

УДК 621.83.621.81.002.2

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗГОТОВЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ЦЕВОЧНОЙ ПЕРЕДАЧИ ПЛАНЕТАРНОГО РЕДУКТОРА

И.М. Егоров<sup>а</sup>, С.А. Алексанин<sup>а</sup>, М.Е. Федосовский<sup>а</sup>, Н.П. Кряжева<sup>б</sup>

<sup>а</sup>ЗАО «Диаконт», Санкт-Петербург, 195274, Российская Федерация, egrov@mail.ru

<sup>б</sup> Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация

**Аннотация.** Теоретические основы расчета планетарных цевочных редукторов типа  $k-h-v$  заложены сравнительно давно. Однако в последнее время к вопросам их проектирования вновь привлечено повышенное внимание. Это связано с тем, что подобные устройства входят во многие сложные технические системы, в частности, в мехатронные и робототехнические системы. Развитие современной технологической базы производства таких редукторов сегодня позволяет реализовать принципиальные возможности этих устройств – высокий коэффициент полезного действия, большое передаточное отношение, кинематическую точность и плавность хода. Наличие адекватной математической модели позволяет управлять кинематической точностью редуктора за счет рационального выбора допусков на изготовление его деталей. Появляется возможность автоматизировать процесс проектирования планетарных цевочных редукторов с учетом различных, в том числе технологических, факторов. В настоящей работе авторами разработана математическая модель и предложен математический аппарат, позволяющие моделировать кинематическую погрешность редуктора с учетом многочисленных факторов, учитывающих, в том числе, и погрешности изготовления. Погрешности рассматриваются в виде, удобном для прогнозирования кинематической точности редуктора уже на стадии изготовления по результатам измерения деталей на координатно-измерительных машинах. При моделировании погрешностей изготовления колеса они задаются отклонением радиуса окружности центров цевок, ее эксцентриситетом и отклонениями положений осей цевок относительно окружности центров. Погрешности изготовления сателлита задаются отклонением его эксцентриситета и эксцентриситетом зубчатого венца. Вследствие коллинеарности, погрешности диаметров цевок, отверстий под цевки и погрешности профилей зубьев сателлита для заданной точки контакта объединены в одном отклонении. Программная реализация модели позволяет оценить влияние указанных погрешностей на ошибку угла поворота сателлита и обоснованно выбирать точностные параметры технологических процессов изготовления деталей. Кроме того, она дает возможность по результатам измерения на координатно-измерительной машине оценить кинематическую погрешность редуктора или путем анализа кинематограммы редуктора диагностировать погрешности изготовления его деталей. Модель реализована в виде программы, разработанной в среде Microsoft Visual C++ 6.0. Полученные результаты нашли применение в системе автоматизированного проектирования планетарных цевочных редукторов.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, планетарный редуктор, цевочная передача, циклоидальное зацепление, кинематическая точность, погрешность изготовления.

**Благодарности.** Работа подготовлена по результатам НИОКРТ «Создание высокотехнологичного производства прецизионных быстродействующих силовых электромеханических приводов нового поколения» в Университете ИТМО, при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации согласно постановлению Правительства Российской Федерации от 9 апреля 2010 г. № 218 «О мерах государственной поддержки развития кооперации российских высших учебных заведений, государственных научных учреждений и организаций, реализующих комплексные проекты по созданию высокотехнологичного производства».

