collela P., Woodward P.R. The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations // J. Comp. Phys. – 1984. – V.54. – P. 174–201.
5. Gingold R.A., Monaghan J.J. SPH: theory and application to non-spherical stars // Monthly Notices Royal Astronomical Society. – 1977. – Vol. 181. – P. 375–389.
6. Lucy L.B. A numerical approach to the testing of fusion process // Astronomical Journal. – 1977. – Vol. 88. – P.1013–1024.
7. Тассуль Ж.Л. Теория вращающихся звезд. – М.: Наука, 1982. – 472 с.
8. Абакумов М.В., Мухин С.И., Попов Ю.П., Четкин В.М. Исследование равновесных конфигураций газового облака вблизи гравитирующего центра // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – 1995. – №33.
9. Баранов В.Б. Устойчивость течений в гидроаэромеханике // Соросовский образовательный журнал. – 1999. – №9. – С. 106–111.
10. Богоявленский О.И. Автомодельные адиабатические движения самогравитирующего газа в звездах // Письма в ЖЭТФ. – Т 27. – В.2. – С. 91–94.
11. Aksenov A.G., Blinnikov S.I. A Newton iteration method for obtaining equilibria of rapidly rotating stars // Astronomy and Astrophysics. – 1994. – 290. – P. 674–681.
12. Nachisu I. A versatile method for obtaining structures of rapidly rotating stars. // The Astrophysical Journal Supplement Series. – 1986. – Vol. 61. – P. 479–507.
13. Лихтенштейн Л. Фигуры равновесия вращающейся жидкости. – Пер. с нем. – М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. – 252 с.
14. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. – М.: Наука, 1982. – 293 с.
15. Программный комплекс FlowVision. – Режим доступа: www.flowvision.ru, свободный
16. Куликов И.М. Численное моделирование самогравитирующего газового облака // Труды конференции молодых ученых ИВМиМГ. – Новосибирск, 2006. – С. 111–117.
17. Вшивков В.А., Лазарева Г.Г., Куликов И.М. Операторный подход для численного моделирования гравитационных задач газовой динамики // Вычислительные технологии. – 2006. – Т. 11. – № 3. – С. 27–35.
18. Вшивков В.А., Лазарева Г.Г., Куликов И.М. Модификация метода крупных частиц для задач гравитационной газовой динамики // Автометрия. – 2007. – Т. 43. – № 6. – С. 56–65.

19. Куликов И.М. Численное моделирование вращения газа в гравитационном поле / Труды XLIII Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». – Новосибир. гос. ун-т. Новосибирск, 2005. – С. 169–173.
20. Вшивков В.А., Лазарева Г.Г., Киреев С.Е., Куликов И.М. Параллельная реализация модели газовой компоненты самогравитирующего протопланетного диска на суперЭВМ // Вычислительные технологии. – 2007. – Т.12. – № 3. – С. 38–52.
21. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 608 с.
22. Toro E.F. A linearised Riemann Solver for the time dependent Euler equations of gas dynamics // Proc. Roy Soc. London. – 1991. – Vol. A434. – P. 683–693.
23. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука, 1992. – 424 с.
24. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1962. – 568 с.
25. Барская И.С., Мухин С.И., Четкин В.М. Математическое моделирование равновесных конфигураций самогравитирующего газа // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – 2006.
26. The OpenMP API specification for parallel programming. – Режим доступа: www.openmp.org, свободный
27. Информационно-аналитический центр parallel.ru – Режим доступа: www.parallel.ru, свободный.

Куликов Игорь Михайлович

— Новосибирский государственный технический университет, аспирант, kulikov@ssd.sgcc.ru

Вшивков Виталий Андреевич

— Новосибирский государственный технический университет, доктор физ.-мат. наук, профессор, vsh@ssd.sgcc.ru

УДК 65.011, 519.256, 004.043

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОИЗВОДСТВЕННО-ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ В ЗАДАЧАХ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СОСТОЯНИЙ

Д.А. Зубок, В.В. Клименко, А.П. Хвастунов

В работе предлагается математическая модель структур данных для автоматизированных систем управления производственными фондами предприятия. Особое внимание уделяется вопросам прогнозирования состояний технической системы. Предложен алгоритм проектирования структуры данных в соответствии с математической моделью.

Ключевые слова: ЕАМ-система, байесовские методы статистического оценивания, надежность технической системы.

Постановка задачи

В последние годы, в рамках решения задачи эффективного управления предприятием, значительное внимание уделяется вопросам управления основными фондами. В соответствии с этим в архитектуре корпоративной информационной системы предприятия выделяется класс ЕАМ-систем. ЕАМ-системы взаимодействуют с информационно-управляющими системами высшего уровня управления предприятием и системами мониторинга и диагностики состояния основных фондов (рис. 1).



Рис. 1. EAM-система в структуре АСУП

EAM-системы проектируются [1] в рамках методологии управления основными фондами производственного предприятия в соответствии с принципами:

- стратегического планирования технического обслуживания;
- сокращения времени неработоспособности восстанавливаемых активов;
- сокращения резервируемых активов;
- управления модернизацией производственных активов.

Основным инструментом достижения объявленных принципов является анализ статистических данных о состояниях отдельных узлов всей системы. Важную роль при этом играет сбор первичной ресурсной статистики. Значительный объем хранимой информации на крупных предприятиях не используется технической и финансовой дирекциями в задачах стратегического планирования по причине отсутствия разработанных для этих целей процедур.

В вопросах организации документооборота, управления техническим обслуживанием на стадии выполнения работ сложились общепринятые стандарты, но на уровне базовых принципов формирования аналитических прогнозов отсутствует доступная методология, модели и рецепты. Для большинства существующих EAM-систем характерно использование прямых статистических методов прогнозирования [2]. В данной работе предлагается использовать байесовские методы статистического оценивания вероятностей состояний технической системы. Одним из преимуществ байесовских методов перед прямыми статистическими методами является меньший объем данных, требуемых для формирования устойчивых прогнозов. Расчету подлежат интенсивности переходов между состояниями объекта. Целесообразность использования байесовских методов обоснована в монографии [3].

В приближении предлагаемой модели техническая система описывается множеством объектов производства. Объект производства – единица оборудования, выполняющая заданную (атомарную) операцию производственного цикла. Объект производства в рамках модели представляется совокупностью узлов. Узлы технической системы характеризуются средним временем безотказной работы или интенсивностями переходов между состояниями работоспособности и отказа. Совокупность состояний отдельных узлов системы определяет состояние всей технической системы.

Использование байесовской схемы в задачах прогнозирования основано на интерпретации данных ресурсной статистики как серии испытаний. Рассматривается схема независимых испытаний n изделий. Каждому i -му испытанию соответствуют два числа, t_i и t_i^* ($i=1,2,\dots,n$), где t_i^* – момент отказа, t_i – момент цензурирования (плановое восстановление ресурса). Моменты отказов t_i^* при отсутствии цензурирования предпо-

лагаются взаимно независимыми одинаково распределенными случайными величинами с функцией распределения $F(t, \theta)$. Выборка $\tau(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$, соответствующая общему плану испытаний, имеет вид $\tau = (t_{i_1}^*, t_{i_2}^*, \dots, t_{i_d}^*, t_{j_1}, t_{j_2}, \dots, t_{j_k})$, $d + k = n$, где множество $I = (i_1, i_2, \dots, i_d)$ образовано из номеров тех узлов системы, для которых наблюдались отказы, а множество $J = (j_1, j_2, \dots, j_k)$ образовано из номеров узлов системы, состояния которых были цензурированы. Все множество величин $(t_1^*, \dots, t_n^*, t_1, \dots, t_n)$ рассматривается как случайный вектор. Модель байесовского оценивания показателей надежности в технических системах детально описана в монографии [1] (рис. 2).

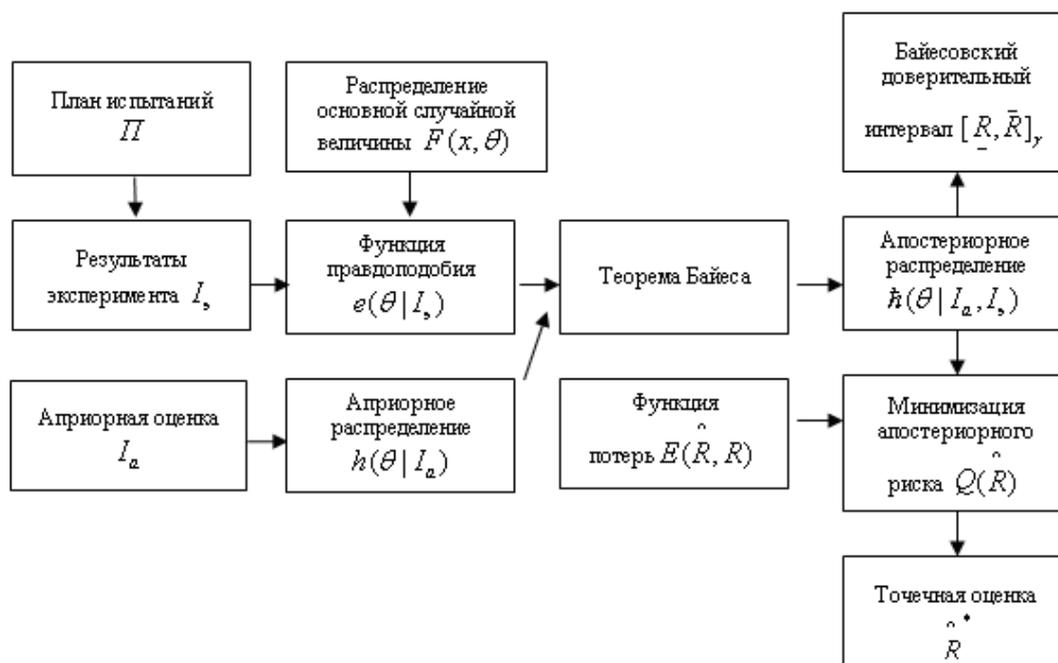


Рис. 2. Принципиальная схема байесовской процедуры оценивания

Одной из составных частей байесовской процедуры оценивания является составление функций правдоподобия. Функции правдоподобия отражают «макроскопический» характер закономерностей, которыми обусловлено состояние технической системы. Существуют рецепты выбора функций правдоподобия для упрощенных моделей. Рассматриваемые модели характеризуются близкими, но не идентичными условиями эксплуатации типовых объектов производства с разным удельным временем эксплуатации и нагрузкой. В простейшем случае для планов испытаний без цензурирования данных функция правдоподобия записывается в виде $e(\theta | \tau) = \prod_{i=1}^n f(\tau_i; \theta)$.

Описание модели

Для решения поставленной задачи – применения байесовского метода – введем следующие множества, отражающие фундаментальные сущности объекта моделирования:

1. множество D объектов производства с элементами d_i ;
2. множество M , элементами которого являются узлы объекта производства, подлежащие восстановлению;

3. множество \tilde{D} , элементы которого \tilde{d}_i являются объединением элементов множества M , т.е. $\tilde{d}_i = \{\mu_{i1}, \mu_{i2}, \dots, \mu_{ip}\}$, где μ_{ip} – элементы множества M . Между множествами \tilde{D} и D существует гомоморфизм по индексу i ;

4. множество T – внутренние часы системы;

5. множество Ψ – множество уникальных идентификаторов всех узлов системы. Между элементами множеств M и Ψ задана функция n , сопоставляющая простейшим элементам системы их тип ($n: M \xrightarrow{n} \Psi$).

Определим следующие подмножества в декартовом произведении множеств $T \times M \times N$: Γ – временная карта сценария работ по поддержке требуемого уровня работоспособности системы, $\Gamma \subset T \times M \times N$; Γ' – временная карта фактически выполненных работ по поддержке требуемого уровня работоспособности системы, $\Gamma' \subset T \times M \times N$; S – карта технического состояния системы, $S \subset T \times M$. Элемент (t, μ) множества $T \times M$ принадлежит множеству S , если выполняется соотношение

$$\left| \lim_{t \rightarrow t_0+0} f(\mu, t) - \lim_{t \rightarrow t_0-0} f(\mu, t) \right| = 1.$$

На построенных множествах определим функции:

- $f: M \rightarrow \{0, 1\}$ – функция состояния узла технической системы (0 – неработоспособна, 1 – работоспособна);
- $\xi: D \rightarrow T$ – время жизни объекта производства;
- $\tau: M \rightarrow T$ – время жизни резервируемого элемента системы;
- $g: M \rightarrow T$ – технический ресурс резервируемого элемента системы;
- $i: \Psi \rightarrow N$ – количество резервируемых элементов (легко показать, что для функций i и n справедливо следующее соотношение: $n(\mu_i) = n(\mu_j) \Rightarrow i(\mu_i) = i(\mu_j)$);
- $m: M \rightarrow N$ – количество восстанавливаемых узлов соответствующего объекта производства с совпадающим номенклатурным номером.

Рассмотрим множество G всех функций g , определенных на M . Задание функции g определяет показатели надежности текущего состояния системы:

$$G = \{g: M \xrightarrow{g} T\}.$$

Введем функцию $\Omega: \Gamma' \times \Gamma \rightarrow G$, которая определяет выбор функции g , заданной на M , и, таким образом, фиксирует текущее состояние показателей надежности системы с учетом ее предыстории.

В дополнение к этому введем функцию L , которая определяет процесс перепланирования работ по поддержанию необходимого уровня работоспособности системы с учетом событий наблюдения и восстановления отказов, входящих в $L: \Gamma' \times \Gamma \rightarrow \tilde{\Gamma}$, где $\tilde{\Gamma}$ – новая временная карта сценария работ.

Состояние системы описывается всей совокупностью заданных функций и их значений, определенных на множествах \tilde{D} , T , M .

В рамках построенной модели выделяется полная группа элементарных событий A , приводящих к переходу системы из одного состояния в другое, отличающееся набором заданных функций и их значением. Описание полной группы управляющих событий выходит за рамки данной работы. Для примера рассмотрим несколько типовых событий системы, приводящих к изменению ее состояния:

1. изменение мощности резервируемых среднесрочных активов – событие, которое переопределяет функцию i ;
2. событие – переход резервируемого элемента объекта производства в состояние отказа – изменяет значение функции f , а также график S ;
3. производство работ – событие в технической системе – приводит к изменению значений функций f, τ, i , заданных на множествах \tilde{D}, T, M , и перестроению графиков S и Γ' ;
4. перепланирование – $\tilde{\Gamma} = L(\Gamma', \Gamma), \Gamma = \tilde{\Gamma}, g = \Omega(\Gamma', \Gamma)$.

Проектирование базы данных

Предлагается следующий алгоритм проектирования структуры данных в соответствии с указанной математической моделью. Для описания множеств (D, M, T) с помощью таблиц реляционных БД используется следующий подход: каждое множество описывается таблицей с одним универсальным ключом, остальные атрибуты являются дополнительной информацией, дающей описание хранимой сущности (их количество и формат зависят от требований к пониманию описанного элемента). Между любым элементом множества и записью в таблице существует взаимно однозначное соответствие. Описанные выше функции f, ξ, τ, g, i, m могут быть представлены либо в виде отдельных таблиц, либо в виде атрибута, если функция является инъекцией.

Рассмотрим все описанные множества. Таблица («*DUSID*») описания множества D содержит следующие атрибуты: *Did* (идентификационный номер объекта эксплуатации), описание объекта (данный атрибут выбран как пример дополнительного ключа). Множество Ψ (таблица «*Type*») описывается следующими атрибутами: *Ψid* (номенклатура), i (идентификатор). Таблица («*Elem*») описания M содержит следующие атрибуты: $\mu_{id}, f(\mu_{id}), g(\mu_{id}), n(\mu_{id}), \tau(\mu_{id}), m(\mu_{id})$. Элементы \tilde{d}_i как совокупность элементов множества M описываются таблицей («*Installs*») с двумя атрибутами *Did* и μ_{id} , являющимися внешними ключами (*foreign key*).

Графики Γ и Γ' предлагается хранить в виде таблиц («*Plans*» и «*History*») с атрибутами μ_{id}, t (время), *Count* (количество восстановленных элементов), F – в виде таблицы с атрибутами μ_{id}, t (время).

Ключевым критерием массивов данных, образующих ресурсную статистику рассматриваемой технической системы, является их полнота и непротиворечивость. Важное требование, предъявляемое к ЕАМ-системе – возможность автоматизировать проверку массивов данных на полноту и непротиворечивость. Одно из достоинств предлагаемой модели – существенная простота организации ее самообследования.

