УДК 681.51

АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПО ВЫХОДУ МНОГОКАНАЛЬНЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ СТАЦИОНАРНЫМИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ СИСТЕМАМИ

А.А. Бобцов[a], М.В. Фаронов[a], И.Б. Фуртат[a,b], А.А. Пыркин[a], В. Цзянь[c]

[a] Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, cainenash@mail.ru
[b] Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, 199178, Российская Федерация
[c] Университет Ханчжоу Дяньцзы, Ханчжоу, 310018, Китай

Аннотация. Рассмотрена задача адаптивного управления параметрически неопределенными многоканальными линейными стационарными объектами с произвольной относительной степенью каждой локальной подсистемы. Синтезирован регулятор, обеспечивающий стабилизацию объекта управления при условии, что для каждой подсистемы: измеряются только выходные переменные; точно известны относительные степени, но не порядок линейных дифференциальных уравнений; выполнены условия минимальной фазовости. Для упрощения общей методики синтеза управления рассматривается процедура стабилизации двухканальной системы. В качестве базового подхода управления выбирается метод «последовательный компенсатор», основанный на использовании теоремы о пассификации А.Л. Фрадкова, с дополнительными фильтрами, содержащими в своей структуре большие коэффициенты усиления. Анализируется устойчивость замкнутой системы в классе указанных типов регуляторов, а также рассматриваются необходимые и достаточные условия, обеспечивающие экспоненциальные свойства сходимости. В качестве практических рекомендаций использования рассматриваемого подхода предлагается адаптивная версия метода «последовательный компенсатор», основанная на настройке коэффициента усиления, на базе алгоритма интегрального типа. Для иллюстрации работоспособности предлагаемого в работе подхода приведены результаты компьютерного моделирования для подсистем третьего и второго порядка соответственно, функционирующих в условиях полной параметрической неопределенности. Показано, что применение данной методики синтеза позволяет синтезировать алгоритмы управления многоканальными параметрически неопределенными системами, обладающими минимальным динамическим порядком в сравнении с известными зарубежными и отечественными аналогами.

Ключевые слова: адаптивное управление, многоканальные системы, параметрическая неопределенность.

Благодарности. Работа выполнена при государственной финансовой поддержке ведущих университетов Российской Федерации (субсидия 074-U01, Проект 14.Z50.31.0031, Госзадание 2014/190 (проект 2118)).

ADAPTIVE OUTPUT CONTROL OF MULTICHANNEL LINEAR STATIONARY SYSTEMS UNDER PARAMETRIC UNCERTAINTY

A.A. Bobtsov[a], M.V. Faronov[a], I.B. Furtat[a,b], A.A. Pyrkin[a], W. Jian[c]

[a] ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, cainenash@mail.ru
[b] Institute of Problems of Mechanical Engineering Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, 199178, Russian Federation
[c] Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China

Abstract. The paper deals with the problem of adaptive control for multi-channel linear stationary plants under parametric uncertainty with arbitrary relative degree of each local subsystem. The synthesized regulator provides stabilization of control plant on condition that for each local subsystem only output variables are measured with known relative degrees, but the order of linear differential equations is unknown. We consider the synthesis of control system for two-channel system for simplification of the synthesis method. The "serial compensator" algorithm is chosen as basic approach with A.L. Fradkov's passification theorem and additional filters containing high gain constants in their structure. Durability of the closed system in the group of pointed types of regulators is analyzed and the necessary and sufficient conditions for exponential convergence properties are considered. We suggest adaptive version of the "serial compensator" method from the practical point of view, where customization of the gain constant is based on the integral type algorithm. We show the results of computer simulation for the third and second order subsystems under parametric uncertainty to illustrate the proposed approach workability. It is shown that the proposed technique makes it possible to synthesize control algorithms for multi-channel systems under parametric uncertainty with minimal dynamical order as compared to known foreign and domestic counterparts.

Keywords: adaptive control, multichannel systems, parametric uncertainty.

Acknowledgements. The work is partially financially supported by the Government of the Russian Federation (grant 074-U01), Project 14.Z50.31.0031, Government order 2014/190 (project 2118)).

Введение

Задача управления объектами в условии параметрической неопределенности со скалярным входом–выходом стала одной из классических задач современной теории управления. Для ее решения предложены и исследованы различные методы синтеза алгоритмов регулирования, например [1–4]. В последнее время наблюдается рост интереса к проблемам управления многоканальными объектами. Это связано с появлением новых задач в биологии, физике, робототехнике, энергетических и телекоммуникационных сетях и т.п. При этом возникает новая проблема, связанная с управлением группой взаимосвязанных объектов. На сегодняшний день предложено достаточно методов и подходов для управления многоканальными объектами. Так, в [2] предложен новый метод вложения систем, позволяющий синтезировать статические регуляторы, обеспечивающие инвариантность по отношению к возмущениям. В [5] предложен метод вспомогательного контура для компенсации возмущений, обобщенный затем для управления линейными [6, 7], нелинейными [8] и неминимально-фазовыми [9] многоканальными объектами. В [10] предложен алгоритм, близкий по идее к настоящей работе и позволяющий синтезировать простые алгоритмы компенсации возмущений. В [11] рассмотрено адаптивное управление многосвязными объектами с неминимальной реализацией эталонной модели. В [12, 13] представлена адаптивная схема управления по выходу нелинейными многоканальными системами с неизвестным нестационарным запаздыванием. В [14, 15] на базе метода бэкстеппинга предложено адаптивное управление для класса нелинейных многоканальных систем с несимметричными входными ограничениями. В [16] рассмотрена задача робастного слежения за эталонным сигналом на скользящих режимах. В [17] предложена адаптивная схема стабилизации многоканальной системы с использованием наблюдателя с большим коэффициентом усиления. Задача адаптивного дискретного управления нестационарной многоканальной системой на базе нечеткой логики рассмотрена в [18]. В [4] предложены алгоритмы управления многоканальными объектами с использованием метода скоростного градиента. Задачи адаптивного управления с оптимизацией, оптимального управления непрерывными и дискретными линейными, нелинейными, стохастическими объектами рассмотрены в [19, 20].

Несмотря на большое количество результатов в области управления многоканальными системами, по-прежнему актуальной задачей остается поиск простых алгоритмов управления, что особенно важно при управлении большой группой взаимосвязанных объектов. Одним из таких алгоритмов является «последовательный компенсатор», впервые предложенный в [12] для управления параметрически неопределенными объектами. Достоинство данного алгоритма состоит в простоте реализации и подборе настраиваемых параметров. Настоящая работа посвящена обобщению метода «последовательного компенсатора» на управление многоканальными системами управления.

В работе на примере двухканальной системы управления рассматривается применение метода [21] для управления многоканальными объектами, связанными через каналы выходов. Предполагается, что параметры каждой подсистемы неизвестны и доступны измерению только скалярные входы и выходы. Получены децентрализованные регуляторы и условия на расчет их параметров, которые обеспечивают экспоненциальную устойчивость выходов каждой локальной подсистемы. Приведены результаты моделирования, иллюстрирующие эффективность предложенного алгоритма.

В отличие от [10], где предложены результаты, схожие с результатами настоящей работы, здесь будет применен алгоритм «последовательный компенсатор», который не содержит дополнительного динамического звена (вспомогательного контура) для выделения возмущений. Исходя из этого, предложенный здесь алгоритм будет иметь меньший динамический порядок.