## MODELING OF MANUFACTURING ERRORS FOR PIN-GEAR ELEMENTS OF PLANETARY GEARBOX

I.M. Egorov<sup>a</sup>, S.A. Aleksanin<sup>a</sup>, M.E. Fedosovskiy<sup>a</sup>, N.P. Kryazheva<sup>b</sup>

<sup>а</sup>“Diakont”, JSC, Saint Petersburg, 195274, Russian Federation, egrov@mail.ru

<sup>б</sup> ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

**Abstract.** Theoretical background for calculation of  $k-h-v$  type cycloid reducers was developed relatively long ago. However, recently the matters of cycloid reducer design again attracted heightened attention. The reason for that is that such devices are used in many complex engineering systems, particularly, in mechatronic and robotics systems. The development of advanced technological capabilities for manufacturing of such reducers today gives the possibility for implementation of essential features of such devices: high efficiency, high gear ratio, kinematic accuracy and smooth motion. The presence of an adequate mathematical model gives the possibility for adjusting kinematic accuracy of the reducer by rational selection of manufacturing tolerances for its parts. This makes it possible to automate the design process for cycloid reducers with account of various factors including technological ones. A mathematical model and mathematical technique have been developed giving the possibility for modeling the kinematic error of the reducer with account of multiple factors, including manufacturing errors. The errors are considered in the way convenient for prediction of kinematic accuracy early at the manufacturing stage according to the results of reducer parts measurement on coordinate measuring machines. During the modeling, the wheel manufacturing errors are determined by the eccentricity and radius deviation of the pin tooth centers circle, and the deviation between the pin tooth axes positions and the centers circle. The satellite manufacturing errors are determined by the satellite eccentricity deviation and the satellite rim eccentricity. Due to the collinearity, the pin tooth and pin tooth hole diameter errors and the satellite tooth profile errors for a designated contact point are integrated into one deviation. Software implementation of the model makes it possible to estimate the pointed errors influence on satellite rotation angle error and reasonable selection of accuracy parameters for technological processes related to reducer parts manufacture. Additionally, it gives the possibility for estimation of the reducer kinematic error according to measurements by means of a coordinate measuring machine and diagnostics of reducer parts manufacturing errors by means of its

kinematogram analysis. The model is implemented as a program developed in Microsoft Visual C++ 6.0 environment. Obtained results have found their application in CAD of cycloid reducers.

**Keywords:** modeling, planetary gearbox, pin-gear drive, cycloid gear, kinematic accuracy, manufacturing error.

**Acknowledgements.** The paper has been prepared as a result of R&D work "Creating of high-tech production of precision high-performance forceful brand-new electromechanical actuators " in ITMO University, under financial support from the Russian Federation Ministry of Education and Science, according to the enactment of the Russian Federation Government dated April 9, 2010 № 218 "Measures of state support for development of cooperation between Russian universities, research organizations and companies which implement complex projects for high-tech production".

### Введение

Планетарные цевочные редукторы (ПЦР) типа  $k-h-v$  (рис. 1) широко применяются в составе приводов мехатронных и робототехнических систем, к которым предъявляются повышенные требования по кинематической точности и жесткости.

В наше время появилась технологическая возможность реализации ПЦР, которые были теоретически разработаны еще в 1950–1980 годы. ПЦР обладают высоким коэффициентом полезного действия (до 0,95), высокой нагрузочной способностью, высокой адаптацией к условиям решения специальных задач; обеспечивают большие передаточные отношения в одной ступени (до 191), плавность работы, отсутствие мертвого хода, вибраций и высокую точность при значительном передаваемом моменте. Такие параметры обеспечили этим редукторам высокую применяемость в машиностроительных отраслях развитых стран мира. Циклоидальное зацепление обладает большим КПД, чем традиционное эвольвентное, и при этом позволяет достигать в 7 раз большего передаточного отношения в одной ступени. Удельная масса редукторов планетарных редукторов с циклоидальным зацеплением меньше аналогичного показателя эвольвентных планетарных редукторов в 2–7 раз, что позволяет либо уменьшать габариты редуктора при одинаковой нагрузочной способности, либо увеличивать нагрузочную способность при тех же габаритах.