В качестве примера рассмотрим проверку на непротиворечивость данных, основанную на том требовании регламента, что в процессе планового ремонта количество восстановленных однотипных узлов объекта производства не должно превышать заранее установленной величины. В терминах модели и построенных множеств данное условие может быть выражено следующим соотношением: $\Gamma' \Big|_{t, \mu_k} > m_p(\mu_k)$. Запрос к БД на языке SQL выглядит следующим образом:

```
SELECT History.  $\mu_{id}$ 
FROM Plans, Elem, Installs
WHERE
History.  $\mu_{id}$  = Elem.  $\mu_{id}$  and
```

$History.t = t_0$ and
 $Elem.m < History.count$ and
 $Installs.Did = d_0$,

где d_0 и t_0 – заданный объект эксплуатации и дата работ соответственно.

Результатом приведенного запроса, который может генерироваться автоматически, является отчет, содержащий перечень объектов производства, типовых резервируемых элементов, время наступления события и статус проведенных работ.

Заключение

Предложенная модель позволяет на основе единого подхода применять методологию управления основными фондами предприятия (ЕАМ-методология) в приложении к основному и вспомогательному производству и вычислять оценки показателей надежности технической системы.

Литература

1. Петров В.Н. Информационные системы.– СПб: Питер, 2003. – 688 с.
2. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика. Основы моделирования и первичная обработка данных.– М.: Финансы и статистика, 1983.– 471 с.
3. Савчук В.П. Байесовские методы статистического оценивания. Надежность технических объектов. – М.: Наука, 1989. – 328 с.

Зубок Дмитрий Александрович

— Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат физ.-мат. наук, доцент, zubok@mail.ifmo.ru

Клименко Виктор Владимирович

— Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, магистр математики, shurup239@gmail.com

Хвастунов Александр Павлович

— Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, магистр математики, hvast@mail.ru

УДК 536-12; 612.741

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВОЗРАСТНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ НЕРВНО-МЫШЕЧНОЙ СИСТЕМЫ ЧЕЛОВЕКА

А.В. Яценко, С.А. Дёмин, Э.М. Зинатуллин, Р.М. Юльметьев

В работе представлен оригинальный математический метод анализа возрастных изменений нервно-мышечной системы человека. Он основан на теоретико-функциональной технике проекционных операторов и формализме функций памяти Цванцига–Мори. Получены результаты, которые показывают, что с возрастом в динамике выходного силового импульса происходит ослабление эффектов долговременной статистической памяти. Кроме того, найдены существенные изменения в поведении регистрируемых пространственных и спектральных характеристик и обнаружены специфические частоты, отражающие периодические особенности функционирования нервно-мышечной системы человека. Ожидается, что развитый метод окажется полезным для понимания физиологических процессов, происходящих в сложных системах живой природы при старении.

Ключевые слова: анализ временных серий, нервно-мышечная система человека, статистические кванторы памяти, формализм функций памяти Цванцига–Мори

Введение. Физические аспекты биологического старения живых систем

Физическое понимание возрастных изменений, возникающих в дискретной эволюции живых систем при старении, относится к одной из актуальных проблем современной статистической физики. В настоящее время не существует однозначного подхода к количественному описанию биологического старения живых систем. Некоторые результаты в этом направлении были получены ранее на основе традиционных методов анализа экспериментальных временных серий физиологических показателей живых систем и, прежде всего, организма человека. В частности, американские физиологи из группы Дж. Хаусдорффа (J.M. Hausdorff) провели ряд интересных исследований по изучению нарушений, возникающих во фрактальной динамике походки человека при различных заболеваниях и старении [1–5], изменений в динамике походки детей [5], долговременных корреляций в динамике походки молодых людей [4, 6]. Влияние возрастных изменений нервно-мышечной системы на походку человека на основе статистического понимания энтропии было изучено в работе [7]. В работе [8] возрастное изменение «сложности» в стохастической динамике variability сердечного ритма человека было обнаружено методами нелинейного анализа. Авторами [9] показано, что нелинейная динамика может служить индикатором для оценки динамики межшагового интервала человека при старении.

Представление о «физиологической сложности» в рамках фрактального анализа и теории хаоса развивается в работах [10–14]. В частности, в работе [14] показано, как «физиологическая сложность» сердечно-сосудистой системы человека уменьшается при старении и возникновении различных патологий (сердечные аритмии, сердечная недостаточность и т.д.). Детрендрованный флуктуационный анализ (ДФА) [2] позволил обнаружить нарушения фрактальной динамики в функционировании дыхательной системы человека при старении и существенное изменение показателя фрактальности в variability сердечного ритма с возрастом и при различных заболеваниях. Применение ДФА к исследованию возрастных изменений различных систем жизнедеятельности человека можно найти также в работах [15–16]. Кроме вышеперечисленных методов, для выявления специфических особенностей, характеризующих возрастные изме-

нения живых систем, в современной литературе используются также понятия аппроксимационной энтропии $ApEn$ [17], методы мультифрактального анализа [14, 18] и т.д.

В данной работе развивается оригинальный метод анализа пространственно-временных закономерностей функционирования нервно-мышечной системы человека при старении. Он основан на статистической теории дискретных немарковских случайных процессов [19–21]. Для изучения возрастных изменений нервно-мышечной системы человека мы используем экспериментальные данные по вариабельности амплитуды выходного силового импульса [17, 22–23].

Предлагаемые в работе информационные меры памяти позволяют выявить количественные различия, характеризующие функционирование нервно-мышечной системы человека при старении. В частности, нами будет показано, что с возрастом возникает уменьшение времени существования статистической памяти в стохастическом поведении выходного силового импульса. Кроме того, обнаруживаются существенные изменения в пространственной структуре фазовых портретов и спектрах мощности функций памяти.

В заключении мы продемонстрируем, как полученные результаты позволяют эффективно оценивать изменения в функционировании нервно-мышечной системы человека при старении.

Формализм функций памяти

Теория дискретных немарковских процессов [19–21] является конечно-разностным аналогом кинетических уравнений Цванцига–Мори, полученных на основе микроскопических уравнений движения.

Исходным пунктом данной работы служат дискретные временные серии регистрируемых физиологических показателей. Ранее в работах [19, 20] была получена цепочка взаимосвязанных конечно-разностных уравнений для дискретной временной корреляционной функции (ВКФ) $a(t) = \langle \mathbf{A}_k^0(0) \mathbf{A}_{m+k}^m(t) \rangle / \langle |\mathbf{A}_k^0(0)|^2 \rangle$. Здесь введены векторы

начального $\mathbf{A}_k^0(0) = \{\delta x_0, \delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_{k-1}\}$ и текущего $\mathbf{A}_{m+k}^m(t) = \{\delta x_m, \delta x_{m+1}, \delta x_{m+2}, \dots, \delta x_{m+k-1}\}$ состояний живой системы, а величины $\delta x_j = x_j - \langle X \rangle$ представляют собой флуктуации измеряемой переменной X на j -ом шаге. Значения величины X на j -ом шаге определяются как $x_j = X(T + j\tau)$,

$\langle X \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x(T + j\tau)$ – среднее значение дискретного процесса, представленного в виде

временной серии. Исходная ВКФ $a(t) = M_0(t)$ связана с функциями памяти более высокого порядка $M_n(t)$, где $n = 1, 2, 3, \dots$, посредством дискретных уравнений следующего вида:

$$\frac{\Delta M_{n-1}(t)}{\Delta t} = \lambda_n M_{n-1}(t) - \tau \Lambda_n \sum_{j=0}^{m-1} M_n(j\tau) M_{n-1}(t - [j+1]\tau),$$

где λ_n – собственные значения квазиоператора Лиувилля, Λ_n – релаксационные параметры с размерностью квадрата частоты. Заметим, что исходная ВКФ и соответствующие функции памяти, кинетические и релаксационные параметры вычисляются нами непосредственно из экспериментальных данных. Для описания эффектов статистической памяти в дискретной эволюции живых систем мы воспользуемся безразмерными кванторами $\varepsilon_i(v)$, $\delta_i(v)$, определенными ранее в работах [24, 26].

Информационные меры памяти

Первая мера памяти – параметр немарковости. Впервые параметр немарковости ε был предложен в [24–25] для количественной оценки степени марковизации и демарковизации необратимых процессов в конденсированных средах на различных релаксационных уровнях статистического описания. Параметр немарковости позволяет выполнить сопоставление и сравнение времен релаксации начальной ВКФ $\tau_a = \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} a(t_j)$ и функции памяти $\tau_M = \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} M(t_j)$. Простейшим критерием сопостав-

ления времен существования корреляций и памяти в системе служит безразмерное отношение $\varepsilon_1 = \frac{\tau_a}{\tau_M}$. В дальнейшем были введены понятия статистического спектра пара-

метра немарковости и глубины марковизации для неравновесных процессов в неупорядоченных конденсированных средах. Такой спектр определяется в виде набора безразмерных величин в следующем виде: $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}\}$, где $\varepsilon_1 = \frac{\tau_a}{\tau_{M_1}}$, $\varepsilon_2 = \frac{\tau_{M_1}}{\tau_{M_2}}$, $\varepsilon_3 = \frac{\tau_{M_2}}{\tau_{M_3}}$.

Кроме того, для сложных систем негамильтоновой природы в практических приложениях удобным является использование частотной зависимости параметра немарковости. По аналогии с работами [19–20], спектральное обобщение параметра немарковости для дискретной эволюции живых систем имеет вид

$$\varepsilon_i(\nu) = \left\{ \frac{\mu_{i-1}(\nu)}{\mu_i(\nu)} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь $\mu_i(\nu)$ представляет собой спектр мощности функции памяти i -го порядка $M_i(t)$:

$$\mu_i(\nu) = \left| \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} M_i(t_j) \cos(2\pi\nu t_j) \right|^2.$$

В случае, когда $\varepsilon \gg 1$, рассматриваемый стохастический процесс является марковским. Тогда в экспериментальной временной серии проявляется слабая статистическая память. В случае $\varepsilon \approx 1$ процесс характеризуется долговременной статистической памятью и немарковскими эффектами. При $\varepsilon > 1$ исследуемый процесс можно определить как квазимарковский, и он характеризуется умеренной (промежуточной по времени существования) статистической памятью. Таким образом, введенный количественный критерий характеризует степень немарковости релаксационных процессов в дискретной эволюции сложных систем негамильтоновой природы.

Ниже мы покажем, что особый интерес для нас представляет область сверхнизких частот частотного спектра $\varepsilon_1(\nu)$. Именно в этой области содержится информация о дальнедействующих временных корреляциях изучаемого временного сигнала. При этом значение параметра немарковости на нулевой частоте $\varepsilon_1(\nu = 0)$ может служить в качестве количественного индикатора изменений, возникающих при старении в функционировании нервно-мышечной системы человека.

Вторая информационная мера памяти. Специфическую роль эффектов статистической памяти в поведении сложных систем можно также обнаружить при помощи второй информационной меры памяти, впервые предложенной в работе [26]:

$$\delta_i(\nu) = \left| \tilde{M}'_i(\nu) / \tilde{M}'_{i+1}(\nu) \right|,$$

где $\tilde{M}'_i(v) = d\tilde{M}_i(v)/dv$, $\tilde{M}_i(v)$ – Фурье-образ соответствующей функции памяти i -го порядка $M_i(t)$. Статистический квантор δ также удобно представить в виде набора безразмерных величин $\{\delta\} = \{\delta_1(v), \delta_2(v), \delta_3(v), \dots\}$. Данная информационная мера удобна для количественного описания степени проявления эффектов статистической памяти на соответствующих уровнях сложности. В том случае, когда параметр $\delta \gg 1$, динамика дискретного процесса характеризуется дальнедействующими корреляциями и слабой статистической памятью. В пределе при $\delta \rightarrow \infty$ процесс характеризуется δ -образной памятью. При $\delta > 1$ изучаемый процесс определяется эффектами умеренной памяти. В случае, когда $\delta \sim 1$, в динамике случайного процесса наблюдаются эффекты сильной статистической памяти. Численное значение параметра $\delta_1(v=0)$ позволяет также судить о степени проявления дальнедействующих корреляций в вариабельности амплитуды выходного силового импульса людей различных возрастных групп.

Экспериментальные данные – амплитуда выходного силового импульса указательного пальца человека

Для исследования возрастных изменений нервно-мышечной системы человека мы воспользуемся экспериментальными временными сериями амплитуды выходного силового импульса [17, 22–23].

В исследовании участвовали 29 человек трех возрастных групп: молодые люди (young group) – 10 человек, пожилые люди (old group) – 9 человек и старые люди (older-old group) – 10 человек. Средний возраст волонтеров составил 22 ± 1 , 67 ± 2 , 82 ± 5 лет для первой, второй и третьей групп соответственно. Все участники эксперимента были ознакомлены с целью проводимого исследования и дали согласие на проведение экспериментальных процедур.

Экспериментальные временные серии регистрировались при помощи динамометрического датчика Entran ELFS-B3, на который нажимали участники боковой стороной указательного пальца (рис. 1). Круглый датчик диаметром 1,27 см был зафиксирован на столе. Запястья, средние, безымянные пальцы, мизинцы правых рук волонтеров также фиксировались на поверхности стола. Положение локтей правых рук участников эксперимента оставалось постоянным в течение всего времени регистрации выходного силового импульса. Аналоговый сигнал усиливался специальным усилителем и преобразовывался в цифровой формат при помощи 16-битного А/Д конвертора. Сигнал выходного силового импульса отражался на экране монитора.



Рис. 1. Демонстрация эксперимента

Первая часть эксперимента заключалась в вычислении величины максимальной степени нажатия (МСН) [17, 22–23]. Участники последовательно три раза в течение 6 с с максимальной силой нажимали на датчик. Затем полученные результаты были усреднены для каждого человека. Полученное значение и определяется как МСН.

После этого участники эксперимента нажимали на датчик в соответствии с 5, 10, 20 и 40% значениями от МСН. Для каждого уровня нажатия производились две попытки. Участники эксперимента могли регулировать амплитуду выходного силового импульса при помощи экрана монитора, на котором отображались две линии: первая соответствовала процентному выражению МСН участника (5, 10, 20 и 40%), вторая – величине силового нажатия в данный момент времени. Волонтеры нажимали на датчик таким образом, чтобы эти две линии совпадали с наиболее допустимой степенью точности. С подробной информацией о ходе проведения эксперимента можно ознакомиться в работах [17, 22–23].

Обработка экспериментальных данных осуществлялась нами при помощи пакета математических программ Matlab.

Изменение пространственных и спектральных характеристик выходного силового импульса при старении

Каждая экспериментальная серия состояла из 25-секундной записи выходного силового импульса. Шаг дискретизации $\tau=0.01$ с. В течение первых 5 секунд фиксировался контрольный сигнал (затем он исключался из экспериментальной серии).

На рис. 2 представлены фазовые портреты для вариабельности выходного силового импульса двух динамических ортогональных переменных (W_0, W_1) для одного из представителей каждой возрастной группы с уровнями нажатия 5, 10, 20 и 40% от МСН. Численные значения динамических ортогональных переменных (W_0, W_1) вычислялись согласно уравнениям, полученным в работах [19–21]. Подобная структура фазовых облаков характерна и для других представителей из разных возрастных групп людей. Отчетливо проявляется то, что фазовые облака для участника из первой возрастной группы имеют центрированную форму, симметричную относительно начала координат. Пространственные размеры фазовых облаков увеличиваются с увеличением порядкового номера уровня нажатия. Совершенно иная картина наблюдается в случае пожилых и старых волонтеров. Происходит заметная деформация фазовых портретов, что связано с более значительными флуктуациями в динамике выходного силового импульса. Кроме того, заметно увеличение масштабов фазовых облаков. Для представителя третьей возрастной группы обнаруживается стратификация ядер фазовых облаков. Таким образом, возрастные изменения нервно-мышечной системы человека приводят к очевидной деформации (расслоению) пространственно-временных структур в фазовом пространстве. Характерная для каждой возрастной группы форма фазовых облаков позволяет проводить уверенную дифференциацию функционирования нервно-мышечной системы человека при старении.