Постановка задачи

Ради простоты обобщения метода [21] на многоканальные системы рассмотрим двухканальный объект управления, математическая модель которого представлена следующими выражениями:

$$y_1(t) = \frac{b(p)}{a(p)}u_1(t) + \frac{c(p)}{a(p)}y_2(t), \tag{1}$$

$$y_2(t) = \frac{d(p)}{e(p)}u_2(t) + \frac{f(p)}{e(p)}y_1(t), \tag{2}$$

где $p = d/dt$ – оператор дифференцирования; выходные переменные $y_1(t)$, $y_2(t)$ измеряются, но их производные не поддаются измерению; $a(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0$, $b(p) = b_m p^m + ... + b_1 p + b_0$, $c(p) = c_r p^r + c_{r-1}p^{r-1} + ... + c_1 p + c_0$, $e(p) = p^z + e_{z-1}e^{z-1} + ... + e_1 p + e_0$, $d(p) = d_g p^g + ... + d_1 p + d_0$, $f(p) = f_i p^i + f_{i-1}p^{i-1} + ... + f_1 p + c_0$ – операторы с неизвестными коэффициентами; $m \le n-1$; $g \le z-1$; передаточные функции $W_1(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ и $W_2(s) = \frac{d(s)}{e(s)}$ имеют относительные степени $\rho_1 = n - m$ и $\rho_2 = z - g$ соответственно, s – комплексная переменная; полиномы $b(s)$ и $d(s)$ – гурвицевы, а коэффициенты $b_m > 0$, $d_g > 0$. Цель управления состоит в том, чтобы обеспечить экспоненциальную устойчивость положений равновесия $y_1 = 0$ и $y_2 = 0$.

Синтез алгоритма управления

В соответствии с [21] выберем закон управления для каждого канала следующим образом:

$$u_1(t) = -\tilde{k}_1 \alpha_1(p)\xi_{11}(t), \tag{3}$$

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{11}(t) = \sigma_1 \xi_{12}(t), \\ \dot{\xi}_{12}(t) = \sigma_1 \xi_{13}(t), \\ \ldots \\ \dot{\xi}_{1;\rho_1-1}(t) = \sigma_1 \left(-k_{11}\xi_{11}(t) - k_{12}\xi_{12}(t) - \ldots - k_{1;\rho_1-1}\xi_{1;\rho_1-1}(t) + k_{11} y_1(t) \right), \end{cases} \tag{4}$$

$$u_2 = -\tilde{k}_2 \alpha_2(p) \xi_{21}(t), \tag{5}$$

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{21}(t) = \sigma_2 \xi_{22}(t), \\ \dot{\xi}_{22}(t) = \sigma_2 \xi_{23}(t), \\ \ldots \\ \dot{\xi}_{2;\rho_2-1}(t) = \sigma_2 \left(-k_{21}\xi_{21}(t) - k_{22}\xi_{22}(t) - \ldots - k_{2;\rho_2-1}\xi_{2;\rho_2-1}(t) + k_{21} y_2(t) \right), \end{cases} \tag{6}$$

$$\tilde{k}_1 = \kappa_1 + \mu_1, \ \tilde{k}_2 = \kappa_2 + \mu_2, \tag{7}$$

где числа $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ и оператор $\alpha_1(p)$ степени $\rho_1 - 1$ и $\alpha_2(p)$ степени $\rho_2 - 1$ выбираются таким образом, чтобы передаточные функции $H_1(s) = \dfrac{\alpha_1(s)b(s)}{a(s) + \mu_1\alpha_1(s)b(s)}$ и $H_2(s) = \dfrac{\alpha_2(s)d(s)}{e(s) + \mu_2\alpha_2(s)b(s)}$ были строго вещественно положительными, числа $\sigma_1 > \tilde{k}_1$, $\sigma_2 > \tilde{k}_2$, а коэффициенты k_{1i}, k_{2i} рассчитываются из требований экспоненциальной устойчивости систем (4), (6) при нулевых входах $y_1(t)$, $y_2(t)$.

Закон управления (3)–(7) является технически реализуемым, так как содержит только известные или измеряемые сигналы. Однако требуется найти аналитические условия его применимости для стабилизации объекта (1), (2) или, иными словами, найти ограничения на числа $\tilde{k}_1$, $\tilde{k}_2$ и σ_1, σ_2, при которых система (1)–(7) является экспоненциально устойчивой.

Основной результат

Проведем ряд преобразований. Подставляя (3) в уравнение (1), получим

$$y_1(t) = \frac{b(p)}{a(p)}[-k_1\alpha_1(p)\hat{y}_1(t)] + \frac{c(p)}{a(p)} y_2(t) = \frac{b(p)}{a(p)}[-k_1\alpha_1(p) y_1(t) + k_1\alpha_1(p)\varepsilon_1(t)] + \frac{c(p)}{a(p)} y_2(t), \tag{8}$$

где функция $\hat{y}_1(t) = \xi_{11}(t)$ – оценка первой выходной переменной, ошибка $\varepsilon_1(t) = y_1(t) - \hat{y}_1(t)$. Аналогично для второго канала, подставляя (5) в (2), имеем

$$y_2(t) = \frac{d(p)}{e(p)}[-k_2\alpha_2(p)\hat{y}_2(t)] + \frac{f(p)}{e(p)} y_1(t) = \frac{d(p)}{e(p)}[-k_2\alpha_2(p) y_2(t) + k_2\alpha_2(p)\varepsilon_2(t)] + \frac{f(p)}{e(p)} y_1(t), \tag{9}$$

где функция $\hat{y}_2(t) = \xi_{12}(t)$ – оценка второй выходной переменной, $\varepsilon_2(t) = y_2(t) - \hat{y}_2(t)$.

После простых преобразований модели (8), (9) можно представить как

$$y_1(t) = \frac{b(p)\alpha_1(p)}{a(p) + \mu_1 b(p)\alpha_1(p)}[-\kappa_1 y_1(t) + (\mu_1 + \kappa_1)\varepsilon_1(t)] + \frac{c(p)}{a(p) + \mu_1 b(p)\alpha_1(p)} y_2(t), \tag{10}$$

$$y_2(t) = \frac{d(p)\alpha_2(p)}{e(p) + \mu_2 d(p)\alpha_2(p)}[-\kappa_2 y_2(t) + (\mu_2 + \kappa_2)\varepsilon_2(t)] + \frac{f(p)}{e(p) + \mu_2 d(p)\alpha_2(p)} y_1(t), \tag{11}$$

где передаточные функции

$$H_1(s) = \frac{b(s)\alpha_1(s)}{a(s) + \mu_1 b(s)\alpha_1(s)}; \ H_2(s) = \frac{d(s)\alpha_2(s)}{e(s) + \mu_2 d(s)\alpha_2(s)} \tag{12}$$

строго вещественно положительны. Представим (10), (11) в форме вход–состояние–выход:

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{b}_1\left(-\kappa_1 y_1(t) + (\mu_1 + \kappa_1)\varepsilon_1(t)\right) + \mathbf{q}_1 y_2(t), \tag{13}$$

$$y_1(t) = \mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_1(t), \tag{14}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{b}_2\left(-\kappa_2 y_2(t) + (\mu_2 + \kappa_2)\varepsilon_2(t)\right) + \mathbf{q}_2 y_1(t), \tag{15}$$

$$y_2(t) = \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_2(t), \tag{16}$$

где $\mathbf{x}_1(t) \in R^n, \mathbf{x}_2(t) \in R^z$ – векторы переменных состояния (10), (11); $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{q}_1$ $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{q}_2$ и $\mathbf{c}_2$ – соответствующие матрицы перехода от (10), (11) к (13), (14) и (15), (16).