Использование в ПЦР циклоидального зацепления позволяет уменьшить разницу чисел цевок колеса и зубьев сателлита до единицы. При этом редуктор имеет передаточное число, равное числу зубьев сателлита, а коэффициент перекрытия теоретически превышает половину этой величины. Большое число одновременно зацепляющихся зубьев и различие длин профильных нормалей в зацеплениях существенным образом сказываются на характере зависимости кинематической погрешности редуктора от погрешностей изготовления элементов цевочной передачи. Именно такие редукторы получили наибольшее распространение.

Общая теория циклоидального зацепления изложена в работах [1, 2]. Ее применение при расчете ПЦР наиболее полно отражено в работах [3, 4]. Исследованию геометрии и нагрузочной способности ПЦР посвящены работы [3–6]. Общие методы расчета точности механизмов приведены в работе [7]. Точность механизмов с высшими кинематическими парами рассматривается в работах [8, 9]. Расчет ряда точностных параметров ПЦР приведен в работах [10–15].

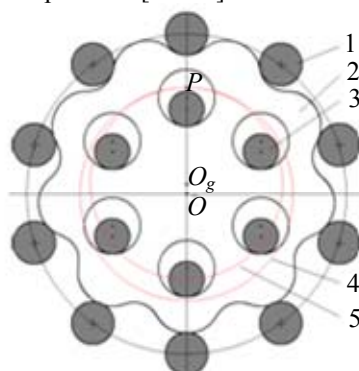


Рис. 1. Планетарный редуктор с цевочным зацеплением: 1 – цевка; 2 – сателлит; 3 – палец выходного вала; 4 – центроида колеса; 5 – центроида сателлита;  $O$  – центральная ось;  $O_g$  – ось сателлита;  $P$  – полюс зацепления

### Первичные ошибки зацепления

Первичные ошибки зацепления  $i$ -ой цевки с зубом сателлита показаны на рис. 2.

Погрешности положения цевок колеса задаются отклонением радиуса окружности центров цевок, ее эксцентриситетом и отклонениями положений центров цевок относительно окружности центров. Окружность центров цевок определяется как окружность, для которой отклонения положений центров отверстий под цевки имеют минимальные значения. Такое представление погрешностей положения цевок колеса упрощает оценку влияния точностных параметров технологических процессов изготовления деталей на кинематическую погрешность редуктора и ее прогнозирование на основании результатов измерения на координатно-измерительной машине.

В неподвижной система координат  $XOY$  орт профильной нормали и рассматриваемые векторы первичных ошибок (рис. 2) имеют следующее представление:

$$\mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} -\cos(\varphi_1 - \alpha_i) \\ \sin(\varphi_1 - \alpha_i) \end{bmatrix}; \quad d\mathbf{E} = dE \begin{bmatrix} \sin \varphi_1 \\ \cos \varphi_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{E}_g = E \begin{bmatrix} \sin(\theta_g - \varphi_2) \\ \cos(\theta_g - \varphi_2) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{E}_b = E_b \begin{bmatrix} \sin \theta_b \\ \cos \theta_b \end{bmatrix}; \quad (1)$$

$$d\mathbf{R}_i = dR_i \begin{bmatrix} -\cos(\varphi_1 - \alpha_i) \\ \sin(\varphi_1 - \alpha_i) \end{bmatrix}; \quad d\mathbf{R}_{bi} = dR_b \begin{bmatrix} \sin(\varphi_1 + \psi_i) \\ \cos(\varphi_1 + \psi_i) \end{bmatrix}; \quad dx_i = dx_i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad dy_i = dy_i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Угол давления } \alpha_i = \text{arctg} \left( \frac{r_c \cdot \cos \psi_i - r_b}{r_c \cdot \sin \psi_i} \right).$$

Угол поворота выходного вала  $\varphi_2 = \frac{\varphi_1}{u}$ , где  $u$  – передаточное число редуктора.