На рис. 3 приведены усредненные по двум попыткам спектры мощности функции памяти первого порядка $\mu_1(\nu)$ для трех возрастных групп людей (5% от МСН). В частотном поведении функции $\mu_1(\nu)$ для всех представителей первой возрастной группы отчетливо наблюдаются спектральные пики на частотах 20 Гц, 40 Гц. Они отражают периодические особенности функционирования нервно-мышечной системы человека. В частности, данные частоты связаны с синхронизацией функционирования двигательных систем человека [27]. Для второй и третьей возрастных групп происходит смещение спектральных всплесков в область более высоких частот. Подобная картина обнаруживается и для спектров мощности функций памяти более высоких порядков. Таким образом, изменение периодических особенностей в спектрах мощности функций памяти $\mu_i(\nu)$, где $i=0, 1, \dots$, служит надежным индикатором, характеризующим биологическое старение нервно-мышечной системы человека.

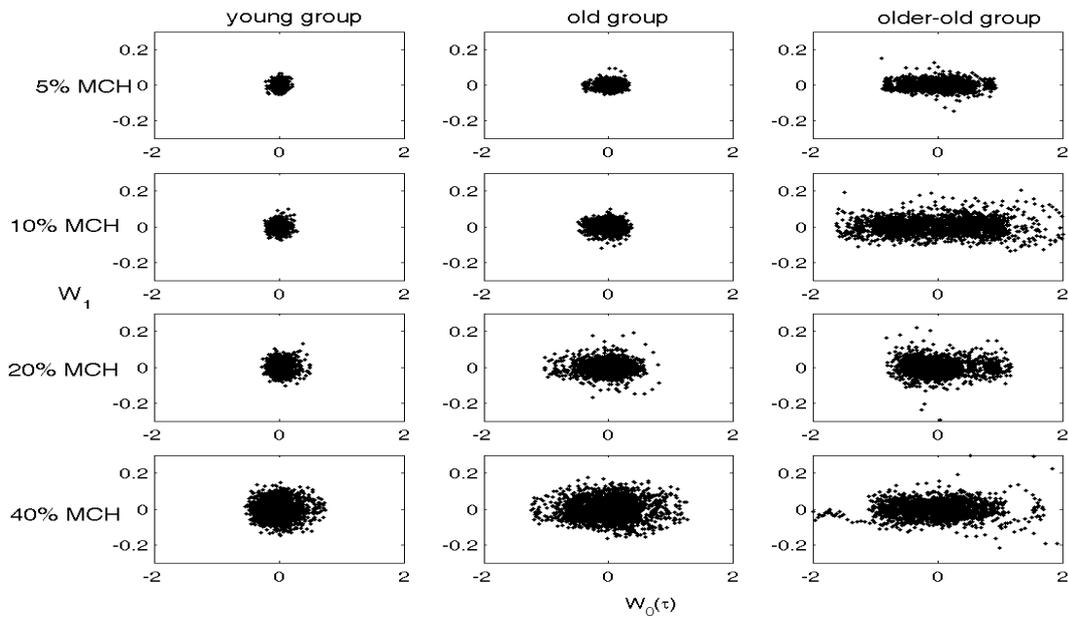


Рис. 2. Плоские проекции фазового портрета двух ортогональных динамических переменных (W_0, W_1) для варибельности выходного силового импульса с различными уровнями силового нажатия. Данные приведены для одного из представителей каждой возрастной группы

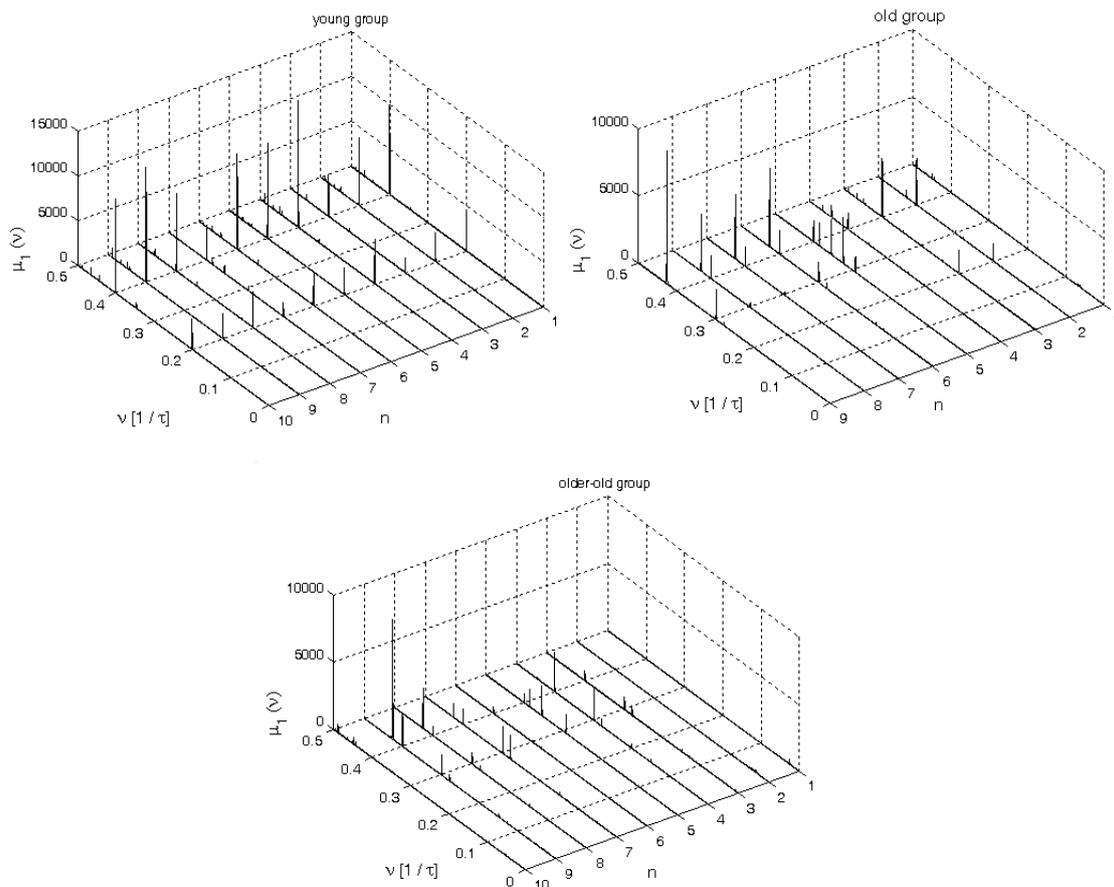


Рис. 3. Усредненные для двух попыток спектры мощности первой функции памяти $\mu_1(v)$ для группы молодых (young group), пожилых (old group) и старых (older-old group) людей. Спектры приведены для 5%-го уровня от МСН

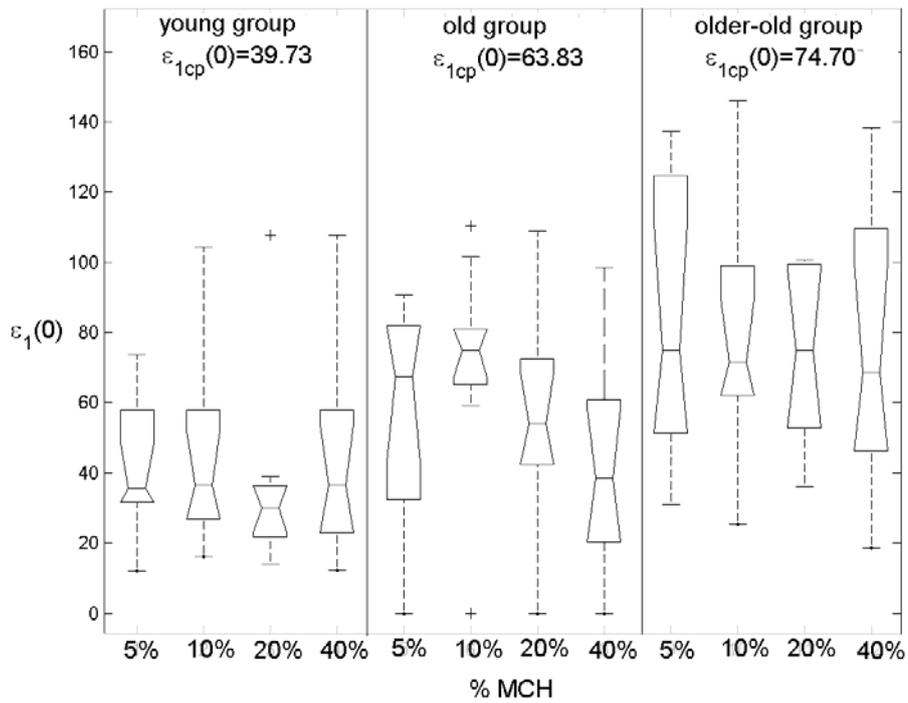


Рис. 4. Численное значение первой точки параметра немарковости $\varepsilon_1(0)$ на нулевой частоте, усредненное по двум попыткам для разных возрастных групп людей (5, 10, 20 и 40% от MCH)

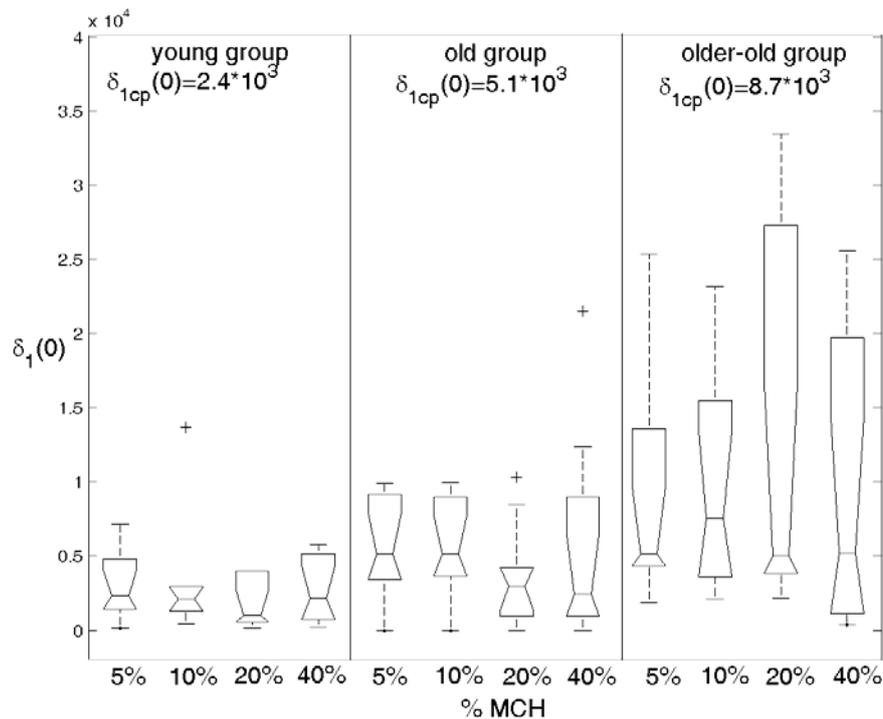


Рис. 5. Значение второй информационной меры памяти на нулевой частоте $\delta_1(v = 0)$, усредненное по двум попыткам для трех возрастных групп людей (при разных уровнях силы надавливания)

На рис. 4 изображена величина первой информационной меры памяти на нулевой частоте $\varepsilon_1(v = 0)$. Средние значения параметра $\varepsilon_1(0)$ для трех возрастных групп составили 39.73, 63.83, 74.70 соответственно. Сравнение данных значений свидетельствует о

почти двукратном увеличении средней величины параметра для пожилых и старых людей по сравнению с молодыми волонтерами. Изменение значений статистического квантора $\varepsilon_1(0)$ отражает значительное ослабление эффектов статистической памяти в функционировании нервно-мышечной системы человека при старении. Таким образом, можно отметить более значительную степень марковских (случайных) компонент в динамике выходного силового импульса пожилых и старых людей. Данное замечание позволяет говорить о заметной марковизации физиологических сигналов при старении.

Информационная мера памяти $\delta_1(\nu)$ позволяет количественно оценить степень проявления эффектов статистической памяти в динамике выходного силового импульса человека. На рис. 5 представлены значения второй информационной меры памяти на нулевой частоте $\delta_1(\nu=0)$, усредненные по двум попыткам для разных возрастных групп людей при разных уровнях силы надавливания. Средние значения параметра $\delta_1(0)$ для трех возрастных групп составили $2.4 \cdot 10^3$ (young group), $5.1 \cdot 10^3$ (old group), $8.7 \cdot 10^3$ (older-old group). Различие в средних значениях статистического квантора памяти для разных возрастных групп людей становится более существенным. Полученные результаты свидетельствуют об очевидной роли эффектов статистической памяти в сигналах нервно-мышечной системы человека при старении.

Заключение

В работе представлен новый статистический метод анализа возрастных изменений, проявляющихся в нервно-мышечной системе человека. Он основан на теоретико-функциональной технике проекционных операторов и формализме статистических функций памяти. Для исследования возрастных изменений нервно-мышечной системы человека нами проанализированы экспериментальные серии вариабельности выходного силового импульса, зарегистрированные при помощи специального динамометрического датчика Entran ELFS-B3. Введенные кванторы статистической памяти позволяют обнаружить отчетливые изменения информационных мер памяти в стохастической эволюции выходного силового импульса для разных возрастных групп людей. Нами обнаружены пространственные и спектральные изменения в фазовых портретах ортогональных динамических переменных и частотных зависимостях статистических функций памяти с возрастом.

При помощи статистических кванторов памяти $\varepsilon_1(0)$ и $\delta_1(0)$ обнаружена заметная роль эффектов статистической памяти в функционировании нервно-мышечной системы человека при старении. Динамика выходного силового импульса пожилых и старых людей характеризуется более короткими временами существования памяти, более слабой статистической памятью и переходом от регулярного и робастного режима к более хаотическому по сравнению с молодыми волонтерами. Таким образом, ослабление статистической памяти является своеобразным индикатором функциональных изменений в деятельности нервно-мышечной системы человека при старении. Возрастные изменения нервно-мышечной системы человека приводят также к очевидной деформации и расслоению пространственно-временных структур в фазовом пространстве, составленном из динамических ортогональных переменных. В спектрах мощности функций памяти обнаруживаются спектральные всплески на совокупности характерных частот 20 Гц и 40 Гц, которые отражают периодические особенности временного поведения нервно-мышечной системы молодого человека. Для пожилой и старой возрастной групп людей обнаруживается смещение данных спектральных пиков в область более высоких частот.

Несмотря на то, что представленный метод анализа экспериментальных серий представляет собой лишь первый шаг в понимании физиологических процессов, полу-

ченные результаты позволяют эффективно оценивать возрастные изменения человеческого организма при старении.

Настоящая работа поддержана фондами: грант Федерального агентства по образованию Министерства образования и науки РФ № РНП.2.1.1.741, грант РФФИ № 08-02-00123-а.

Литература

1. Hausdorff J. M., Mitchell S. L., Firtion R. et al. Altered fractal dynamics of gait: reduced stride interval correlations with aging and Huntington's disease // *Journal of Applied Physiology*. – 1997. – Vol. 82. – P. 262–269.
2. Goldberger A. L., Amaral L. A. N., Hausdorff J. M. et al. Fractal dynamics in physiology: Alteration with disease and aging // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. – 2002. – Vol. 99. – P. 2466–2472.
3. Hausdorff J. M., Edelberg H. K., Mitchell S. L. et al. Increased gait instability in community dwelling elderly fallers // *Archives of physical medicine and rehabilitation*. – 1997. – Vol. 78. – P. 278–283.
4. Hausdorff J. M., Purdon P., Peng C.-K. et al. Fractal dynamics of human gait: stability of long-range correlations in stride interval fluctuations // *Journal of Applied Physiology*. – 1996. – Vol. 80. – P. 1448–1457.
5. Hausdorff J. M., Zemaný L., Peng C.-K. et al. Maturation of gait dynamics: stride-to-stride variability and its temporal organization in children // *Journal of Applied Physiology*. – 1999. – Vol. 86. – P. 1040–1047.
6. Hausdorff J. M., Peng C.-K., Ladin Z. et al. Is walking a random walk? Evidence for long-range correlations in stride interval of human gait // *Journal of Applied Physiology*. – 1995. – Vol. 78. – P. 349–358.
7. Kurz M. J., Stergiou N. The aging humans neuromuscular system expresses less certainty for selecting joint kinematics during gait // *Neuroscience Letters*. – 2003. – Vol. 348. – № 3. – P. 155–158.
8. Kaplan D. T., Furman M. I., Pincus S. M. et al. Aging and the complexity of cardiovascular dynamics // *Biophysical Journal*. – 1991. – Vol. 59. – P. 945–949.
9. Buzzi U. H., Stergiou N., Kurz M. et al. Nonlinear dynamics indicates aging effects variability during gait // *Clinical Biomechanics*. – 2003. – Vol. 18 – № 5. – P. 435–443.
10. Goldberger A. L., Peng C.-K., Lipsitz L.A. What is physiologic complexity and how does it change with aging and disease? // *Neurobiology of Aging*. – 2002. – Vol. 23. – P. 23–26.
11. Lipsitz L. A., Goldberger A. L. Loss of «complexity» and aging: Potential applications of fractals and chaos theory to senescence // *Journal of the American Medical Association*. – 1992. – Vol. 267. – P. 1806–1809.
12. Vaillancourt D. E., Newell K. M. Complexity in aging and disease: response to commentaries // *Neurobiology of Aging*. – 2002. – Vol. 23. – P. 27–29.
13. Vaillancourt D. E., Newell K. M. Changing complexity in human behavior and physiology through aging and disease // *Neurobiology of Aging*. – 2002. – Vol. 23. – P. 1–11.
14. Costa M., Goldberger A. L., Peng C.-K. Broken Asymmetry of the Human Heartbeat: Loss of Time Irreversibility in Aging and Disease // *Physical Review Letters*. – 2005. – Vol. 95. – P. 198102.
15. Peng C.-K., Mietus J. E., Liu Yanhui et al. Quantifying Fractal Dynamics of Human Respiration: Age and Gender Effects // *Annals of Biomedical Engineering*. – 2002. – Vol. 30. – № 5. – P. 683–692.
16. Acharya R., Kannathan N., Ong Wai Sing et al. Heart rate analysis in normal subjects of various age groups // *BioMedical Engineering OnLine*. – 2004. – Vol. 3. – P. 24.