Так как передаточные функции (12) удовлетворяет условиям строгой вещественной положительности, то в силу леммы Якубовича–Калмана [3] можно указать симметрические положительно определенные матрицы $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, удовлетворяющие следующим матричным уравнениям:

$$\mathbf{A}_1^T\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_1\mathbf{A}_1=-\mathbf{Q}_1,\ \ \mathbf{P}_1\mathbf{b}_1=\mathbf{c}_1, \tag{17}$$

$$\mathbf{A}_2^T\mathbf{P}_2+\mathbf{P}_2\mathbf{A}_2=-\mathbf{Q}_2,\ \ \mathbf{P}_2\mathbf{b}_2=\mathbf{c}_2, \tag{18}$$

где $\mathbf{Q}_1=\mathbf{Q}_1^T$, $\mathbf{Q}_2=\mathbf{Q}_2^T$ – некоторые положительно определенные матрицы.

Представим модели (4), (6) в векторно-матричной форме:

$$\dot{\xi}_1(t)=\sigma_1\left(\mathbf{\Gamma}_1\xi_1(t)+\mathbf{d}_1k_{11}y_1(t)\right), \tag{19}$$

$$\hat{y}_1(t)=\mathbf{h}_1^T\xi_1(t), \tag{20}$$

$$\dot{\xi}_2(t)=\sigma_2\left(\mathbf{\Gamma}_2\xi_2(t)+\mathbf{d}_2k_{21}y_2(t)\right), \tag{21}$$

$$\hat{y}_2(t)=\mathbf{h}_2^T\xi_2(t), \tag{22}$$

где $\mathbf{\Gamma}_1=\begin{bmatrix}0&1&0&...&0\\0&0&1&...&0\\0&0&0&...&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-k_{11}&-k_{12}&-k_{13}&...&-k_{1;\rho_1-1}\end{bmatrix}$, $\mathbf{\Gamma}_2=\begin{bmatrix}0&1&0&...&0\\0&0&1&...&0\\0&0&0&...&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-k_{21}&-k_{22}&-k_{23}&...&-k_{2;\rho_2-1}\end{bmatrix}$, $\mathbf{d}_1^T=\begin{bmatrix}0&0&0&...&1\end{bmatrix}_{(\rho_1-1)\times1}$,

$\mathbf{d}_2^T=\begin{bmatrix}0&0&0&...&1\end{bmatrix}_{(\rho_2-1)\times1}$ и $\mathbf{h}_1^T=[1\ \ 0\ \ 0\ \ ...\ \ 0]_{(\rho_1-1)\times1}$, $\mathbf{h}_2^T=[1\ \ 0\ \ 0\ \ ...\ \ 0]_{(\rho_2-1)\times1}$.

Введем в рассмотрение векторы отклонений:

$$\mathbf{\eta}_1(t)=\mathbf{h}_1y_1(t)-\xi_1(t), \tag{23}$$

$$\mathbf{\eta}_2(t)=\mathbf{h}_2y_2(t)-\xi_2(t), \tag{24}$$

тогда в силу структуры $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$ ошибки $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$ можно представить как

$$\varepsilon_1(t)=y_1(t)-\hat{y}_1(t)=\mathbf{h}_1^T\mathbf{h}_1y_1(t)-\mathbf{h}_1^T\xi_1(t)=\mathbf{h}_1^T\mathbf{\eta}_1(t), \tag{25}$$

$$\varepsilon_2(t)=y_2(t)-\hat{y}_2(t)=\mathbf{h}_2^T\mathbf{h}_2y_2(t)-\mathbf{h}_2^T\xi_2(t)=\mathbf{h}_2^T\mathbf{\eta}_2(t). \tag{26}$$

Дифференцируя векторы (23), (24), получаем:

$$\dot{\mathbf{\eta}}_1(t)=\mathbf{h}_1\dot{y}_1(t)-\sigma_1\left(\mathbf{\Gamma}_1(\mathbf{h}_1y_1(t)-\mathbf{\eta}_1(t))+\mathbf{d}_1k_{11}y_1(t)\right)=\mathbf{h}_1\dot{y}_1(t)+\sigma_1\mathbf{\Gamma}_1\mathbf{\eta}_1(t)-\sigma_1(\mathbf{d}_1k_{11}+\mathbf{\Gamma}_1\mathbf{h}_1)y_1(t), \tag{27}$$

$$\dot{\mathbf{\eta}}_2(t)=\mathbf{h}_2\dot{y}_2(t)-\sigma_2\left(\mathbf{\Gamma}_2(\mathbf{h}_2y_2(t)-\mathbf{\eta}_2(t))+\mathbf{d}_2k_{21}y_2(t)\right)=$$
$$\mathbf{h}_2\dot{y}_2(t)+\sigma_2\mathbf{\Gamma}_2\mathbf{\eta}_2(t)-\sigma_2(\mathbf{d}_2k_{21}+\mathbf{\Gamma}_2\mathbf{h}_2)y_2(t). \tag{28}$$

Так как $\mathbf{d}_1k_{11}=-\mathbf{\Gamma}_1\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{d}_2k_{21}=-\mathbf{\Gamma}_2\mathbf{h}_2$ (может быть проверено подстановкой), то

$$\dot{\mathbf{\eta}}_1(t)=\mathbf{h}_1\dot{y}_1(t)+\sigma_1\mathbf{\Gamma}_1\mathbf{\eta}_1(t),\ \varepsilon_1(t)=\mathbf{h}_1^T\mathbf{\eta}_1(t), \tag{29}$$

$$\dot{\mathbf{\eta}}_2(t)=\mathbf{h}_2\dot{y}_2(t)+\sigma_2\mathbf{\Gamma}_2\mathbf{\eta}_2(t),\ \varepsilon_2(t)=\mathbf{h}_2^T\mathbf{\eta}_2(t), \tag{30}$$

где матрицы $\mathbf{\Gamma}_1$, $\mathbf{\Gamma}_2$ – гурвицевы в силу расчета параметров k_i систем (4), (6) и, следовательно,

$$\mathbf{\Gamma}_1^T\mathbf{N}_1+\mathbf{N}_1\mathbf{\Gamma}_1=-\mathbf{Q}_3,\ \ \mathbf{\Gamma}_2^T\mathbf{N}_2+\mathbf{N}_2\mathbf{\Gamma}_2=-\mathbf{Q}_4 \tag{31}$$

где $\mathbf{N}_1=\mathbf{N}_1^T>0$, $\mathbf{N}_2=\mathbf{N}_2^T>0$ и $\mathbf{Q}_3=\mathbf{Q}_3^T>0$, $\mathbf{Q}_4=\mathbf{Q}_4^T>0$.

Условия работоспособности закона управления (3)–(7) для стабилизации системы (13)–(16), (19)–(22), (29), (30) приведены в следующей теореме.

Утверждение. Рассмотрим двухканальную систему (1), (2). Пусть числа $\rho_1=n-m>0$ и $\rho_2=z-g>0$, а полиномы $b(s)$ и $d(s)$ – гурвицевы.