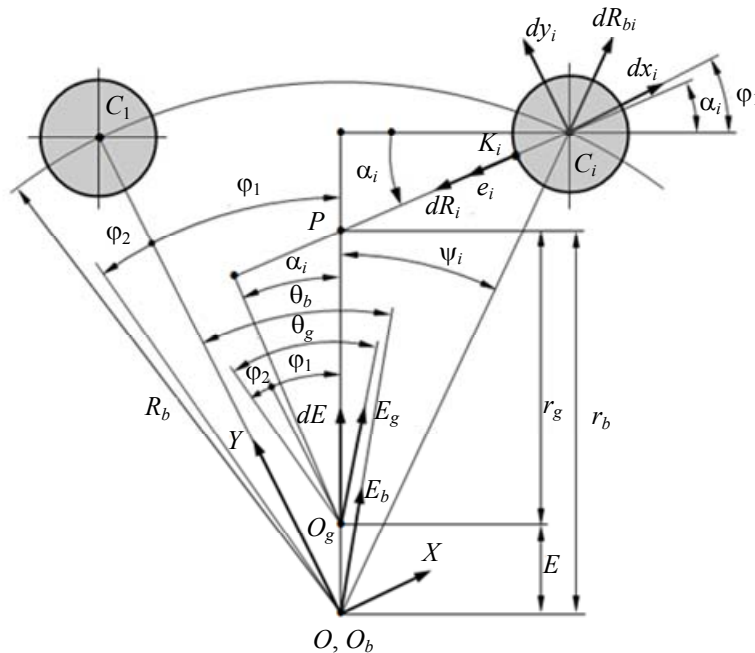


Рис. 2. Первичные ошибки зацепления  $i$ -ой цевки с зубом сателлита:  $XOY$  – неподвижная система координат, жестко связанная с корпусом редуктора;  $O$  – центральная ось;  $O_b$  – ось колеса;  $O_g$  – ось сателлита;  $P$  – полюс зацепления;  $\varphi_1$  – угол поворота входного вала;  $\varphi_2$  – угол поворота выходного вала;  $\psi_i$  – угловое положение  $i$ -ой цевки;  $r_b, r_g$  – радиусы центроид колеса и сателлита;  $K_i$  – точка контакта;  $\mathbf{e}_i$  – орт профильной нормали;  $\alpha_i$  – угол давления;  $h_i$  – плечо профильной нормали относительно оси сателлита;  $E, dE$  – эксцентриситет сателлита и его отклонение;  $\mathbf{E}_g, \vartheta_g$  – эксцентриситет зубчатого венца сателлита и его фаза;  $\mathbf{E}_b, \vartheta_b$  – эксцентриситет колеса и его фаза;  $R_b, dR_b$  – радиус окружности центров цевок (радиус колеса) и его отклонение;  $dx_i, dy_i$  – отклонения координат центра цевки;  $d\mathbf{R}_i$  – отклонение радиуса цевки

Вектор отклонения, связанного с погрешностью профиля зуба сателлита, направлен вдоль профильной нормали и коллинеарен вектору отклонения радиуса цевки  $d\mathbf{R}_i$ . В связи с этим погрешность профиля  $f_i$  может быть включена в состав вектора  $d\mathbf{R}_i$ . Аналогично может быть учтена первичная ошибка, обусловленная зазором  $\Delta_i$  в посадке цевки в отверстие корпуса редуктора:

$$d\mathbf{R}_i = (dR_i + f_i - \Delta_i) \cdot \begin{bmatrix} -\cos(\varphi_1 - \alpha_i) \\ \sin(\varphi_1 - \alpha_i) \end{bmatrix}.$$

Угловое положение  $i$ -ой цевки определяется по формуле  $\psi_i = \tau_b \cdot (i-1) - \varphi_1$ , где  $\tau_b$  – угловой шаг цевок колеса. При заданном угле поворота входного вала в зацеплении находятся только цевки, расположенные по одну сторону от прямой  $OP$ . На рис. 2 это правая сторона. При разнице чисел цевок колеса и зубьев сателлита, равной единице, в зацеплении находятся все цевки, для которых  $\psi_i \in [0, \pi]$ .