17. Vaillancourt D. E., Larsson L., Newell K. M. Effects of aging on force variability, single motor unit discharge patterns, and the structure of 10, 20, and 40 Hz EMG activity // *Neurobiology of Aging*. – 2003. – Vol. 24. – P. 25–35.
18. Wang J., Ning X., Ma Q. et al. Multiscale multifractality analysis of a 12-lead electrocardiogram // *Physical Review E*. – 2005. – Vol. 71. – P. 062902.
19. Yulmetyev R. M., Hänggi P., Gafarov F. M. Stochastic dynamics of time correlation in complex systems with discrete current time // *Physical Review E*. – 2000. – Vol. 62. – № 5. – P. 6178–6194.
20. Yulmetyev R. M., Hänggi P., Gafarov F. M. Quantification of heart rate variability by discrete nonstationary non-Markov processes // *Physical Review E*. – 2002. – Vol. 65. – P. 046107.
21. Yulmetyev R. M., Gafarov F.M., Yulmetyeva D. G., Emeljanova N. A. Intensity approximation of random fluctuation in complex system // *Physica A*. – 2002. – Vol. 303. – P. 427–438.
22. Vaillancourt D. E., Newell K. M. Aging and the time frequency structure of force output variability // *Journal of Applied Physiology*. – 2003. – Vol. 94. – P. 903–912.
23. Sosnoff J. J., Vaillancourt D. E., Newell K. M. Aging and Rhythmical Force Output: Loss of Adaptive Control of Multiple Neural Oscillators // *Journal of Neurophysiology*. – 2004. – Vol. 91. – P. 172–181.
24. Shurygin V. Yu., Yulmetyev R. M., Vorobjev V. V. Physical criterion of the degree of non-Markovity of relaxation processes in liquids // *Physics Letters A*. – 1990. – Vol. 148. – P. 199.
25. Shurygin V. Yu., Yulmetyev R. M. The space dispersion of the structure relaxation in simple liquids // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. – 1991. – Vol. 99. – P. 144.
26. Mokshin A. V., Yulmetyev R. M., Hänggi P. Simple Measure of Memory for Dynamical Processes Described by a Generalized Langevin Equation // *Physical Review Letters*. – 2005. – Vol. 95. – P. 200601.
27. McAuley J. H., Rothwell J. C., Marsden C. D. Frequency peaks of tremor, muscle vibration and electromyographic activity at 10 Hz, 20 Hz and 40 Hz during human muscle contraction may reflect rhythmicities of central neural firing // *Experimental Brain Research*. – 1997. – Vol. 114. – № 3. – P. 525–541.

Яценко Александр Викторович

— Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, аспирант, aleks@kazan-spu.ru

Дёмин Сергей Анатольевич

— Казанский государственный университет, научный сотрудник, sergey@kazan-spu.ru

Зинатуллин Эмиль Маратович

— Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, аспирант, emilzm@mail.ru

Юльметьев Ренат Музипович

— Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, доктор физ.-мат. наук, профессор, rmu@kazan-spu.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ АБЛЯЦИИ ТВЕРДЫХ ТКАНЕЙ ЗУБА

О.П. Сидорова, А.Е. Пушкарева

Рассмотрен механизм действия эрбиевого лазера на твердые биологические ткани. Разработана адекватная математическая модель абляции эмали и дентина. Проведен расчет формы и размеров кратера, образующихся при воздействии эрбиевого лазера на твердую ткань. Обсуждаются полученные результаты, преимущества и недостатки.

Ключевые слова: эрбиевый лазер, математическая модель, абляция, эмаль, дентин.

Введение

Одной из важнейших областей применения лазерного излучения является биомедицинская оптика. Каждый год в лазерной медицине появляется много новых предложений по использованию лазеров, увеличивается количество оборудования, постоянно возрастает число медицинских процедур. Стоматология является наиболее прогрессивно развивающейся отраслью медицины, всегда идет в ногу со временем и постоянно совершенствует лечебный процесс, делая его более безопасным и привлекательным для пациентов. Применение лазеров в данной отрасли открывает совершенно новые возможности, позволяя врачу-стоматологу предложить пациенту широкий спектр минимально инвазивных, фактически безболезненных процедур в безопасных для здоровья стерильных условиях, отвечающих высочайшим клиническим стандартам оказания стоматологической помощи.

Работая лазером, врач практически полностью исключает из повседневных расходов боры, кислоту для травления, средства антисептической обработки кариозной полости, резко снижается расход дезинфицирующих средств, меньше времени уходит на психологическую подготовку пациента к лечению. При использовании лазеров в стоматологических операциях важен подбор оптимальных параметров лазерного излучения. Для этого наилучшим путем является моделирование, поскольку можно избежать большого количества дорогостоящих экспериментов, а также упростить сам процесс.

Целью работы является создание адекватной расчетной модели, описывающей процесс формирования кратеров в твердых тканях зуба с помощью лазера, и сравнение результатов, полученных с использованием построенной модели, с имеющимися экспериментальными данными.

Механизм лазерной абляции твердой ткани зуба

Рассмотрим механизм действия на твердые ткани эрбиевого лазера. Он основан на «микровзрывах» воды, входящей в состав эмали и дентина, при ее нагревании лазерным лучом [1]. Этот механизм иллюстрирует рис. 1.

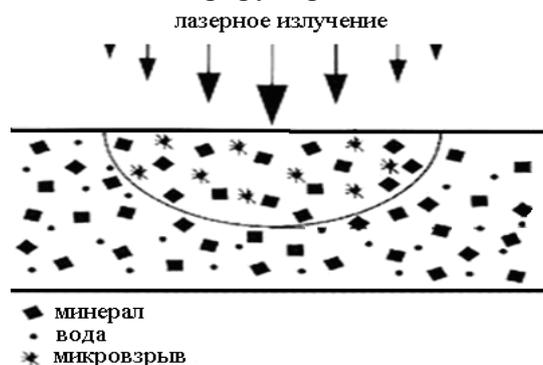


Рис. 1. Механизм абляции твердой ткани зуба

Процесс поглощения и нагревания приводит к испарению воды, микроразрушению твердых тканей и выносу твердых фрагментов из зоны воздействия водяным паром. Для охлаждения тканей используется водно-воздушный спрей. Эффект воздействия ограничен тончайшим слоем выделения энергии лазера. Из-за минимального поглощения энергии лазера гидроксиапатитом – минеральным компонентом хромофора – окружающие ткани практически не нагреваются.

Описание модели абляции твердых тканей зуба YAG:Er лазером

В данном исследовании разрабатывается математическая модель, способная описать процесс формирования лазерных отверстий в твердых тканях зуба человека.

Применяется многоимпульсный метод обработки, т.е. воздействие разбивается на определенную серию импульсов. При этом зона абляции растет в глубину постепенно за счет послойного испарения материала каждым импульсом. Окончательная глубина отверстия определяется суммарной энергией серии импульсов.

Представим зуб в виде условной модели. Возьмем условный образец твердой ткани зуба, эмали или дентина прямоугольной формы и будем воздействовать на него лазерным излучением (рис. 2).

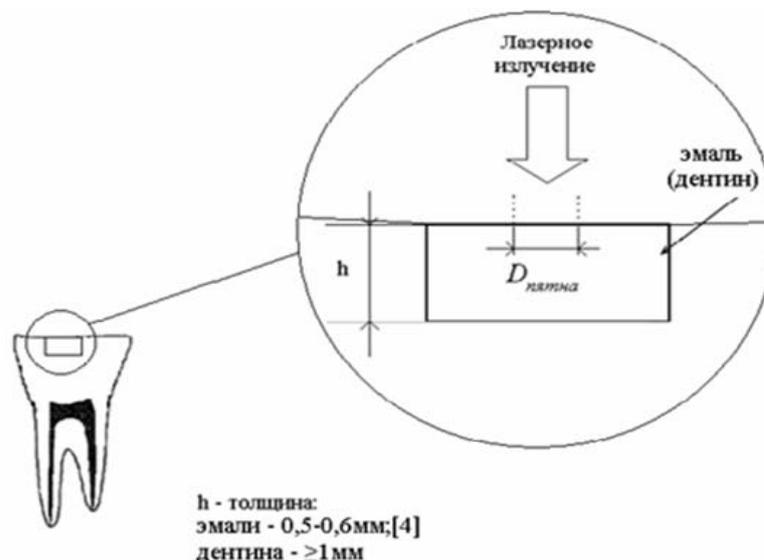


Рис. 2. Схема воздействия на образец лазерного излучения

Таким образом, можно получить геометрическую модель эмали или дентина, на основе которой производится оптический расчет (в двумерной цилиндрической системе координат) по следующей схеме.

На первом этапе необходимо найти распределение освещенности $\varphi(x, r)$ внутри твердых тканей зуба. Для этой цели используется уравнение переноса излучения в диффузионном приближении [2]:

$$\nabla^2 \varphi_s(x, r) - 3\mu_a \mu_{tr} \varphi_s(x, r) + 3\mu_s \mu_{tr} E(x, r, s_0) - 3\mu_s g \nabla \cdot (E(x, r, s_0) s_0) = 0.$$

Данное приближение было выбрано, поскольку оно позволяет достаточно быстро производить оценочные расчеты и не требует большого количества ресурсов компьютера (как, например, метод Монте-Карло).

В результате решения уравнения (при помощи программы для решения уравнений в частных производных Femlab) получено распределение освещенности в образце, которое выглядит приблизительно так, как представлено на рис. 3.

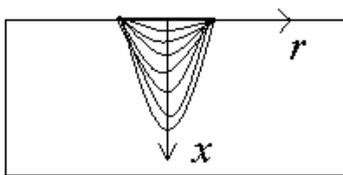


Рис. 3. Схема распределения освещенности в образце

На втором этапе, на основе полученного распределения освещенности, производится расчет распределения объемной плотности энергии в зубе:

$$E(x, r) = \varphi(x, r) \cdot \mu_a \cdot \frac{E_{\text{имп}}}{\pi \cdot R^2},$$

где R – радиус пятна, μ_a – коэффициент поглощения излучения. Вычисление распределения освещенности в среде проводится с учетом потерь излучения за счет френелевского отражения на верхней границе, на нижней границе отражения нет (данная граница условная). Через боковые границы поток равен нулю.

Граничное условие для решения уравнения переноса в диффузионном приближении на границах с воздухом записывается следующим образом [2]:

$$\frac{1 - r_{21}}{1 + r_{21}} \cdot \frac{\varphi_s(x, r)}{2} + \frac{\mu_s}{\mu_{tr}} E(x, r, s) n - \frac{1}{3\mu_{tr}} \nabla \varphi_s(x, r) n = 0,$$

где r_{21} – коэффициент отражения на границе воздух–биоткань. В соответствии с [2] для верхней границы, через которую излучение из воздуха входит в рассеивающую среду, этот коэффициент равен

$$r_{21} = 1 - \left(\frac{1}{n_2} \right)^2.$$

На третьем этапе производится построение границы области абляции. Для образования кратера в твердой ткани зуба необходимо, чтобы выполнялось неравенство $E(x, r) > E_{\text{пор}}(x, r)$, Дж/см³ (рис. 4).

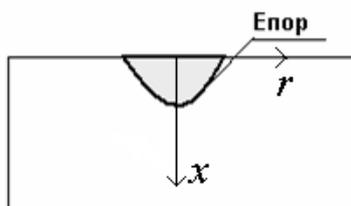


Рис. 4. Схема построения границы абляции в образце

Построение границы области абляции начинается с нахождения $E_{\text{пор}}(x, r)$. Пороговой плотностью энергии лазерного излучения считается такая плотность энергии, которая является минимальной для осуществления процесса абляции в образце. Если энергия импульса $E(x, r)$ будет больше пороговой энергии $E_{\text{пор}}(x, r)$, то облученный материал в виде дентина или эмали будет удаляться из зуба. Если $E(x, r)$ станет меньше $E_{\text{пор}}(x, r)$, то абляция ткани прекратится. Предполагаем, что вся вложенная энергия уносится от места обработки вместе с продуктами абляции и не влияет на дальнейший процесс обработки.

Четвертый этап – построение новой геометрии. Так как кратер в образце будет иметь не сферическую форму, а форму, близкую к эллипсу, то область абляции будем описывать эллиптическим законом:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2} = 1,$$

где a и b – полуоси эллипса, которые находятся из условий $E(x, 0) > E_{\text{пор}}(x, 0)$ и $E(0, r) > E_{\text{пор}}(0, r)$ соответственно.

Будем считать, что продукты разрушения удаляются из образца полностью и никакой энергии после воздействия импульса в зубе не остается. В этих условиях после процесса абляции твердой ткани лазерным импульсом в образце образуется кратер, заполненный воздухом (рис. 5).

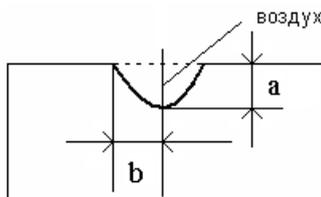


Рис. 5. Схема образования новой геометрии в образце

Продолжаем новый цикл оптического расчета с 1 по 4 этапы с учетом новой геометрии.

Результаты моделирования абляции эмали и дентина YAG:Er лазером

Исходные данные для моделирования

На основе описанной выше модели было проведено исследование процесса взаимодействия излучения YAG:Er лазера с твердыми тканями зуба человека и сравнение полученных в расчете размеров кратера с экспериментальными данными.

| | Коэффициент преломления (n) | Коэффициент поглощения, см^{-1} | Коэффициент отражения, % | Глубина поглощения ($1/e$), мкм | Коэффициент рассеяния, см^{-1} | Фактор анизотропии |
|----------------------|---------------------------------|------------------------------------------|--------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------------|--------------------|
| Эмаль (1мм) | | 0,1 [1] | | | 15 [1] | 0,96 [1] |
| Отполированная эмаль | - | 18500 [2] | 38 [3] | 0,5 [2] | - | - |
| | | 31300 [2] | 49 [3] | 0,3 [2] | | |
| | | 6500 [2] | 16 [3] | 1,5 [2] | | |
| | | 5200 [2] | 13 [3] | 1,9 [2] | | |
| Эмаль [4] | 1.55 | 770 | - | - | - | - |
| | | 5500 | | | | |
| | | 8000 | | | | |
| | | 1125 | | | | |
| | | 825 | | | | |
| Дентин [5] | - | 1500 | 20-22 [6] | - | - | - |
| | | 988±111 | | | | |
| | | 2200 | 30-36 [6] | | | |
| | | 1800 | | | | |
| 5000 | | | | | | |

Таблица 1. Оптические свойства твердых тканей зуба

В качестве исходных данных для расчета были взяты величины, соответствующие параметрам эксперимента: толщина эмали 0,6 мм, толщина дентина 1,5 мм; количество лазерных импульсов, использованное для формирования отверстий в тканях, для эмали $N_p=5$, для дентина $N_p=10$; энергия каждого импульса 30 мДж, диаметр пятна лазерного излучения на поверхности образца 100 мкм.