Пусть числа $0<\delta<0{,}5$, κ_1 и κ_2 такие, что выполняются неравенства:

$$-\mathbf{Q}_1+\delta(\mu_1+\kappa_1)\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1^T+\kappa_2^{-1}\mathbf{P}_1\mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^T\mathbf{P}_1^T+\kappa_2^{-1}\mathbf{c}_1^T\mathbf{q}_2^T\mathbf{b}_2^T\mathbf{b}_2\mathbf{q}_2\mathbf{c}_1+\delta\mathbf{A}_1^T\mathbf{A}_1\le-\mathbf{Q}<0,$$

$$-\mathbf{Q}_2+\delta(\mu_2+\kappa_2)\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2^T+\kappa_1^{-1}\mathbf{P}_2\mathbf{q}_2\mathbf{q}_2^T\mathbf{P}_2^T+\kappa_1^{-1}\mathbf{c}_2^T\mathbf{q}_1^T\mathbf{b}_1^T\mathbf{b}_1\mathbf{q}_1\mathbf{c}_2+\delta\mathbf{A}_2^T\mathbf{A}_2\le-\mathbf{Q}<0.$$

Пусть числа σ_1 и σ_2 такие, что выполняются неравенства:

$$-\sigma_1\mathbf{Q}_3+\delta^{-1}(\mu_1+\kappa_1)\mathbf{h}\mathbf{h}^T+\delta^{-1}\mathbf{N}_1\mathbf{h}\mathbf{c}_1^T\mathbf{c}_1\mathbf{h}^T\mathbf{N}_1^T+\kappa_1\mathbf{N}_1\mathbf{h}\mathbf{c}_1^T\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1^T\mathbf{c}_1\mathbf{h}^T\mathbf{N}_1^T+(\mu_1+\kappa_1)\mathbf{N}_1\mathbf{h}\mathbf{c}_1^T\mathbf{c}_1\mathbf{h}^T$$
$$+(\mu_1+\kappa_1)\mathbf{h}\mathbf{b}_1^T\mathbf{b}_1\mathbf{h}^T+\kappa_1\mathbf{N}_1\mathbf{h}\mathbf{c}_1^T\mathbf{c}_1\mathbf{h}^T\mathbf{N}_1^T\le-\mathbf{Q}<0,$$

$$-\sigma_2\mathbf{Q}_4+\delta^{-1}(\mu_2+\kappa_2)\mathbf{h}\mathbf{h}^T+\delta^{-1}\mathbf{N}_2\mathbf{h}\mathbf{c}_2^T\mathbf{c}_2\mathbf{h}^T\mathbf{N}_2^T+\kappa_2\mathbf{N}_2\mathbf{h}\mathbf{c}_2^T\mathbf{b}_2\mathbf{b}_2^T\mathbf{c}_2\mathbf{h}^T\mathbf{N}_2^T+(\mu_2+\kappa_2)\mathbf{N}_2\mathbf{h}\mathbf{c}_2^T\mathbf{c}_2\mathbf{h}^T$$
$$+(\mu_2+\kappa_2)\mathbf{h}\mathbf{b}_2^T\mathbf{b}_2\mathbf{h}^T+\kappa_2\mathbf{N}_2\mathbf{h}\mathbf{c}_2^T\mathbf{c}_2\mathbf{h}^T\mathbf{N}_2^T\le-\mathbf{Q}<0.$$

Тогда система (13)–(16), (29), (30) экспоненциально устойчива.

Доказательство. Рассмотрим следующую функцию Ляпунова:

$$V(t)=\mathbf{x}_1^T(t)\mathbf{P}_1\mathbf{x}_1(t)+\mathbf{x}_2^T(t)\mathbf{P}_2\mathbf{x}_2(t)+\boldsymbol{\eta}_1^T(t)\mathbf{N}_1\boldsymbol{\eta}_1(t)+\boldsymbol{\eta}_2^T(t)\mathbf{N}_2\boldsymbol{\eta}_2(t)\,. \tag{32}$$

Дифференцируя (32) с учетом уравнений (13), (15), (25)–(30), получаем

$$\dot V(t)=\mathbf{x}_1^T(t)\left(\mathbf{A}_1^T\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_1\mathbf{A}_1\right)\mathbf{x}_1(t)-2\kappa_1\mathbf{x}_1^T(t)\mathbf{P}_1\mathbf{b}_1y_1(t)+2(\mu_1+\kappa_1)x_1^T(t)\mathbf{P}_1\mathbf{b}_1\mathbf{h}_1^T\boldsymbol{\eta}_1(t)+2\mathbf{x}_1^T(t)\mathbf{P}_1\mathbf{q}_1y_2(t)$$
$$+\mathbf{x}_2^T(t)\left(\mathbf{A}_2^T\mathbf{P}_2+\mathbf{P}_2\mathbf{A}_2\right)\mathbf{x}_2(t)-2\kappa_2\mathbf{x}_2^T(t)\mathbf{P}_2\mathbf{b}_2y_2(t)+2(\mu_2+\kappa_2)\mathbf{x}_2^T(t)\mathbf{P}_2\mathbf{b}_2\mathbf{h}_2^T\boldsymbol{\eta}_2(t)+2\mathbf{x}_2^T(t)\mathbf{P}_2\mathbf{q}_2y_1(t)$$
$$+\sigma_1\boldsymbol{\eta}_1^T(t)\left(\boldsymbol{\Gamma}_1^T\mathbf{N}_1+\mathbf{N}_1\boldsymbol{\Gamma}_1\right)\boldsymbol{\eta}_1(t)+2\boldsymbol{\eta}_1^T(t)\mathbf{N}_1\mathbf{h}_1\mathbf{c}_1^T\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1(t)-2\kappa_1\boldsymbol{\eta}_1^T(t)\mathbf{N}_1\mathbf{h}_1\mathbf{c}_1^T\mathbf{b}_1y_1(t)+2(\mu_1+\kappa_1)\boldsymbol{\eta}_1^T(t)\mathbf{N}_1\mathbf{h}_1\mathbf{c}_1^T\mathbf{b}_1\mathbf{h}_1^T\boldsymbol{\eta}_1(t)$$
$$+2\boldsymbol{\eta}_1^T(t)\mathbf{N}_1\mathbf{h}_1\mathbf{c}_1^T\mathbf{b}_1\mathbf{q}_1y_2(t)+\sigma_2\boldsymbol{\eta}_2^T(t)\left(\boldsymbol{\Gamma}_2^T\mathbf{N}_2+\mathbf{N}_2\boldsymbol{\Gamma}_2\right)\boldsymbol{\eta}_2(t)+2\boldsymbol{\eta}_2^T(t)\mathbf{N}_2\mathbf{h}_2\mathbf{c}_2^T\mathbf{A}_2\mathbf{x}_2(t)-2\kappa_2\boldsymbol{\eta}_2^T(t)\mathbf{N}_2\mathbf{h}_2\mathbf{c}_2^T\mathbf{b}_2y_2(t)$$
$$+2(\mu_2+\kappa_2)\boldsymbol{\eta}_2^T(t)\mathbf{N}_2\mathbf{h}_2\mathbf{c}_2^T\mathbf{b}_2\mathbf{h}_2^T\boldsymbol{\eta}_2(t)+2\boldsymbol{\eta}_2^T(t)\mathbf{N}_2\mathbf{h}_2\mathbf{c}_2^T\mathbf{b}_2\mathbf{q}_2y_1(t)\,. \tag{33}$$

Воспользуемся следующими оценками:

$$2(\mu_1+\kappa_1)\mathbf{x}_1^T(t)\mathbf{c}_1\mathbf{h}_1^T\boldsymbol{\eta}_1(t)\le\delta(\mu_1+\kappa_1)\mathbf{x}_1^T(t)\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1^T\mathbf{x}_1(t)+\delta^{-1}(\mu_1+\kappa_1)\boldsymbol{\eta}_1^T(t)\mathbf{h}_1\mathbf{h}_1^T\boldsymbol{\eta}_1(t)\,,$$
$$2\mathbf{x}_1^T(t)\mathbf{P}_1\mathbf{q}_1y_2(t)\le\kappa_2^{-1}\mathbf{x}_1^T(t)\mathbf{P}_1\mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^T\mathbf{P}_1^T\mathbf{x}_1(t)+\kappa_2y_2^2(t)\,,$$
$$2(\mu_2+\kappa_2)\mathbf{x}_2^T(t)\mathbf{c}_2\mathbf{h}_2^T\boldsymbol{\eta}_2(t)\le\delta(\mu_2+\kappa_2)\mathbf{x}_2^T(t)\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2^T\mathbf{x}_2(t)+\delta^{-1}(\mu_2+\kappa_2)\boldsymbol{\eta}_2^T(t)\mathbf{h}_2\mathbf{h}_2^T\boldsymbol{\eta}_2(t)\,,$$
$$2\mathbf{x}_2^T(t)\mathbf{P}_2\mathbf{q}_2y_1(t)\le\kappa_1^{-1}\mathbf{x}_2^T(t)\mathbf{P}_2\mathbf{q}_2\mathbf{q}_2^T\mathbf{P}_2^T\mathbf{x}_2(t)+\kappa_1y_1^2(t)\,,$$
$$2\boldsymbol{\eta}_1^T(t)\mathbf{N}_1\mathbf{h}_1\mathbf{c}_1^T\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1(t)\le\delta^{-1}\boldsymbol{\eta}_1^T(t)\mathbf{N}_1\mathbf{h}_1\mathbf{c}_1^T\mathbf{c}_1\mathbf{h}_1^T\mathbf{N}_1^T\boldsymbol{\eta}_1(t)+\delta\mathbf{x}_1^T(t)\mathbf{A}_1^T\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1(t)\,,$$
$$-2\kappa_1\boldsymbol{\eta}_1^T(t)\mathbf{N}_1\mathbf{h}_1\mathbf{c}_1^T\mathbf{b}_1y_1(t)\le\kappa_1\boldsymbol{\eta}_1^T(t)\mathbf{N}_1\mathbf{h}_1\mathbf{c}_1^T\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1^T\mathbf{c}_1\mathbf{h}_1^T\mathbf{N}_1^T\boldsymbol{\eta}_1(t)+\kappa_1y_1^2(t)\,,$$
$$2(\mu_1+\kappa_1)\boldsymbol{\eta}_1^T(t)\mathbf{N}_1\mathbf{h}_1\mathbf{c}_1^T\mathbf{b}_1\mathbf{h}_1^T\boldsymbol{\eta}_1(t)\le(\mu_1+\kappa_1)\boldsymbol{\eta}_1^T(t)\mathbf{N}_1\mathbf{h}_1\mathbf{c}_1^T\mathbf{c}_1\mathbf{h}_1^T\boldsymbol{\eta}_1(t)+(\mu_1+\kappa_1)\boldsymbol{\eta}_1^T(t)\mathbf{h}_1\mathbf{b}_1^T\mathbf{b}_1\mathbf{h}_1^T\boldsymbol{\eta}_1(t)\,,$$
$$2\boldsymbol{\eta}_1^T(t)\mathbf{N}_1\mathbf{h}_1\mathbf{c}_1^T\mathbf{b}_1\mathbf{q}_1y_2(t)\le\kappa_1\boldsymbol{\eta}_1^T(t)\mathbf{N}_1\mathbf{h}_1\mathbf{c}_1^T\mathbf{c}_1\mathbf{h}_1^T\mathbf{N}_1^T\boldsymbol{\eta}_1(t)+\kappa_1^{-1}\mathbf{x}_2^T(t)\mathbf{c}_2^T\mathbf{q}_1^T\mathbf{b}_1^T\mathbf{b}_1\mathbf{q}_1\mathbf{c}_2\mathbf{x}_2(t)\,,$$
$$2\boldsymbol{\eta}_2^T(t)\mathbf{N}_2\mathbf{h}_2\mathbf{c}_2^T\mathbf{A}_2\mathbf{x}_2(t)\le\delta^{-1}\boldsymbol{\eta}_2^T(t)\mathbf{N}_2\mathbf{h}_2\mathbf{c}_2^T\mathbf{c}_2\mathbf{h}\mathbf{N}_2^T\boldsymbol{\eta}_2(t)+\delta\mathbf{x}_2^T(t)\mathbf{A}_2^T\mathbf{A}_2\mathbf{x}_2(t)\,,$$
$$-2\kappa_2\boldsymbol{\eta}_2^T(t)\mathbf{N}_2\mathbf{h}_2\mathbf{c}_2^T\mathbf{b}_2y_2(t)\le\kappa_2\boldsymbol{\eta}_2^T(t)\mathbf{N}_2\mathbf{h}_2\mathbf{c}_2^T\mathbf{b}_2\mathbf{b}_2^T\mathbf{c}_2\mathbf{h}_2^T\mathbf{N}_2^T\boldsymbol{\eta}_2(t)+\kappa_2y_2^2(t)\,,$$
$$2(\mu_2+\kappa_2)\boldsymbol{\eta}_2^T(t)\mathbf{N}_2\mathbf{h}_2\mathbf{c}_2^T\mathbf{b}_2\mathbf{h}_2^T\boldsymbol{\eta}_2(t)\le(\mu_2+\kappa_2)\boldsymbol{\eta}_2^T(t)\mathbf{N}_2\mathbf{h}_2\mathbf{c}_2^T\mathbf{c}_2\mathbf{h}_2^T\boldsymbol{\eta}_2(t)+(\mu_2+\kappa_2)\boldsymbol{\eta}_2^T(t)\mathbf{h}_2\mathbf{b}_2^T\mathbf{b}_2\mathbf{h}_2^T\boldsymbol{\eta}_2(t)\,,$$
$$2\boldsymbol{\eta}_2^T(t)\mathbf{N}_2\mathbf{h}_2\mathbf{c}_2^T\mathbf{b}_2\mathbf{q}_2y_1(t)\le\kappa_2\boldsymbol{\eta}_2^T(t)\mathbf{N}_2\mathbf{h}_2\mathbf{c}_2^T\mathbf{c}_2\mathbf{h}_2^T\mathbf{N}_2^T\boldsymbol{\eta}_2(t)+\kappa_2^{-1}\mathbf{x}_1^T(t)\mathbf{c}_1^T\mathbf{q}_2^T\mathbf{b}_2^T\mathbf{b}_2\mathbf{q}_2\mathbf{c}_1\mathbf{x}_1(t)\,.$$

Принимая во внимание полученные оценки и подставляя в (33) уравнения (17), (18), (31), можно получить следующее соотношение для производной (33):