При расчетах учитывалась расходимость лазерного излучения. Считалось, что излучение лазера фокусируется на поверхности образца при помощи линзы с фокусным расстоянием 38 мм. В результате на поверхности ткани получается пятно с гауссовым профилем интенсивности, диаметр которого по уровню e^{-1} равен 120 мкм. Расходимость излучения после фокусировки соответствует $\text{tg}(\alpha) = 0.025$.

Оптические свойства эмали и дентина соответствовали параметрам, указанным в табл. 1.

Величины пороговой плотности энергии абляции для эмали и дентина взяты в соответствии с литературными данными [4]: для эмали – 12 кДж/см³, для дентина – 5 кДж/см³.

Полученные результаты и обсуждение

Для проверки адекватности разработанной модели было проведено сравнение полученных расчетных размеров кратера с имеющимися экспериментальными данными, полученными в лаборатории лазерной медицинской техники кафедры ЛТБМО СПбГУ ИТМО, и представлено на рис. 6, 7. Внешний вид сформированных посредством излучения YAG:Er лазера кратеров показан на рис. 6, 7 (энергия импульса 30 мДж, 5 импульсов для эмали, 10 импульсов для дентина, диаметр пятна 100 мкм, тангенс угла расходимости 0.025), а в табл. 2 содержится численная оценка их основных геометрических характеристик.

Результаты моделирования процессов абляции твердых тканей зуба представлены на рис. 8–11 и в табл. 2, 3. Как видно из рис. 7–9, форма кратеров, полученных в расчетах, несколько отличается от формы кратеров, полученных экспериментально, особенно это заметно в области, близкой к поверхности ткани. В расчетах была получена форма отверстий, напоминающая часть эллипса, поскольку при построении модели было сделано предположение, что форма кратера напоминает эллипс. Также в расчетах не учитывалось рассеяние излучения на продуктах удаления и эффекты, связанные с оплавлением поверхности кратера. Глубина полученных отверстий, как видно из таблиц, близка к экспериментально полученным величинам (табл. 2, 3).

| Тип зубной ткани | Геометрические параметры кратера | |
|---------------------|----------------------------------|--------------|
| | Диаметр, мкм | Глубина, мкм |
| эмаль ($N_p=5$) | ~205 | ~330 |
| дентин ($N_p=10$) | ~275 | ~965 |

Таблица 2. Результаты эксперимента. Основные геометрические характеристики лазерных кратеров

Зависимость глубины кратера от количества импульсов в эмали является практически линейной, как показано на рис. 10. Зависимость глубины кратера от количества импульсов в дентине не является линейной (рис. 11). В дентине с каждым следующим импульсом скорость образования кратера уменьшается, причем это наблюдается даже в течение первых 5 импульсов. Видимо, это происходит потому, что образование кратера в дентине происходит намного быстрее, чем в эмали, ведь, судя по рис. 10 и рис. 11, отверстие глубиной около 0,3 мм в дентине образуется за 1 импульс, тогда как в эмали – за 5 импульсов лазерного излучения. Данный эффект можно объяснить тем, что со-

держание воды в дентине намного больше, чем в эмали, и поэтому коэффициент поглощения лазерного излучения YAG:Er лазера в дентине намного превышает коэффициент поглощения в эмали.

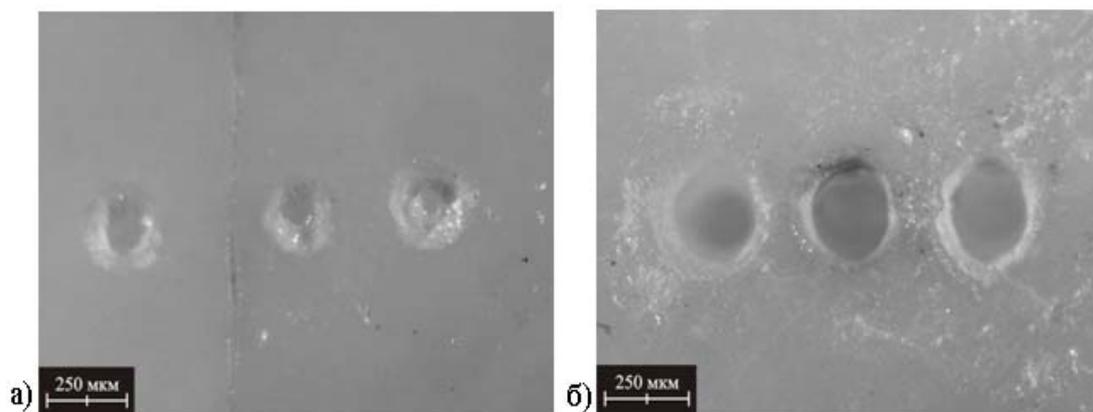


Рис. 6. Внешний вид лазерных кратеров: а) в эмали; б) в дентине

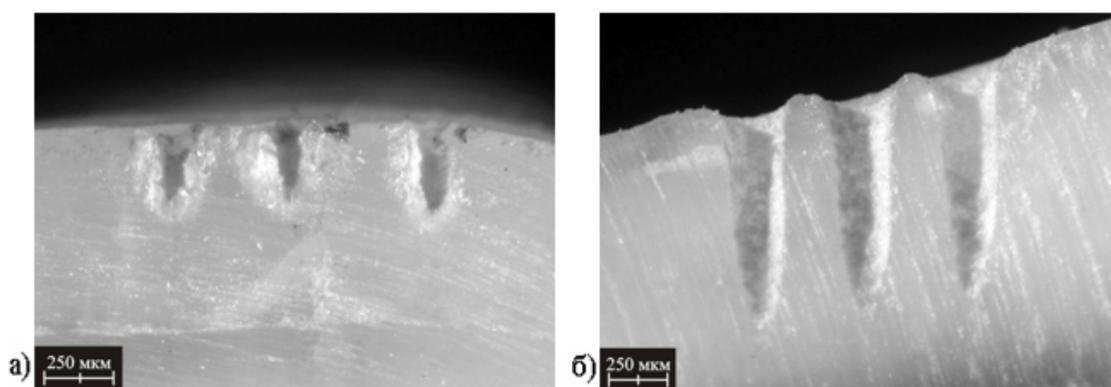


Рис. 7. Вид продольных шлифов: а) в эмали; б) в дентине

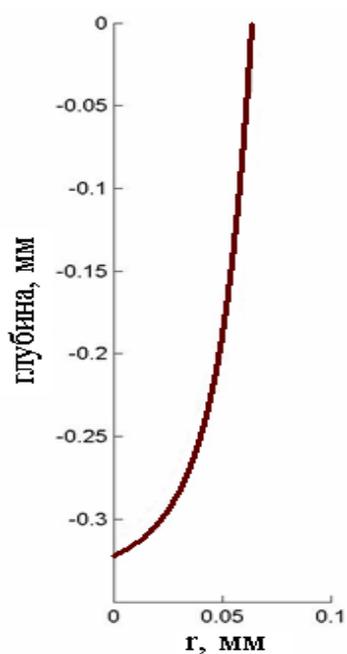


Рис. 8. Граница абляции в эмали после 5 импульсов

| | Эксперимент | Расчет |
|------------------------------------|-------------|--------|
| Глубина кратера, мкм | 330 | 320 |
| Диаметр кратера у поверхности, мкм | 205 | 126 |

Таблица 4. Экспериментальные и расчетные данные глубины и диаметра кратера в эмали

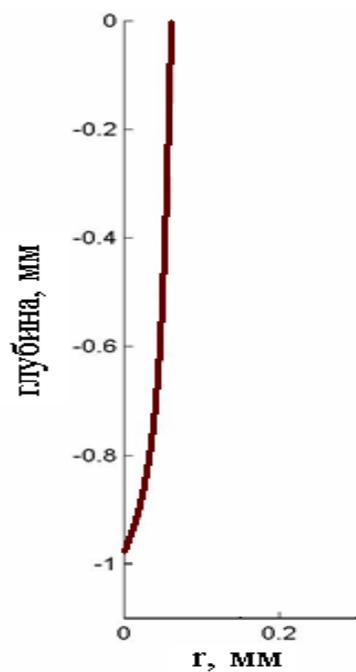


Рис. 9. Граница абляции в дентине после 10 импульсов

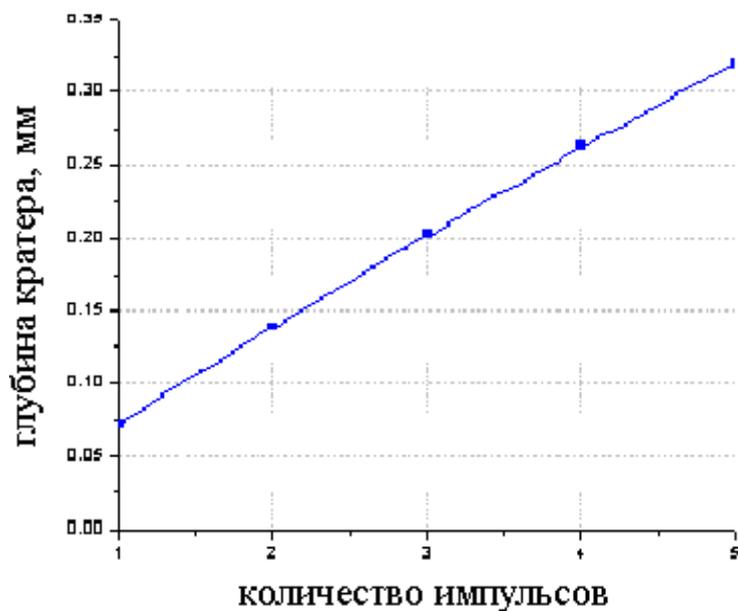


Рис. 10. Зависимость глубины кратера от количества импульсов в эмали

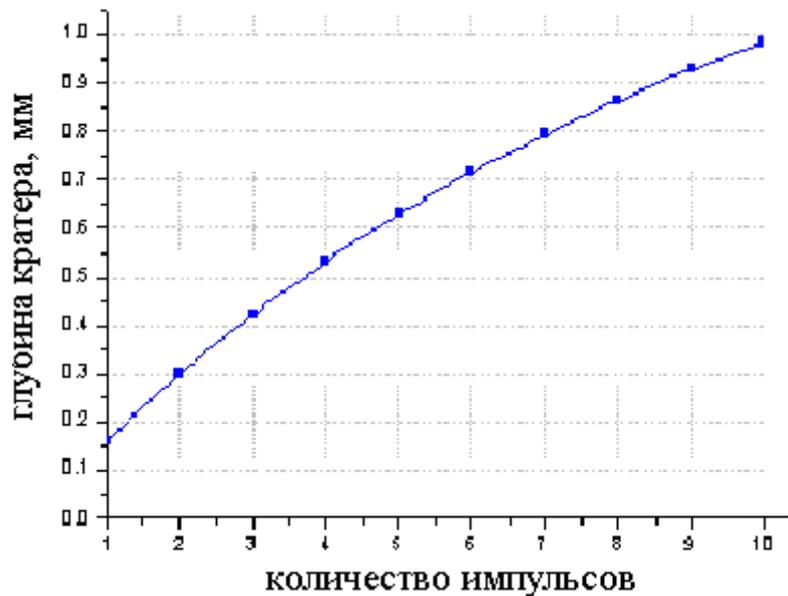


Рис. 11. Зависимость глубины кратера от количества импульсов в дентине

| | Эксперимент | Расчет |
|------------------------------------|-------------|--------|
| Глубина кратера, мкм | 965 | 987 |
| Диаметр кратера у поверхности, мкм | 275 | 122 |

Таблица 3. Экспериментальные и расчетные данные глубины и диаметра кратера в дентине

Заключение

Таким образом, в работе была показана методика и принцип абляции твердой ткани зуба эрбиевым лазером. Также рассмотрены оптические характеристики твердых тканей зуба – эмали и дентина.

В рамках работы была разработана расчетная модель для описания процессов, происходящих при лазерной абляции твердых тканей зуба, которая позволяет произвести расчет формы и размеров кратера, образующегося при воздействии эрбиевого лазера на твердую ткань. Полученная модель позволяет учесть плотность энергии импульса лазерного излучения, число импульсов и расходимость пучка.

На основе модели были произведены расчеты размеров кратеров, образованных в эмали и дентине, при абляции YAG:Er лазером. Также было проведено сравнение результатов расчета и экспериментальных данных, которое показало адекватность модели для расчета глубины кратера. Форма же получаемых при расчетах отверстий отличается от экспериментальной формы кратеров.

Литература

1. Hoke J.A., Burkes J., Gomes E.D., Wolbarsht M.L. // Journal of Laser Applications. – 1990. – P. 61–65.
2. Star W.M. Diffusion Theory of Light Transport // Optical-Thermal Response of Laser-Irradiated Tissue / Ed. by Welch A.J. and van Gemert M.J.C. – N.Y., 1995. – P. 131–206.

3. Fried D., Featherstone J.D.B., Glana R.E., Seka W. The nature of light scattering in dental enamel and dentin at visible and near-IR wavelengths // Dental clinics of North America. – 1995. – Vol. 34. – P. 1278–1285.
4. Duplain G., Boulay R., Belanger P.A. Complex index of refraction of dental enamel at CO₂ wavelengths // Dental clinics of North America. – 1987. – Vol. 26. – P.4447–4451.
5. Fried D., Borzillary S. F., McCormack S. M , Glana R. , Featherstone J. D. B. The thermal effects on CO₂ laser irradiated dental enamel at 9.3, 9.6, 10.3 and 10.6 mkm // Laser surgery, Advanced characterization, therapeutics and systems IV. – 1994. – Vol. 2128. – P. 319–328.
6. Featherstone J.D.B. Caries detection and prevention with laser energy // Dental clinics of North America. – 2000. – Vol. 44. – №4. – P. 955–969.
7. Fried D., Zuerlein M. J., Featherstone J.D.B. Thermal and Chemical Modification of Dentin by 9-11-mcm CO₂ Laser Pulses of 5-100-mcs Duration // Lasers in surgery and medicine.– 2002. – V. 31. – P. 275–282.
8. Луцкая И.К. Основы эстетической стоматологии. – Минск: Современная школа, 2005. – 332 с.

Сидорова Ольга Петровна

— Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, студент, sidorova_o_p@mail.ru

Пушкарева Александра Евгеньевна

— Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, доцент, alpushkareva@yandex.ru

УДК 004.056.4

**МЕТОД ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ
МНОГОСУБЪЕКТОВОЙ КОНКУРЕНЦИИ
В ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ****А.А. Вяхирев, А.А. Павлютенков, Л.Г. Осовецкий**

В статье описана возможность прогнозирования результатов многосубъектовой конкуренции с помощью модели философии 36 китайских стратагем на платформе информационных технологий.

Ключевые слова: прогнозирование, многосубъектовая конкуренция, 36 китайских стратагем.

Введение

Конкурентные взаимодействия в многосубъектовой среде переместились из физической и материальной в информационную область. При рассмотрении конфликтных ситуаций, создаваемых субъектами обмена информацией, следует учитывать тактику и стратегию получения и представления конкурентам информации, прогнозирования поведения конкурентов с целью получения текущего преимущества и достижения конечных целей конкуренции.

Исходные положения концепции:

- субъектами конкурентного взаимодействия на платформе информационных технологий определим рабочие места или их группы, выполняющие единые функциональные задачи;
- ресурсами субъектов является информация, предназначенная для выполнения субъектами функциональных задач;
- субъекты оперируют ресурсами в части их защиты, вида и объема представления их конкурирующим субъектам, а также передачи ложной информации;
- целью конкуренции является получение объективной текущей информации и достижение максимального конечного информационного ресурса;
- конкуренция в многосубъектовой среде моделируется на основе теории игр на базе формализованных правил философии «36 китайских стратагем».

36 китайских стратагем

Разработка все более совершенных средств, форм и способов ведения информационной войны стала одной из важнейших задач военной науки. К числу перспективных форм ведения информационной войны стали относить информационные операции, информационные сражения, информационные действия, информационные удары [1].

Одним из примеров поведения субъектов в многосубъектовом взаимодействии являются китайские стратагемы. Слово «стратагема» означает алгоритм действий, план, уловку, хитрость.