$$\dot V(t)\le-\mathbf{x}_1^T(t)\mathbf{Q}_1\mathbf{x}_1(t)-\mathbf{x}_2^T(t)\mathbf{Q}_2\mathbf{x}_2(t)-\sigma_1\boldsymbol{\eta}_1^T(t)\mathbf{Q}_3\boldsymbol{\eta}_1(t)-\sigma_2\boldsymbol{\eta}_2^T(t)\mathbf{Q}_4\boldsymbol{\eta}_2(t)$$
$$+\delta(\mu_1+\kappa_1)\mathbf{x}_1^T(t)\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1^T\mathbf{x}_1(t)+\kappa_2^{-1}\mathbf{x}_1^T(t)\mathbf{P}_1\mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^T\mathbf{P}_1^T\mathbf{x}_1(t)+\kappa_2^{-1}\mathbf{x}_1^T(t)\mathbf{c}_1^T\mathbf{q}_2^T\mathbf{b}_2^T\mathbf{b}_2\mathbf{q}_2\mathbf{c}_1\mathbf{x}_1(t)+\delta\mathbf{x}_1^T(t)\mathbf{A}_1^T\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1(t)$$
$$+\delta(\mu_2+\kappa_2)\mathbf{x}_2^T(t)\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2^T\mathbf{x}_2(t)+\kappa_1^{-1}\mathbf{x}_2^T(t)\mathbf{P}_2\mathbf{q}_2\mathbf{q}_2^T\mathbf{P}_2^T\mathbf{x}_2(t)+\kappa_1^{-1}\mathbf{x}_2^T(t)\mathbf{c}_2^T\mathbf{q}_1^T\mathbf{b}_1^T\mathbf{b}_1\mathbf{q}_1\mathbf{c}_2\mathbf{x}_2(t)+\delta\mathbf{x}_2^T(t)\mathbf{A}_2^T\mathbf{A}_2\mathbf{x}_2(t)$$
$$+\delta^{-1}(\mu_1+\kappa_1)\boldsymbol{\eta}_1^T(t)\mathbf{h}_1\mathbf{h}_1^T\boldsymbol{\eta}_1(t)+\delta^{-1}\boldsymbol{\eta}_1^T(t)\mathbf{N}_1\mathbf{h}_1\mathbf{c}_1^T\mathbf{c}_1\mathbf{h}_1^T\mathbf{N}_1^T\boldsymbol{\eta}_1(t)+\boldsymbol{\kappa}_1\boldsymbol{\eta}_1^T(t)\mathbf{N}_1\mathbf{h}_1\mathbf{c}_1^T\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1^T\mathbf{c}_1\mathbf{h}_1^T\mathbf{N}_1^T\boldsymbol{\eta}_1(t)$$
$$+(\mu_1+\kappa_1)\boldsymbol{\eta}_1^T(t)\mathbf{N}_1\mathbf{h}_1\mathbf{c}_1^T\mathbf{c}_1\mathbf{h}_1^T\boldsymbol{\eta}_1(t)+(\mu_1+\kappa_1)\boldsymbol{\eta}_1^T(t)\mathbf{h}_1\mathbf{b}_1^T\mathbf{b}_1\mathbf{h}_1^T\boldsymbol{\eta}_1(t)+\kappa_1\boldsymbol{\eta}_1^T(t)\mathbf{N}_1\mathbf{h}_1\mathbf{c}_1^T\mathbf{c}_1\mathbf{h}\mathbf{N}_1^T\boldsymbol{\eta}_1(t)$$
$$+\delta^{-1}(\mu_2+\kappa_2)\boldsymbol{\eta}_2^T(t)\mathbf{h}_2\mathbf{h}_2^T\boldsymbol{\eta}_2(t)+\delta^{-1}\boldsymbol{\eta}_2^T(t)\mathbf{N}_2\mathbf{h}_2\mathbf{c}_2^T\mathbf{c}_2\mathbf{h}_2^T\mathbf{N}_2^T\boldsymbol{\eta}_2(t)+\kappa_2\boldsymbol{\eta}_2^T(t)\mathbf{N}_2\mathbf{h}_2\mathbf{c}_2^T\mathbf{b}_2\mathbf{b}_2^T\mathbf{c}_2\mathbf{h}_2^T\mathbf{N}_2^T\boldsymbol{\eta}_2(t)$$
$$+(\mu_2+\kappa_2)\boldsymbol{\eta}_2^T(t)\mathbf{N}_2\mathbf{h}_2\mathbf{c}_2^T\mathbf{c}_2\mathbf{h}_2^T\boldsymbol{\eta}_2(t)+(\mu_2+\kappa_2)\boldsymbol{\eta}_2^T(t)\mathbf{h}_2\mathbf{b}_2^T\mathbf{b}_2\mathbf{h}_2^T\boldsymbol{\eta}_2(t)+\kappa_2\boldsymbol{\eta}_2^T(t)\mathbf{N}_2\mathbf{h}_2\mathbf{c}_2^T\mathbf{c}_2\mathbf{h}_2^T\mathbf{N}_2^T\boldsymbol{\eta}_2(t)\,. \tag{34}$$

Пусть числа $0<\delta<0{,}5$, κ_1 и κ_2 такие, что выполняются неравенства:

$$-\mathbf{Q}_1+\delta(\mu_1+\kappa_1)\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1^T+\kappa_2^{-1}\mathbf{P}_1\mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^T\mathbf{P}_1^T+\kappa_2^{-1}\mathbf{c}_1^T\mathbf{q}_2^T\mathbf{b}_2^T\mathbf{b}_2\mathbf{q}_2\mathbf{c}_1+\delta\mathbf{A}_1^T\mathbf{A}_1\le-\mathbf{Q}<0\,, \tag{35}$$
$$-\mathbf{Q}_2+\delta(\mu_2+\kappa_2)\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2^T+\kappa_1^{-1}\mathbf{P}_2\mathbf{q}_2\mathbf{q}_2^T\mathbf{P}_2^T+\kappa_1^{-1}\mathbf{c}_2^T\mathbf{q}_1^T\mathbf{b}_1^T\mathbf{b}_1\mathbf{q}_1\mathbf{c}_2+\delta\mathbf{A}_2^T\mathbf{A}_2\le-\mathbf{Q}<0\,. \tag{36}$$

В этом случае из выражения (34) следует:

$$\dot V(t)\le-\mathbf{x}_1^T(t)\mathbf{Q}_1\mathbf{x}_1(t)-\mathbf{x}_2^T(t)\mathbf{Q}_2\mathbf{x}_2(t)-\sigma_1\boldsymbol{\eta}_1^T(t)\mathbf{Q}_3\boldsymbol{\eta}_1(t)-\sigma_2\boldsymbol{\eta}_2^T(t)\mathbf{Q}_4\boldsymbol{\eta}_2(t)+\delta^{-1}(\mu_1+\kappa_1)\boldsymbol{\eta}_1^T(t)\mathbf{h}_1\mathbf{h}_1^T\boldsymbol{\eta}_1(t)$$
$$+\delta^{-1}\boldsymbol{\eta}_1^T(t)\mathbf{N}_1\mathbf{h}_1\mathbf{c}_1^T\mathbf{c}_1\mathbf{h}\mathbf{N}_1^T\boldsymbol{\eta}_1(t)+\kappa_1\boldsymbol{\eta}_1^T(t)\mathbf{N}_1\mathbf{h}_1\mathbf{c}_1^T\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1^T\mathbf{c}_1\mathbf{h}_1^T\mathbf{N}_1^T\boldsymbol{\eta}_1(t)+(\mu_1+\kappa_1)\boldsymbol{\eta}_1^T(t)\mathbf{N}_1\mathbf{h}_1\mathbf{c}_1^T\mathbf{c}_1\mathbf{h}_1^T\boldsymbol{\eta}_1(t)$$
$$+(\mu_1+\kappa_1)\boldsymbol{\eta}_1^T(t)\mathbf{h}_1\mathbf{b}_1^T\mathbf{b}_1\mathbf{h}_1^T\boldsymbol{\eta}_1(t)+\kappa_1\boldsymbol{\eta}_1^T(t)\mathbf{N}_1\mathbf{h}_1\mathbf{c}_1^T\mathbf{c}_1\mathbf{h}_1^T\mathbf{N}_1^T\boldsymbol{\eta}_1(t)+\delta^{-1}(\mu_2+\kappa_2)\boldsymbol{\eta}_2^T(t)\mathbf{h}_2\mathbf{h}_2^T\boldsymbol{\eta}_2(t)$$
$$+\delta^{-1}\boldsymbol{\eta}_2^T(t)\mathbf{N}_2\mathbf{h}_2\mathbf{c}_2^T\mathbf{c}_2\mathbf{h}_2^T\mathbf{N}_2^T\boldsymbol{\eta}_2(t)+\kappa_2\boldsymbol{\eta}_2^T(t)\mathbf{N}_2\mathbf{h}_2\mathbf{c}_2^T\mathbf{b}_2\mathbf{b}_2^T\mathbf{c}_2\mathbf{h}_2^T\mathbf{N}_2^T\boldsymbol{\eta}_2(t)+(\mu_2+\kappa_2)\boldsymbol{\eta}_2^T(t)\mathbf{N}_2\mathbf{h}_2\mathbf{c}_2^T\mathbf{c}_2\mathbf{h}_2^T\boldsymbol{\eta}_2(t)$$
$$+(\mu_2+\kappa_2)\boldsymbol{\eta}_2^T(t)\mathbf{h}_2\mathbf{b}_2^T\mathbf{b}_2\mathbf{h}_2^T\boldsymbol{\eta}_2(t)+\kappa_2\boldsymbol{\eta}_2^T(t)\mathbf{N}_2\mathbf{h}_2\mathbf{c}_2^T\mathbf{c}_2\mathbf{h}^T\mathbf{N}_2^T\boldsymbol{\eta}_2(t)\,. \tag{37}$$

Пусть числа σ_1 и σ_2 такие, что выполняются неравенства

$$-\sigma_1\mathbf{Q}_3+\delta^{-1}(\mu_1+\kappa_1)\mathbf{h}\mathbf{h}^T+\delta^{-1}\mathbf{N}_1\mathbf{h}\mathbf{c}_1^T\mathbf{c}_1\mathbf{h}^T\mathbf{N}_1^T+\kappa_1\mathbf{N}_1\mathbf{h}\mathbf{c}_1^T\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1^T\mathbf{c}_1\mathbf{h}^T\mathbf{N}_1^T+(\mu_1+\kappa_1)\mathbf{N}_1\mathbf{h}\mathbf{c}_1^T\mathbf{c}_1\mathbf{h}^T$$
$$+(\mu_1+\kappa_1)\mathbf{h}\mathbf{b}_1^T\mathbf{b}_1\mathbf{h}^T+\kappa_1\mathbf{N}_1\mathbf{h}\mathbf{c}_1^T\mathbf{c}_1\mathbf{h}^T\mathbf{N}_1^T\le-\mathbf{Q}<0\,, \tag{38}$$

$$-\sigma_2\mathbf{Q}_4+\delta^{-1}(\mu_2+\kappa_2)\mathbf{h}\mathbf{h}^T+\delta^{-1}\mathbf{N}_2\mathbf{h}\mathbf{c}_2^T\mathbf{c}_2\mathbf{h}^T\mathbf{N}_2^T+\kappa_2\mathbf{N}_2\mathbf{h}\mathbf{c}_2^T\mathbf{b}_2\mathbf{b}_2^T\mathbf{c}_2\mathbf{h}^T\mathbf{N}_2^T+(\mu_2+\kappa_2)\mathbf{N}_2\mathbf{h}\mathbf{c}_2^T\mathbf{c}_2\mathbf{h}^T$$
$$+(\mu_2+\kappa_2)\mathbf{h}\mathbf{b}_2^T\mathbf{b}_2\mathbf{h}^T+\kappa_2\mathbf{N}_2\mathbf{h}\mathbf{c}_2^T\mathbf{c}_2\mathbf{h}^T\mathbf{N}_2^T\le-\mathbf{Q}<0. \quad (39)$$

Тогда из выражения (37) следует, что

$$\dot V(t)\le-\mathbf{x}_1^T(t)\mathbf{Q}_1\mathbf{x}_1(t)-\mathbf{x}_2^T(t)\mathbf{Q}_2\mathbf{x}_2(t)-\sigma_1\boldsymbol{\eta}_1^T(t)\mathbf{Q}_3\boldsymbol{\eta}_1(t)-\sigma_2\boldsymbol{\eta}_2^T(t)\mathbf{Q}_4\boldsymbol{\eta}_2(t). \quad (40)$$

Из выражения (40) следует экспоненциальная устойчивость системы (13)–(16), (19)–(22), (29), (30), что и требовалось доказать.

Замечание. При внимательном рассмотрении можно отметить, что неравенства (35), (36), (38), (39) не являются противоречивыми. Очевидно, что при некотором малом δ, больших κ_1, κ_2 и еще больших $\sigma_1>\kappa_1$, $\sigma_1>\delta^{-1}$ и $\sigma_2>\kappa_2$, $\sigma_2>\delta^{-1}$ неравенства будут выполнены. Таким образом, в условиях неопределенности объекта в качестве возможного варианта настройки параметров κ_1, κ_2, σ_1 и σ_2 можно увеличивать их значения до тех пор, пока не будут выполнены следующие условия:

$$|y_1(t)|<\delta_0 \text{ для } \forall t\ge t_1, \quad (41)$$

$$|y_2(t)|<\delta_0 \text{ для } \forall t\ge t_2, \quad (42)$$

где положительное число δ_0 задается разработчиком системы управления.

Для настройки параметров $\tilde k_1=\kappa_1+\mu_1$ и $\tilde k_2=\kappa_2+\mu_2$ воспользуемся алгоритмом

$$\tilde k_1(t)=\int_{t_0}^{t}\lambda_1(\tau)d\tau,\ \tilde k_2(t)=\int_{t_0}^{t}\lambda_2(\tau)d\tau, \quad (43)$$

где функции $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ выбираются как

$$\lambda_1(t)=\begin{cases}\lambda_{01} & при\ \ |y_1(t)|>\delta_0\\ 0 & при\ \ |y_1(t)|\le\delta_0,\end{cases}\quad \lambda_2(t)=\begin{cases}\lambda_{02} & при\ \ |y_2(t)|>\delta_0\\ 0 & при\ \ |y_2(t)|\le\delta_0,\end{cases} \quad (44)$$

а числа $\lambda_{01}>0$, $\lambda_{02}>0$. Для настройки σ_1 и σ_2 будем использовать алгоритм

$$\sigma_1(t)=\sigma_{01}\left(\tilde k_1(t)\right)^2,\ \sigma_2=\sigma_{02}\left(\tilde k_2(t)\right)^2, \quad (45)$$

где числа $\sigma_{01}>0$, $\sigma_{02}>0$. Очевидно, что в этом случае найдутся такие моменты времени t_1, t_2, начиная с которых (41) и (42) соответственно будут выполнены.

Результаты моделирования

Рассмотрим в качестве примера следующую двухканальную систему управления с неизвестными параметрами:

$$y_1(t)=\frac{1}{s^3+2,5s^2+0,5s-1}u_1(t)-\frac{6}{s^3+2,5s^2+0,5s-1}y_2(t), \quad (46)$$

$$y_2(t)=\frac{6}{s^2-s+1}u_2(t)-\frac{6}{s^2-s+1}y_1(t). \quad (47)$$

Передаточные функции в первом и втором каналах имеют относительные степени $\rho_1=3$ и $\rho_2=2$ соответственно.

Алгоритм управления выбирается согласно (3)–(6):

$$u_1(t)=-\tilde k_1(t)\left(p^2+p+1\right)\xi_{11}(t), \quad (48)$$

$$\begin{cases}\dot\xi_{11}(t)=\sigma_1(t)\xi_{12}(t),\\ \dot\xi_{12}(t)=\sigma_1(t)\left(-0,5\xi_{11}(t)-4\xi_{12}(t)+0,5y_1(t)\right),\end{cases} \quad (49)$$

$$u_2=-\tilde k_2(t)\left(p+1\right)\xi_{21}(t), \quad (50)$$

$$\dot\xi_{21}(t)=\sigma_2(t)\left(-\xi_{21}(t)+y_2(t)\right), \quad (51)$$

Алгоритм адаптации выбирается в соответствии с (43)–(45) с параметрами:

$$\lambda_{01}=25,\ \ \lambda_{02}=100,\ \ \delta_0=0,1,\ \ \sigma_{01}=0,015,\ \ \sigma_{02}=0,04. \quad (52)$$

Результаты моделирования при $y_1(0)=y_2(0)=2$ представлены на рис. 1 и рис. 2.