Информационное превосходство определяется как способность собирать, обрабатывать и распределять непрерывный поток информации о ситуации, препятствуя конкурирующему субъекту делать то же самое [2]. Оно может быть также определено и как способность назначать и поддерживать такой темп, который превосходит любой возможный темп конкурента, позволяя постоянно доминировать, оставаясь непредсказуемым, и действовать, опережая противника в его ответных акциях. Информационное превосходство позволяет иметь реальное представление о ситуации и дает интерактивную и высокоточную модель действий конкурента в реальном масштабе времени, т.е.

эффективность информационного воздействия можно оценить по степени искажения результатов действий конкурирующего субъекта путем воздействия на процессы ввода данных, обработки и выдачи результатов. Эти процессы определяются количественными и качественными характеристиками элементов субъекта, ответственными за эти процессы, количеством и качеством связей между элементами и защищенностью этих элементов [2].

Прогнозирование результатов многосубъектовой конкуренции

Для достижения выигрыша в многосубъектовой конкуренции необходимо контролировать весь процесс конфликта, управляя не только своим ресурсом, но и в какой-то мере ресурсами конкурирующего субъекта. Такое управление одного субъекта над другим посредством различного рода воздействий позволяет получать преимущества в конкурентном взаимодействии.

Конкурентное взаимодействие имеет вероятностный характер: конкурирующий субъект может определить цель проводимых по отношению к нему действий, прореагировать, исходя из собственного представления о ситуации и ценности результатов воздействия, демонстрируя при этом преувеличенные или преуменьшенные возможности, проигнорировать воздействие, предпринять ответные шаги по контруправлению. Поэтому большое значение в конкурентном взаимодействии имеет как определение цели действий конкурирующего субъекта, так и скрытие своих замыслов.

Действия по прогнозированию результатов конкурентного взаимодействия будут тем эффективнее, чем они комплекснее, комбинированнее, т.е. из всей получаемой информации конкурирующий субъект должен сделать вывод о результативности ущерба или выгоды. Вопрос прогнозирования в полной мере актуален в многосубъектовой конфликтующей информационной среде в режиме реального времени. Это позволяет с достаточно высокой вероятностью предупредить или исключить агрессивные действия конкурирующего субъекта.

Конкуренция субъектов основывается на передаче информации, которая способствовала бы принятию выгодных, желательных решений конкурирующему субъекту. Конкурирующему субъекту передается информация, которая:

- демонстрирует силовое давление;
- формирует представление о ситуации для принятия решения;
- создает необходимость выработки новой цели действий, достижение которой потребует дополнительной подготовки, средств и времени;
- нарушает отработанные алгоритмы решения задач управления;
- влияет на момент принятия решения.

При этом может применяться демонстрация или использование (возможность использования) превосходящего ресурса, объединение с другими субъектами, создание ложной картины, ситуации, изменение режима деятельности, передача зашифрованной информации с известным конкуренту ключом и т.д.

При управлении конкурентом важно сохранить соответствие между действиями по цели, времени, способам их проведения, так как неудачное осуществление одного из них может раскрыть планы субъекта, осуществляющего конкурентное взаимодействие [2].

Достижение целей защиты информации в конкурентном взаимодействии связано с планированием некоторой системы мероприятий, а значит, и с расходом ресурсов. Насколько хорошо или плохо спланированы эти мероприятия, настолько малы или велики будут и затраты ресурсов. На рис. 1 проиллюстрирован метод прогнозирования результатов многосубъектового взаимодействия. Рассмотрим его пошагово.

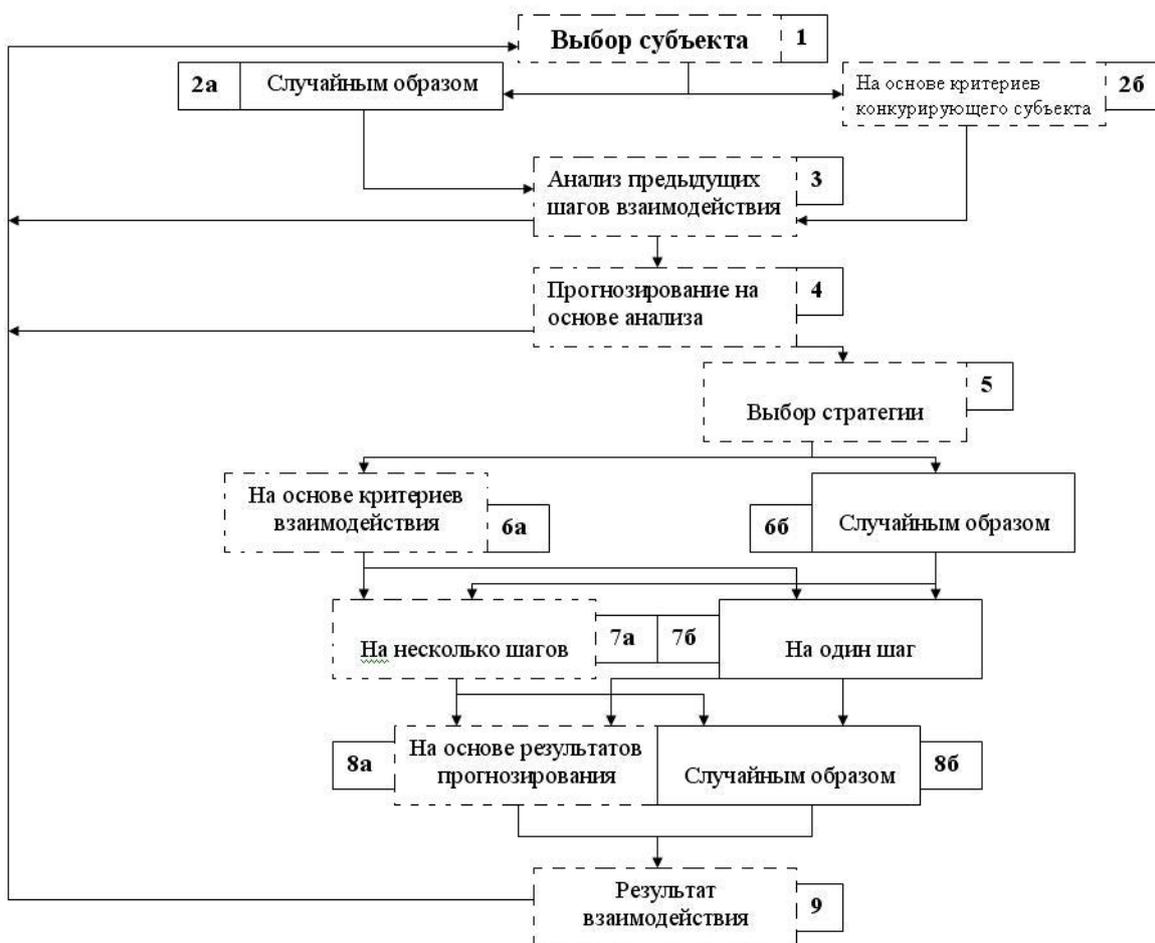


Рис. 1. Метод прогнозирования результатов многосубъектового взаимодействия

Выбор субъекта (шаг 1) – выбор субъекта взаимодействия для моделирования конфликтной ситуации с ним. Этот выбор выполняется либо случайным образом (шаг 2а), либо по одному из критериев субъекта (шаг 2б).

Анализ предыдущих шагов (шаг 3) – построение предыдущей стратегии взаимодействия субъекта. После анализа возможно либо прогнозирование (шаг 4), либо новый выбор субъекта (шаг 1), если проанализированная стратегия не удовлетворяет желаемым критериям взаимодействия.

Прогнозирование эффективной стратегии (шаг 4) – построение последующей стратегии субъекта путем анализа предыдущих шагов. Если спрогнозированная на основе анализа стратегия не удовлетворяет критериям взаимодействия, то возможен выбор нового субъекта (шаг 1).

Выбор стратегии (шаг 5) – рассмотрение для дальнейшего взаимодействия наиболее эффективной стратегии оптимального распределения ресурсов, которое выполняется либо на основе критериев взаимодействия (шаг 6а), либо случайным образом (шаг 6б). От выбора стратегии (шаг 5) также зависит, на сколько шагов будет использоваться данная стратегия: на один (шаг 7б) или же на некоторое количество шагов (шаг 7а). Выбор стратегии на некоторое количество шагов (шаг 7а) позволит выбирать стратегию на основе результатов прогнозирования (шаг 8а) либо случайным образом (шаг 8б). Выбор стратегии на один шаг также позволит выбирать стратегию на основе результатов прогнозирования (шаг 8а) либо случайным образом (шаг 8б).

Результат взаимодействия (шаг 9) – результат, полученный при моделировании шага конфликтной ситуации. После получения результата мы возвращаемся к выбору субъекта (шаг 1).

При информационном взаимодействии конфликтующих субъектов можно применить различную детализацию для анализа конкурирующего субъектов с целью последующего выбора действий на основе 36 стратагем. При этом детализированный подход дает больше вариантов действий и более точное прогнозирование параметров субъектов и ситуации [2].

Анализ параметров структуры конкурирующего субъекта (количество элементов, связь между элементами, топология, защищенность и т.д.) позволяет определить применяемую стратегию или последовательность стратегий. Выбор начальной стратегии для достижения цели определяется ситуацией в информационном пространстве, количеством субъектов, их взаимосвязью и зависимостью друг от друга. Выбор количества и последовательности стратегий в конфликтующем многосубъектовом информационном пространстве определяется временем, в течение которого необходимо обладать преимуществом. Соответственно, за относительно короткий промежуток времени на тактическом уровне выбирается и осуществляется одна стратегия. На длительный период времени выбирается связка стратегий [3].

Соответственно, выбор стратегий, последовательность, количество, необходимость вложений стратегий определяется поставленными целями и временем применения.

Заключение

В процессе конфликтного информационного взаимодействия параметры структуры субъектов изменяются. Применение стратегий приводит к определенным прогнозируемым и контролируемым результатам. Это позволяет планировать последовательность применения стратегий для стратегического информационного взаимодействия с конфликтующими субъектами на длительное время и прогнозировать состояние и развитие конфликтующих субъектов и информационной среды.

Литература

1. Завгородний В.И. Защита информации в комплексных системах. – М.: Логос, 2001. – 264 с.
2. Вяхирев А.А. Использование 36 китайских стратегий в сфере информационного взаимодействия // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2006. – Вып. 25. – С. 138–140.
3. Вяхирев А.А. Программный комплекс ПТЗБК (на основе 36 китайских стратегий) // Труды 10-й международной конференции «Теория и технология программирования и защиты информации». – СПб: СПбГУ ИТМО, 2006. – С. 27.

Вяхирев Алексей Александрович

— Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, vyakhirev@cit.ifmo.ru

Павлютенков Артем Александрович

— Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, pavlutenkov@mail.ru

Осовецкий Леонид Георгиевич

— Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, доктор технических наук, профессор, director@cit.ifmo.ru

Рассматривается оценка риска не только в качестве функции управления ИС, но и как защита организации в целом, ее способности выполнять свои функции.

Ключевые слова: анализ риска, оценка риска, нечеткая логика

Введение

Внедрение средств вычислительной техники в структуру управления современных предприятий и организаций является, безусловно, прогрессивным процессом, поэтому вполне объяснимо, что до определенного момента не возникает вопросов и опасений, связанных с использованием информационных технологий. Следствием этого часто является стихийный рост информационной инфраструктуры организации, которая по мере приобретения средств вычислительной техники разрастается «вширь», приобретая неструктурированный гетерогенный характер. Это, в свою очередь, приводит к неконтролируемому росту уязвимостей системы и увеличению возможностей доступа к управленческой и производственной информации со стороны внешних и внутренних нарушителей. Информационная система (ИС) становится потенциально опасной для своих собственников, своего рода «миной замедленного действия».

До определенного момента не возникает вопросов и об оценке величины риска, рост которого следует рассматривать как обратную сторону процесса информатизации. Проблема усугубляется тем, что вопросы информационной безопасности (ИБ) обычно отдаются на откуп специалистам по информационным технологиям, которые часто не в состоянии определить реальных последствий для организации угроз ИБ. Менеджеры предприятия, которые могли бы оценить реальные последствия угроз, часто не имеют достаточных знаний в области информационных технологий, чтобы оценить связанные с этим риски. Таким образом, в организации часто не оказывается специалиста, который мог бы оценить реальные риски, связанные с использованием информационных технологий, хотя, очевидно, что оценка риска нужна не только с точки зрения безопасности уже сложившейся инфраструктуры, но и для правильной оценки перспектив использования и развития информационных технологий. Более того, своевременную оценку риска следует рассматривать не только как функцию управления ИС, но и как защиту организации в целом, ее способности выполнять свои функции. Следовательно, процесс управления рисками следует рассматривать не как техническую функцию, которую можно поручить техническим специалистам, а как основную управляющую функцию организации.

Модель оценки риска

Согласно современным международным стандартам в области ИБ, подсистема управления рисками ИБ должна быть обязательным компонентом общей системы обеспечения ИБ организации [1]. Существуют различные методы и методики управления информационными рисками. Эти методики различаются, прежде всего, по уровню и совершенству используемых математических методов, положенных в основу процедур оценивания рисков. Используемые методики можно разделить на прямые одноэтапные процедуры оценки риска и многоэтапные процедуры с предварительным оцениванием ключевых параметров, оказывающих основное влияние на величину риска.

В одноэтапных методиках оценки риска выполняются с помощью одноэтапной процедуры, исходя из набора исходных данных. Механизм вывода при этом не формализован и определяется возможностями эксперта. Риск определяется путем прямой экспертной оценки. В том случае, когда модель информационной структуры организации уже определилась и можно выделить основные факторы, влияющие на величину риска,

более подходящими являются многоэтапные механизмы получения оценок риска, предусматривающие получение предварительных оценок по ключевым входным факторам. Известны методики получения оценок риска с предварительным оцениванием двух или трех параметров.

В ходе проведения анализа риска выявляются наиболее критичные с точки зрения информационной безопасности ресурсы, по каждому ресурсу определяются характерные угрозы безопасности и оценивается уязвимость системы защиты ресурса. На основании этих и общестатистических данных определяются вероятностные характеристики возникновения и реализации угроз информационной безопасности.

Цель процесса оценивания рисков состоит в определении характеристик рисков в информационной системе и ее ресурсах. На основе таких данных выбираются необходимые средства управления ИБ. Процесс оценивания рисков содержит несколько этапов [2]:

- описание объекта и мер защиты;
- идентификация ресурса и оценивание его количественных показателей (определение потенциального негативного воздействия на бизнес);
- анализ угроз информационной безопасности;
- оценивание уязвимостей;
- оценивание существующих и предполагаемых средств обеспечения информационной безопасности;
- оценивание рисков.

Механизм нечеткого вывода

Механизм нечеткого вывода является основным звеном в предлагаемой методике получения оценки риска. Он преобразует входные данные в выходную переменную, т.е. в оценку риска. Механизм нечеткого вывода представляет собой последовательность операций над входными данными в соответствии с параметрами, заложенными в наборе репродукционных правил (см. рисунок). Основные этапы нечеткого вывода состоят в следующем [3].

- Ввод экспертных оценок обеспечивает механизм вывода необходимой информацией.
- Фазификация представляет собой процедуру нахождения функций принадлежности используемых термов входных переменных на основе исходных данных.
- Агрегирование является процедурой определения степени истинности условий по каждому из правил системы нечеткого вывода.
- Активизация представляет собой процедуру нахождения степени истинности каждого из подзаключений правил нечетких продукций.
- Аккумуляция представляет собой процедуру нахождения функции принадлежности для каждой из выходных лингвистических переменных заданной совокупности правил нечеткого вывода.
- Дефазификация является процедурой нахождения четких значения выходных переменных, в наибольшей степени отвечающих входным данным и базе продукционных правил.

Предложенный метод получения оценок риска на основе продукционных правил нечеткой логики позволяет:

- снять ограничения на число учитываемых входных переменных;
- заложить в механизм принятия решений любые взаимосвязи, существующие между анализируемыми параметрами;
- учесть при оценке риска имеющуюся информацию относительно свойств системы, отражаемую с помощью правил «ЕСЛИ ... ТО»;
- использовать лингвистические шкалы и данные;
- учесть степень нечеткости используемых данных.

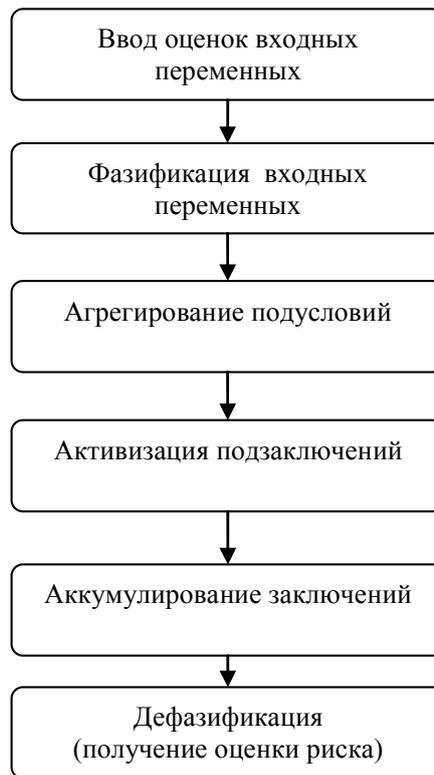


Рисунок. Механизм нечеткого вывода

Заключение

Определен способ получения качественных и количественных оценок величин риска с максимальными возможностями учета априорных данных и результатов предварительных исследований характеристик и свойств ИС. Полученные оценки риска могут быть использованы при разработке концепции обеспечения ИБ на этапе формирования ИС и для поддержания уровня риска на приемлемом уровне на этапе эксплуатации ИС.

Литература

1. Симонов С.В. Анализ рисков, управление рисками // Jet Info. – 2003. – №2.
2. Risk Management Guide for Information Technology Systems. NIST, Special Publication 800-30. – 55 p.
3. Леоненков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. – СПб: БХВ-Петербург, 2003. – 736 с.

Сидоров Алексей Олегович

— Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, saoo@idsm.ru

Торшенко Юлия Александровна

— Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, ulka@cit.ifmo.ru

Павлютенков Артем Александрович

— Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, pavlutenkov@mail.ru

Осовецкий Леонид Георгиевич

— Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, доктор технических наук, профессор, director@cit.ifmo.ru

ОБНАРУЖЕНИЕ УЯЗВИМОСТЕЙ НА НАЧАЛЬНЫХ ЭТАПАХ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПРОГРАММНОГО ПРОДУКТА

Ю.А. Торшенко, Ю.М. Шубин, Л.Г. Осовецкий

Описана проблема появления мертвого кода в программном обеспечении, разработанном при помощи технологии промышленного программирования, на ранних этапах проектирования, таких как описание функциональных требований.

Ключевые слова: мертвый код, промышленное проектирование, разработка программного обеспечения.

Введение

В настоящее время создание больших программных систем уровня корпорации происходит с использованием инструментально-технологических средств промышленного производства приложений [1]. С одной стороны, это приводит к сокращению сроков создания функционального программного обеспечения (ПО) и повышению их качества, с другой – к возникновению новых проблем, связанные с появлением избыточного кода, неточностями преобразования моделей разного уровня и, как следствие, с появлением в составе функционального ПО неисполняемого «мертвого кода», который является целью угроз безопасности и приводит к росту уязвимости конечного программного продукта.

Уязвимости процесса разработки

Чтобы разработка завершилась успешно, необходимо уделять внимание всем этапам этого процесса, в первую очередь – процессам постановки задачи и системного анализа, так как выполненные в рамках этих этапов действия наиболее сильно влияют на качество всего проекта. Каждый из этапов процесса выполняется собственным исполнителем (или исполнителями) на подходящем для конкретной цели описательном языке, отсюда возникают проблемы, связанные с переходом от одного этапа проектирования к следующему. Интуитивно понятные для одного человека инструкции могут быть неверно истолкованы следующим участником разработки. Как следствие, возникают ошибки, связанные с неточностями преобразования моделей одного уровня в модели другого. Поскольку конечный продукт проходит как минимум три таких преобразования, вероятность появления подобных ошибок чрезвычайно велика. Их наличие может повлиять не только на функциональность продукта, но и на его надежность, так как при возникновении подобных ошибок появляются уязвимости, связанные с тупиковыми технологическими процессами, а следовательно, и с избыточностью конечного кода программы [2].

Но не только проблемы перехода между моделями влияют на качество конечного программного продукта. Сам процесс непосредственного формирования кода программы нуждается в пристальном рассмотрении. На сегодняшний день текст программы формируется при помощи уже имеющихся у программиста шаблонов, библиотек функций, которые при сборке в единое целое могут неожиданным образом повлиять на работу программы. Кроме того, использование подобных программных вставок может увеличить и усложнить код (однако написание программы без их использования в наше время практически неприемлемо, так как сильно увеличивает время разработки) [2].

Еще одна проблема возникает при компиляции программы, когда компилятор транслирует стандартные функции языка высокого уровня (ЯВУ) в машинные коды. Конечно, каждая функция или оператор ЯВУ в большинстве случаев транслируются оптимальным образом, однако, как показывает практика, программа, написанная на ЯВУ, занимает большой объем памяти, так как совместное использование различных функций языка может отразиться на оптимальности уже откомпилированной программы. Вследствие компиляции могут появиться

фрагменты «мертвого» (неисполняемого) или не влияющего на результат работы программы кода. Наличие таких фрагментов приводит не только к увеличению кода, но и к появлению не заявленных в документации путей исполнения программы, которые являются значительной уязвимостью, так как увеличивают вероятность появления в ПО недеklarированных возможностей и облегчают проникновение в программу вирусов.

«Мертвый код» в бизнес-процессах

Однако проблема с возникновением участков «мертвого» кода может появиться не на этапе формирования кода, а значительно раньше, так как функциональные требования к ПО также образуют некую логическую структуру, а, значит, и здесь могут наблюдаться тупиковые пути исполнения модели [3].

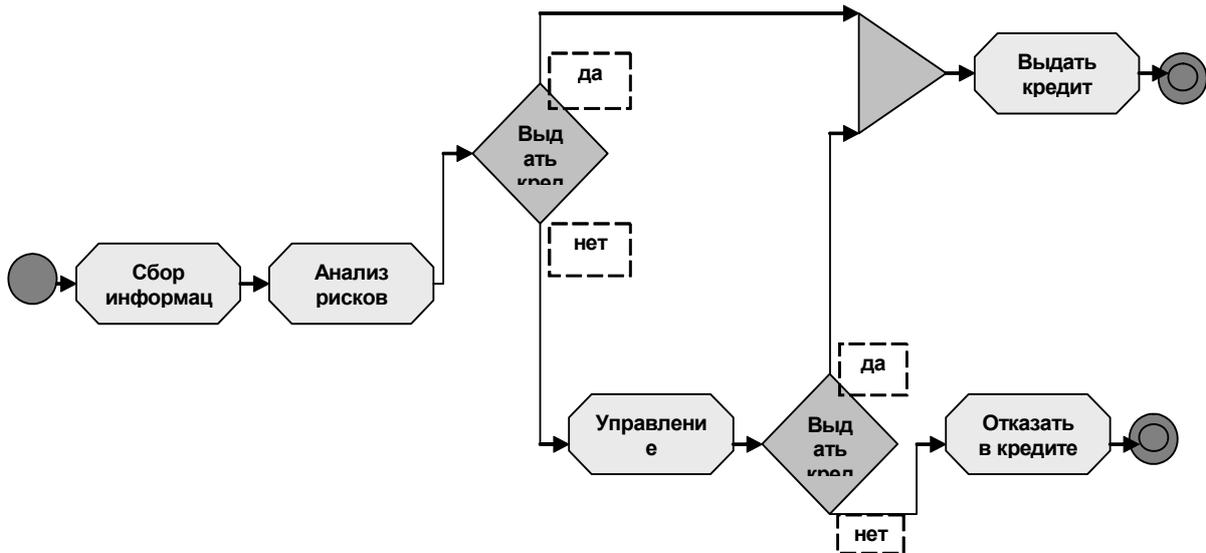


Рис. 1. Модель бизнес-процесса

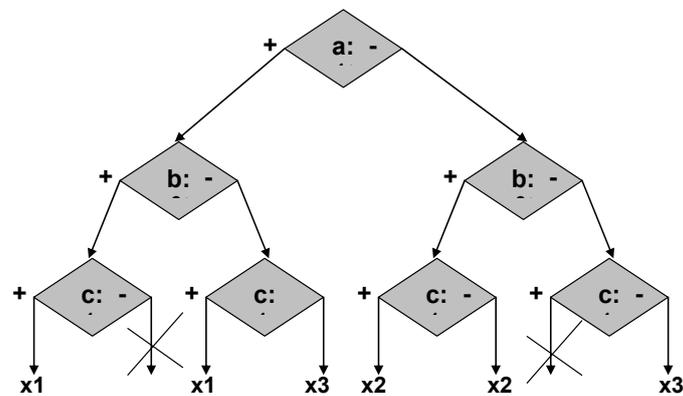


Рис. 2. Тупиковые пути при несогласованных условиях

Рассмотрим пример. На рис. 1 изображена схема, моделирующая бизнес-процесс обработки кредитной информации. На первый взгляд, схема проста, в ней нет никаких тупиковых путей, однако, если подробно остановиться на каком-либо из ее элементов, можно и здесь найти возможность для возникновения «мертвого» кода при дальнейшей разработке ПО. В частности, первый элемент – сбор информации – включает сбор следующих данных:

- персональные данные заказчика;
- кредитная история;
- выбор кредитной программы.

Для осуществления последнего действия необходимо выбрать минимальную ставку по кредиту. Рассмотрим ситуацию, когда выбор происходит из трех вариантов – А, В и С – параллельно другим процессам (структура проверки условий должна быть последовательной, чтобы это не повлияло на другие действия). Пусть А: $x_1 < x_2$, В: $x_2 < x_3$, а С: $x_1 < x_3$. Тогда при их последовательной проверке мы приходим к тому, что в некоторых случаях существуют такие пути, прохождение которых невозможно в силу несогласованности условий (рис. 2).

Заключение

Таким образом, одной из серьезнейших проблем при разработке современного ПО является обеспечение безопасности преобразований моделей при проектировании и преобразовании кода программы во время непосредственной разработки. Следовательно, на передний план выходят средства, способные адекватно оценить соответствие конечного продукта (или законченной модели любого этапа проектирования) изначально определенным и заявленным в технической документации требованиям.

Литература

1. IBM Rational Software. Обзор продуктов и решений–2007. – М., 2007. – 92 с.
2. Торшенко Ю.А. Угроза появления вирусов и НДВ в приложениях, разработанных программно // Сб. трудов н.-т. конф. «День антивирусной безопасности». – СПб: СПбГУ ИТМО, 2007.
3. Торшенко Ю.А. Методика поиска мертвого кода в приложениях, разработанных программно // Сб. трудов н.-пр. конф. «Теория и технология программирования и защиты информации». – СПб: СПбГУ ИТМО, 2008.

Торшенко Юлия Александровна

— Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, ulka@cit.ifmo.ru

Шубин Юрий Михайлович

— Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, w59265@yandex.ru

Осовецкий Леонид Георгиевич

— Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, доктор технических наук, профессор, director@cit.ifmo.ru

УДК 004.056.4

МЕТОД ФОРМИРОВАНИЯ ПРОФИЛЯ ЗАЩИТЫ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ БАНКОВСКОЙ СИСТЕМЫ

Ю.М. Шубин, А.О. Сидоров, Л.Г. Осовецкий

Рассматривается формирование профиля защиты применительно к автоматизированным банковским системам.

Ключевые слова: профиль защиты, оценка риска, банковские системы.

Введение

Становление и развитие банка – процесс длительный и сложный, и по мере того, как банк растет, меняются его цели и задачи, клиентура и перечень услуг, организационная структура, квалификация персонала и применяемые технологии. Автоматизиро-

ванная банковская система (АБС) – информационная основа всей деятельности банка. Она должна быть и мощной, и гибкой, чтобы расти вместе с банком и на каждом этапе развития придавать ему дополнительную устойчивость (а не быть источником дополнительного риска).

АБС является инструментом управления бизнесом. Среди функций, присущих современному комплексному АБС, можно выделить следующие:

- операционный день;
- операции на фондовом рынке, работа банка с ценными бумагами;
- внутрихозяйственная деятельность;
- розничные банковские услуги;
- дистанционное банковское обслуживание;
- электронные банковские услуги;
- расчетный центр и платежная система (карточные продукты);
- интеграция бэк-офиса банка с его внешними операциями;
- управление деятельностью банка, реализация бизнес-логики, контроль, учет, в том числе налоговый, и отчетность;
- управление рисками и стратегическое планирование;
- маркетинговая, рекламная и PR-службы.

Интегрированная система автоматизации подавляющего большинства российских банков в настоящее время представляет собой «лоскутное одеяло». Возможно, ни один банк не сможет с уверенностью сказать, что абсолютно все бизнес-процессы его активных и пассивных подразделений, обеспечивающих служб, управляющих и регулирующих структур, филиалов, дочерних банков и зависимых компаний автоматизированы на основе программных продуктов от одного поставщика программного обеспечения [1].

Последовательность формирования профиля защиты

Разработка профиля защиты (ПЗ) осуществляется в следующей (нисходящей) последовательности:

- идентификация аспектов среды безопасности;
- определение целей безопасности, учитывающих идентифицированные аспекты среды безопасности;
- формирование требований безопасности ИТ, направленных на удовлетворение целей безопасности.

Последовательность формирования ПЗ в соответствии с ГОСТ Р ИСО/МЭК 15408 представлена на рисунке. Применительно к АБС схему формирования ПЗ можно разделить на два основных этапа по источнику исходной информации об объекте охраны (ОО):

1 этап – идентификация аспектов среды безопасности и определение целей безопасности;

2 этап – определение требований безопасности.

Определение среды и целей безопасности следует проводить, опираясь на отраслевые стандарты, которые в настоящее время активно разрабатываются заинтересованными организациями и вводятся в действие. Так, Банк России с 2002 г. разрабатывает банковский стандарт обеспечения информационной безопасности организаций банковской системы Российской Федерации (БС РФ) [2].

Преимущество такого подхода состоит в наличии описания среды и целей безопасности, характерных для определенной отраслевой принадлежности. В этом случае более точно учитывается специфика функционирования системы. Вторым немаловажным фактором является наличие документального обоснования о соответствии принимаемых целей и среды безопасности отраслевому назначению ОО.

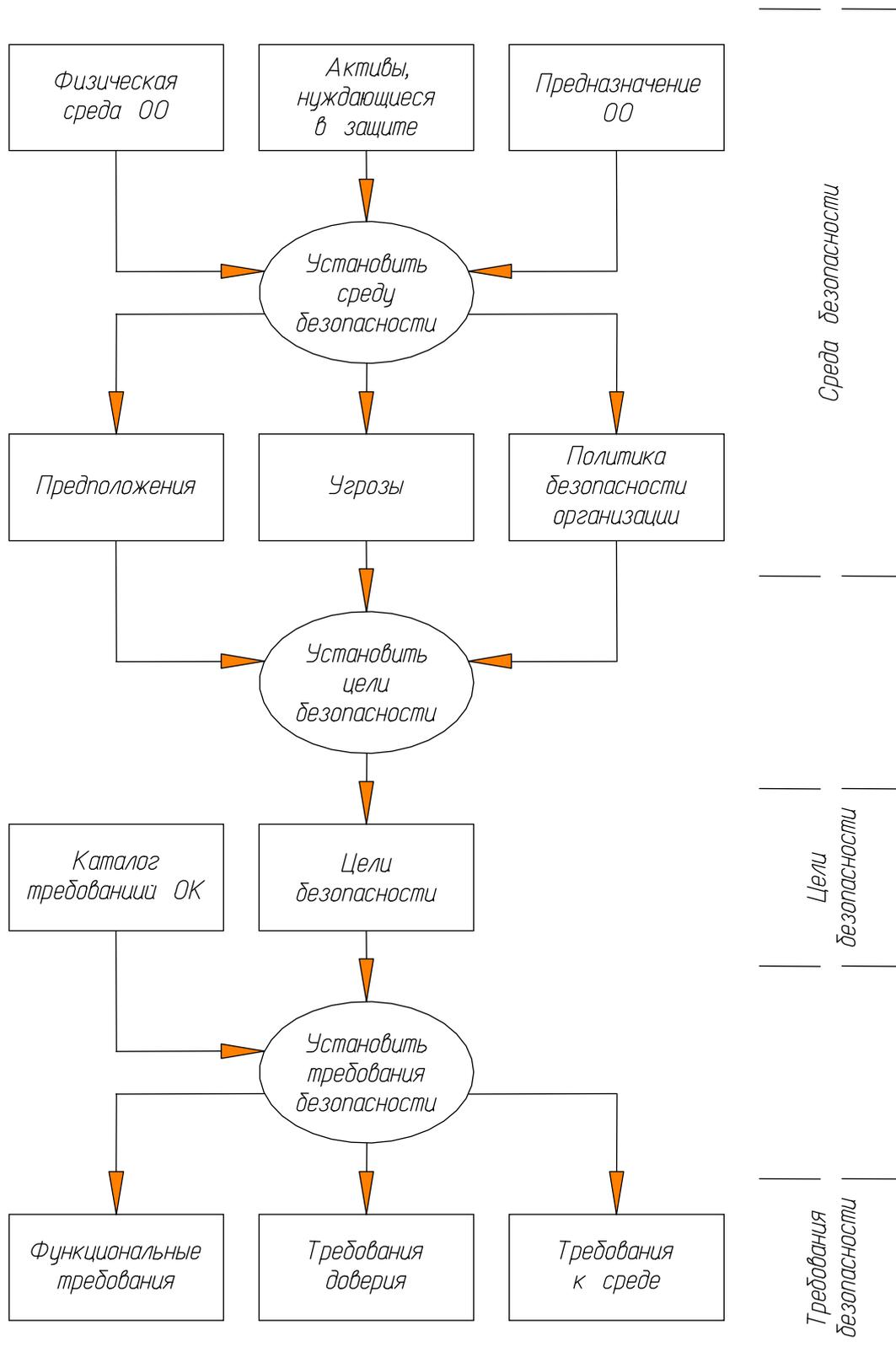


Рисунок. Последовательность формирования ПЗ

Обоснование ПЗ

Назначение обоснования ПЗ заключается в том, чтобы показать, что соответствующий профиль защиты ОО обеспечивает эффективный набор контрмер безопасности ИТ в пределах среды безопасности. В частности, оно показывает, что требования безопасности ИТ удовлетворяют целям безопасности, которые, в свою очередь, учитывают

все аспекты среды безопасности ОО [3]. Подобное обоснование (т.е. отсутствие противоречий) представляется необходимым условием выполнения при формировании ПЗ, но не более того. Для оценки качества, а также сравнения ПЗ необходимо внедрять обоснованную модель оценки ПЗ. Такая модель должна опираться не только на техническую, но и на экономическую составляющую. Только экономические методы оценки и сравнения ПЗ способны отражать конкурентоспособность ОО и его ПЗ в условиях рыночной экономики.