Таким образом, результаты моделирования подтверждают, что замкнутая система является устойчивой.

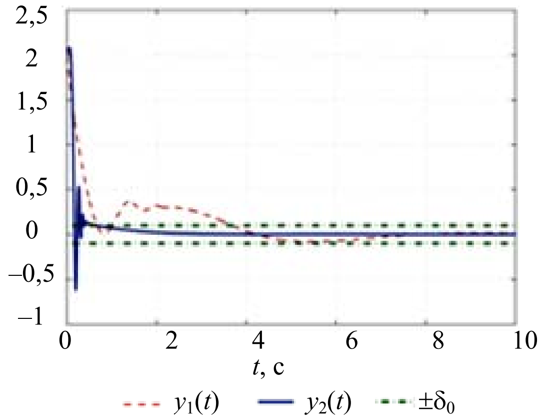

Рис. 1. Выходные переменные системы (46)–(52)

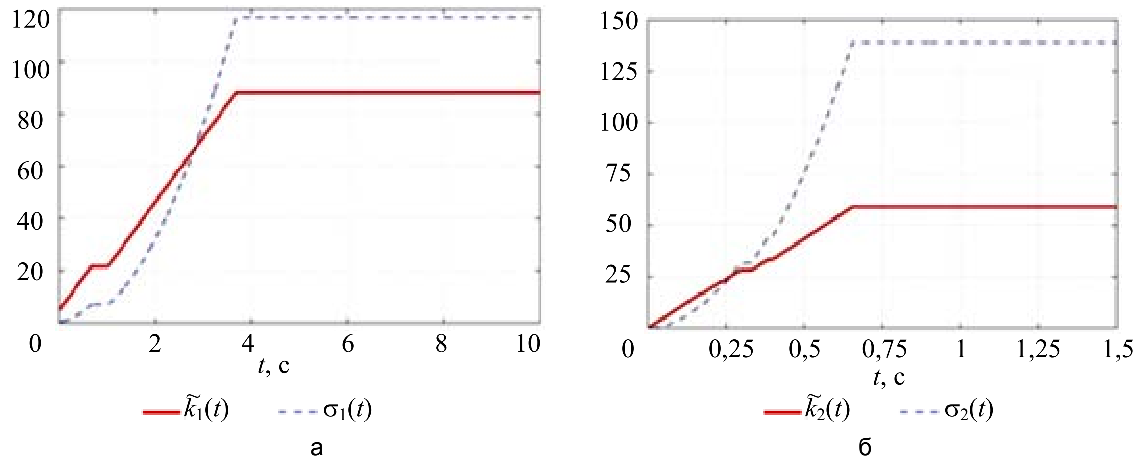

Рис. 2. Результаты моделирования функций настройки параметров (43), (45) для функций: $\tilde{k}_1(t)$, $\sigma_1(t)$ (а); $\tilde{k}_2(t)$, $\sigma_2(t)$ (б)

Заключение

В работе рассмотрена проблема синтеза закона управления для стабилизации по выходу линейных стационарных параметрически неопределенных многоканальных систем. В предположении, что известны относительные степени каждой из подсистем, на примере объекта второго порядка было показано, что алгоритм управления «последовательный компенсатор», впервые предложенный в [21], может быть успешно применен и в случае многоканальных систем. Эффективность алгоритма управления проиллюстрирована моделированием.

Литература

1. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.
2. Буков В.Н. Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во научной литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006. 720 с.
3. Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000. 549 с.
4. Фрадков А.Л. Управление в сложных системах. М.: Наука, 1990. 296 с.
5. Цыкунов А.М. Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // Автоматика и телемеханика. 2007. № 7. С. 103–115.
6. Фуртат И.Б. Робастная синхронизация динамической сети с компенсацией возмущений // Автоматика и телемеханика. 2011. № 12. С.104–114.
7. Фуртат И.Б. Консенсусное управление линейной динамической сетью по выходу с компенсацией возмущений // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 4. С. 12–18.
8. Фуртат И.Б. Субоптимальное управление нелинейными мультиагентыми системами // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2013. № 1 (83). С. 19–23.
9. Фуртат И.Б. Робастное управление определенным классом неминимально-фазовых динамических сетей // Известия РАН. Теория и системы управления. 2014. № 1. С. 35–48.

10. Цыкунов А.М. Адаптивное и робастное управление динамическими объектами по выходу. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 268 с.
11. Паршева Е.А. Адаптивное децентрализованное управление многосвязными объектами со скалярными входом и выходом с неминимальной реализацией эталонной модели // Автоматика и телемеханика. 2005. № 8. С. 118–127.
12. Mirkin B., Gutman P.-O. Lyapunov-based adaptive output-feedback control of MIMO nonlinear plants with unknown, time-varying state delays // Proc. 9th IFAC Workshop on Time Delay Systems. Prague, Czech Republic, 2010. Part. 1. P. 33–38.
13. Mirkin B., Gutman P.-O. Adaptive output-feedback tracking: the case of MIMO plants with unknown, time-varying state delay // Systems and Control Letters. 2009. V. 58. N 1. P. 62–68.
14. Cavallo A., Natale C. A robust output feedback control law for MIMO plants // Proc. 15th IFAC World Congress. Barcelona, Spain, 2002. V. 15, part. 1. P. 335–345.
15. Ge S.S., Li Z. Robust adaptive control for a class of MIMO nonlinear systems by state and output feedback // IEEE Transactions on Automatic Control. 2014. V. 59. N 6. P. 1624–1629.
16. Qi R., Tao G., Jiang B. Adaptive control of MIMO time-varying systems with indicator function based parametrization // Automatica. 2014. V. 50. N 5. P. 1369–1380.
17. Chen M., Ge S.S., Ren B. Adaptive tracking control of uncertain MIMO nonlinear systems with input constraints // Automatica. 2011. V. 47. N 3. P. 452–465.
18. Ambrose H., Qu Z. Model reference robust control for MIMO systems // International Journal of Control. 1997. V. 68. N 3. P. 599–623.
19. Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981. 448 с.
20. Narendra K.S., Annaswamy A. Stable Adaptive Systems. New Jersey: Prentice Hall, 2005. 512 p.
21. Бобцов А.А. Робастное управление по выходу линейной системой с неопределенными коэффициентами // Автоматика и телемеханика. 2002. № 11. С. 108–117.

Бобцов Алексей Алексеевич – доктор технических наук, профессор, декан факультета, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, bobtsov@mail.ru

Фаронов Максим Викторович – аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, faronov_m@mail.ru

Фуртат Игорь Борисович – доктор технических наук, доцент, профессор, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация; ведущий научный сотрудник, Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, 199178, Российская Федерация, cainenash@mail.ru

Пыркин Антон Александрович – кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, a.pyrkin@gmail.com

Цзянь Ван – научный сотрудник, Институт автоматизации, Университет Ханчжоу Дяньцзы, Ханчжоу, 310018, Китай, wangjian@hdu.edu.cn

Aleksei A. Bobtsov – D.Sc., Professor, Dean, Department head, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, bobtsov@mail.ru

Maksim V. Faronov – postgraduate, ITMO University, Saint Petersburg, 197101,Russian Federation, faronov_m@mail.ru

Igor B. Furtat – D.Sc., Associate professor, Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation; leading scientific researcher, Institute of Problems of Mechanical Engineering Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, 199178, Russian Federation, cainenash@mail.ru

Anton A. Pyrkin – PhD, Associate professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, a.pyrkin@gmail.com

Wang Jian – researcher, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou, 310018, China, wangjian@hdu.edu.cn

Принято к печати 14.05.14
Accepted 14.05.14