Заключение

В условиях рыночной экономики необходимы конкурентоспособные автоматизированные банковские системы. Это, в свою очередь, ведет к разработке и обоснованию отраслевых профилей защиты, которые были бы не только технически непротиворечивыми, но и опирались на экономические показатели функционирования ОО.

Литература

1. Оценка безопасности автоматизированных систем. Обзор и анализ предлагаемого проекта технического доклада ISO/IEC PDRT19791 // Информационный бюллетень JetInfo. – 2005. – №7(146).
2. Стандарт Банка России СТО БР ИББС-1.0-2006 «Обеспечение информационной безопасности организаций банковской системы РФ».
3. Государственный стандарт РФ ГОСТ Р ИСО/МЭК 15408-1-2002 «Информационная технология. Методы и средства обеспечения безопасности. Критерии оценки безопасности информационных технологий. Часть 1. Введение и общая модель».

Шубин Юрий Михайлович

— Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, w59265@yandex.ru

Сидоров Алексей Олегович

— Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, sao@idsm.ru

Осовецкий Леонид Георгиевич

— Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, доктор технических наук, профессор, director@cit.ifmo.ru

USING OF INTEGRAL MEASUREMENTS IN STATE OBSERVATION OF DISTRIBUTED THERMODYNAMIC OBJECT

Andrey Blinnikov (goofinator@mail.ru), Vladimir Boikov (viboikov@mail.ru)

Keywords: distributed object, observer, temperature field, reconstruction of initial conditions, partial differential equations.

The task of state reconstruction of thermodynamic object based on its initial conditions reconstruction has been considered. The method of integral measurement using for observer realization has been proposed. All-purpose ofcgtmbsserver for any variety of models has been synthesized.

THE MAIN ASPECTS MODELLING OF THE REAL AND COMPLEX ANALYSIS IN THE FRAMEWORK OF HYPERNATURAL NUMBERS AXIOMATIC

Elena Prazdnikova (juhla@inbox.ru), Yuri Lovyagin (lovyagin@math.spbu.ru)

Keywords: nonstandard arithmetic, hyperrational numbers, complex hyperrational numbers.

Formalized theory of hyperrational numbers is stated in the paper. The theory is used for modeling of the real and complex analysis elements in the framework of formalized number theory. The idea of such modeling comes from A. Dragalin. The result functions modeling the real and complex functions are given as an application.

FACILITY ANALYSIS OF CONTINUOUS REPRESENTATION OF A TECHNICAL OBJECT REMOTE CONTROL TASK WITH A CHANNEL ENVIRONMENT FACTOR

**Nadezhda Bozhenkova nyb9@yandex.ru, Olga Osiptseva belcka@gmail.ru,
Anatoliy Ushakov (ushakov-AVG@yandex.ru)**

Keywords: channel environment factor, remote control, continuous representation.

Facility analysis of continuous representation of a technical object remote control task with a channel environment factor is discussed. The procedure of control synthesis is suggested with a glance to the channel environment factor based on such system parameters as characteristic frequency and phase stability factor.

DEGENERATION CONTROL OF COMPLEX DYNAMIC SYSTEMS OF CONSTRUCTIVE TYPE WITH HUMAN COMPONENTS

**Nataliya Dudarenko (dudarenko@yandex.ru), Mayya Polyakova (12noch@mail.ru),
Anatoliy Ushakov (ushakov-AVG@yandex.ru)**

Keywords: complex dynamic system, degeneration, control, condition value, singular value, system with human components.

The problem of degeneration control of complex dynamic systems of constructive type with human components is concerned in this note. Such systems are usually involved into the technological process for achievement of the best common result, for example: crew, research laboratory staff, any functional or creative group, etc. Degeneration functionals constructed with singular values of criterion system matrixes are used for degeneration control estimation.

DUAL-LINK OPTOELECTRONIC MEASURING SYSTEM SYNTHESIS WITH INTERVAL MODELING REPRESENTATIONS

Artyom Tsventarny (taifyn@nm.ru), Anatoliy Ushakov (ushakov-AVG@yandex.ru)

Keywords: optoelectronic, follow-up system, interval parameters, expansion-modal method.

The problem of dual-link optoelectronic measuring system synthesis with interval modeling representations is stated and solved in the paper. Expansion-modal method is used for synthesis with a glance to a single output feedback existence in the original dynamic object structure.

**MODELING OF THE ASYMETRICAL SHAFT HEATING EFFECT
INFLUENCE ON ITS TRAJECTORY IN THE JOURNAL BEARING**
Alexander Fedorov (aleksandr.fml@gmail.com), Boris Grigoriev (grig@tu.neva.ru)

Keywords: journal bearing, Morton effect, static imbalance, thermal bow.

The article is devoted to the analysis of an asymmetrical shaft heating influence of an unbalanced shaft on a trajectory of a synchronous whirl in the cylindrical bearing. The mathematical model including both the thermohydrodynamic analysis of bearings and the analysis of the asymmetrical shaft heating influence on its trajectory is developed. The scheme of the numerical solution of the equations in the model is constructed. The system consisting of a shaft with two bearings and the overhung disk was considered as an example.

HARMONIC DISTURBANCE COMPENSATION

**Alexey Bobtsov (bobtsov@mail.ru), Anton Pyrkin (a.pyrkin@gmail.com), Sergey Kolyubin (ksa_tau@mail.ru), Kseniya Rogozhina (xenia_r@pochta.ru),
Mariya Slinchenkova (n_e_l_l@mail.ru)**

Keywords: frequency identification, disturbance rejection, output control.

This article deals with evolution of known approaches about compensation of harmonic disturbances using only output measuring. Approach based on harmonic disturbance compensation with unknown frequency, exciting on linear control object, is proposed. A disturbance rejection task for linear object with any relative degree is considered in this work.

**APPLICATION OF FIELD SEPARATION TECHNIQUE
ON QUADRUPOLE LENS FINITE ELEMENT MODELING**

Alexandr Ignatiev (ignat@hotmail.ru), Maria Korsun (maria.korsun@gmail.com)

Keywords: numerical simulation, magnetostatics, charged-particles accelerator.

Application of variational and finite element statements with two scalar potentials for solving three-dimensional magnetostatic problems with field separation are described in this paper. The use of this approach is illustrated by the sample of quadrupole numerical simulation.

THREE-DIMENSIONAL SIMULATION OF SELF-GRAVITATING GAS
Igor Kulikov (kulikov@ssd.scc.ru), Vitaliy Vshivkov vsh@ssd.scc.ru

Keywords: gas dynamics, computer simulation, Poisson equation, Sod shock tube, equilibrium configurations. Analytical dependences of rotating self-gravitating gas as a result of nonstationary processes three-dimensional modeling in the gravitating gas system with a self-consistent field are received. Numerical realization of the model of unstable 3D processes in gravitating gas systems with a self-consistent field in the Cartesian coordinates is considered. A modified rotation-invariant fluids-in-cell method for numerical realization of equations of gas dynamics is considered. Results of applying the numerical model in a spatial case are presented.

**PRODUCTION AND TECHNICAL SYSTEMS MATHEMATICAL MODEL
AND PROGRAM REALISATION IN CONDITION
FORECASTING TASKS**

**Dmitriy Zubok (zubok@mail.ifmo.ru), Victor Klimenko (shurup239@gmail.com),
Aleksander Khvastunov(hvast@mail.ru)**

Keywords: EAM-system, Bayes statistical estimation methods, technical system reliability.

Data structure mathematical model for automated control systems of enterprise production assets is suggested in the article Problems of technical system condition forecasting are given special attention to. The algorithm of data structure design according to mathematical model is proposed.

**STATISTICAL ANALYSIS OF AGE-RELATED CHANGES
IN HUMAN NEUROMUSCULAR SYSTEM**

**Aleksandr Yatsenko (aleks@kazan-spu.ru), Sergey Dyomin (sergey@kazan-spu.ru),
Emil Zinatullin (emilzm@kazan-spu.ru), Renat Yulmetyev (rmy@kazan-spu.ru)**

Keywords: time series analyses, human neuromuscular system, statistical memory quantifiers, Zwanzig–Mori's memory functions formalism.

The article deals with the original mathematical method of age-related changes analysis in human neuromuscular system. It is based on the statistical memory effects in physiological time series of the human neuromuscular system. The developed analytical method allows revealing the stochastic features of the force output variability for the different age groups. The comparative analysis of the statistical memory quantifiers points to the significant alterations in the manifestation of the memory effects in human neuromuscular activity during the process of aging. Particularly, the force output variability of the old and older-old people is characterized by more significant fluctuations and by the weakening of the long-range memory in comparison with the young people's muscular activity. Besides we disclose the specific features in behavior of the spatial and spectral characteristics that belong to the different age groups of healthy people. Particularly, the distinctive frequencies, reflecting the periodic features in functioning of the human muscular system, are revealed. The developed method is useful for understanding the physical mechanisms, which underlie the process of biological aging.

SIMULATION OF ENAMEL AND DENTINE ABLATION PROCESSES
Olga Sidorova (sidorova_o_p@mail.ru), Alexandra Pushkareva (alpushkareva@yandex.ru)

Keywords: erbium laser, hard biological tissue, simulator of ablation, enamel, dentine.

The article gives information on action mechanism of erbium laser to hard biological tissues. In addition a new adequate simulator of enamel and dentine ablation was devised. Also the article shows a calculation of shape and sizes of crater, appeared after influence of radiation of erbium laser to hard tissue. The obtained results, advantages and disadvantages of this research effort are discussed.

**RESULT FORECASTING METHOD FOR MULTISUBJECT
COMPETITION IN THE INFORMATION TECHNOLOGIES**

**Alexey Vyakhirev (vyakhirev@ifmo.ru), Artyom Pavlyutenkov (pavlutenkov@mail.ru),
Leonid Osovetsky (cit@mail.ifmo.ru)**

Keywords: forecasting, multisubject competition, 36 China stratagems.

Forecasting possibility for multisubject competition results with the help of philosophy model of 36 China stratagems on the information technologies platform is described in the article.

STRUCTURED RISK ESTIMATE METHOD DEVELOPMENT

**Aleksey Sidorov (sao@idsm.ru), Yulia Torshenko (ulka@cit.ifmo.ru),
Artyom Pavlyutenkov (pavlutenkov@mail.ru), Leonid Osovetsky (cit@mail.ifmo.ru)**

Keywords: risk management, risk estimate, fuzzy logic.

The article deals with risk estimate, not only as a management function, but as an institution protection in general and its abilities to function.

**VULNERABILITY DETECTION
AT THE FIRST STAGE OF SOFTWARE ENGINEERING**

**Yulia Torshenko (ulka@cit.ifmo.ru), Yuri Shubin (w59265@yandex.ru),
Leonid Osovetsky (cit@mail.ifmo.ru)**

Keywords: dead code, software engineering, software development.

The purpose of the given project is to study one of the major aspects of stable and safe existence of information technologies, computer systems and programming technologies – the presence of a «dead code», viruses and not declared possibilities in the software with their guaranteed revealing during the whole life cycle of the system.

**METHOD OF PROTECTION PROFILE DEVELOPMENT
FOR AUTOMATED BANKING SYSTEM**

**Yuri Shubin (w59265@yandex.ru), Aleksey Sidorov (sao@idsm.ru), Leonid Osovetsky
(cit@mail.ifmo.ru)**

Keywords: protection profile, risk analysis, banking systems.

The method of protection profile development for automated banking systems is considered.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 1. УПРАВЛЕНИЕ | 3 |
| Блинников А.А., Бойков В.И. Использование интегральных измерений в наблюдении состояния распределенного термодинамического объекта | 3 |
| Праздникова Е.В., Ловягин Ю.Н. Моделирование основных аспектов вещественного и комплексного анализа в рамках аксиоматики для гипернатуральных чисел..... | 10 |
| Боженкова Н.Ю., Осипцева О.С., Ушаков А.В. Анализ возможностей непрерывных представлений задачи дистанционного управления техническим объектом с учетом фактора канальной среды | 18 |
| Дударенко Н.А., Полякова М.В., Ушаков А.В. Контроль вырождения сложных динамических систем созидательного типа с антропокомпонентами | 25 |
| Цвентарный А.Ю., Ушаков А.В. Синтез двухканальной оптоэлектронной измерительной системы с использованием интервальных модельных представлений..... | 31 |
| Федоров А.Е., Григорьев Б.С. Моделирование эффекта влияния несимметричного нагрева вала на его траекторию в цилиндрическом подшипнике..... | 43 |
| Бобцов А.А., Пыркин А.А., Колюбин С.А., Рогожина К.П., Слинченкова М.В. Компенсация гармонического возмущения..... | 51 |
| 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ..... | 61 |
| Корсун М.М., Игнатъев А.Н., Рояк М.Э. Применение технологии выделения поля при конечноэлементном моделировании квадрупольной линзы | 61 |
| Куликов И.М., Вшивков В.А. Трехмерное моделирование самогравитирующего газа | 70 |
| Зубок Д.А., Клименко В.В., Хвастунов А.П. Математическая модель производственно-технических систем и программная реализация в задачах прогнозирования состояний | 79 |
| 3. ЖИВЫЕ СИСТЕМЫ..... | 85 |
| Яценко А.В., Дёмин С.А., Зинатуллин Э.М., Юльметьев Р.М. Статистический анализ возрастных изменений нервно-мышечной системы человека | 85 |
| Сидорова О.П., Пушкарева А.Е. Моделирование процессов абляции твердых тканей зуба | 95 |
| 4. ИНФОРМАЦИОННАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ..... | 104 |
| Вяхирев А.А., Павлютенков А.А., Осовецкий Л.Г. Метод прогнозирования результатов многосубъектовой конкуренции в информационных технологиях | 104 |
| Сидоров А.О., Торшенко Ю.А., Павлютенков А.А., Осовецкий Л.Г. Разработка методики структурированной оценки риска | 108 |
| Торшенко Ю.А., Шубин Ю.М., Осовецкий Л.Г. Обнаружение уязвимостей на начальных этапах проектирования программного продукта | 111 |
| Шубин Ю.М., Сидоров А.О., Осовецкий Л.Г. Метод формирования профиля защиты автоматизированной банковской системы..... | 113 |
| SUMMARY..... | 117 |