### Ошибка угла поворота сателлита

При определении ошибки угла поворота сателлита использована методика расчета погрешности механизма с высшей кинематической парой, изложенная в работе [8]. В соответствии с этой методикой,

ошибка положения звена, которое совершает вращательное движение, равна частному от деления суммы проекций векторов первичных ошибок на профильную нормаль на ее плечо относительно оси вращения звена:

$$\Delta\varphi = \frac{\mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{e}}{h}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{\Lambda}$  – сумма векторов первичных ошибок;  $\mathbf{e}$ ,  $h$  – орт и плечо профильной нормали. При выбранном на рис. 2 направлении орта нормали векторы первичных ошибок, относящихся к сателлиту, суммируются со знаком минус.

В соответствии с (1) и (2) для заданного угла поворота входного вала ошибка угла поворота сателлита, при зацеплении с  $i$ -ой цевкой определяется по формуле

$$\Delta\varphi_{gi}(\varphi_1) = \frac{(\mathbf{E}_b + d\mathbf{R}_i + d\mathbf{R}_{bi} + d\mathbf{x}_i + d\mathbf{y}_i - d\mathbf{E} - \mathbf{E}_g) \cdot \mathbf{e}_i}{h_i}; \quad h_i = r_g \cdot \cos \alpha_i.$$

Максимальное значение  $\Delta\varphi_{gi}(\varphi_1)$  для всех  $n$  цевок, находящихся в одновременном зацеплении, определяет ошибку угла поворота сателлита:

$$\Delta\varphi_g(\varphi_1) = \max \{ \Delta\varphi_{gi}(\varphi_1) \}_{i=1}^{i=n}.$$

Следует отметить, что разность между максимальным и минимальным значениями ошибок угла поворота  $\Delta\varphi_{gi}(\varphi_1)$  может привести к заклиниванию зубьев сателлита между цевками колеса даже при отсутствии погрешностей при передаче движения в противоположном направлении. Этот эффект является положительным: он создает предварительный натяг в зацеплении и может использоваться для выборки кинематического и снижения упругого мертвого хода в передаче.

#### Программная реализация модели и результаты расчетов

Приведенная модель реализована в виде программы, разработанной в среде Microsoft Visual C++ 6.0, которая позволяет получить функции ошибки поворота сателлита при различных первичных ошибках в цевочной передаче.

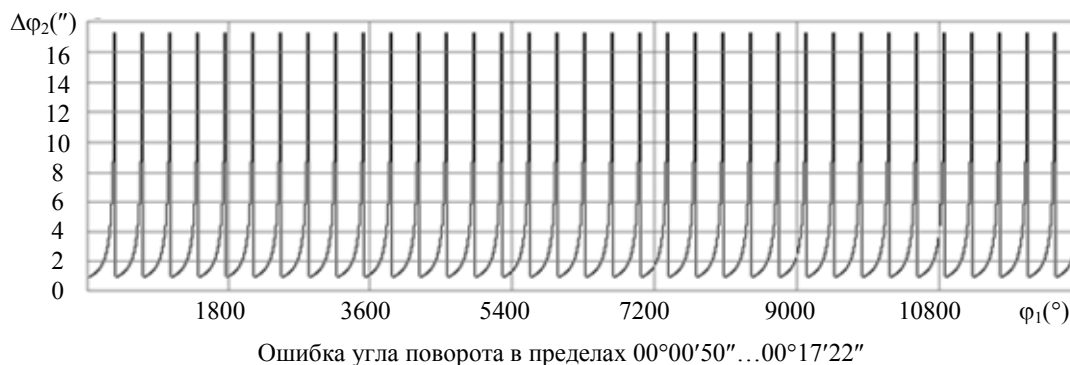


Рис. 3. Ошибки угла поворота сателлита при отклонении эксцентриситета сателлита +5 мкм

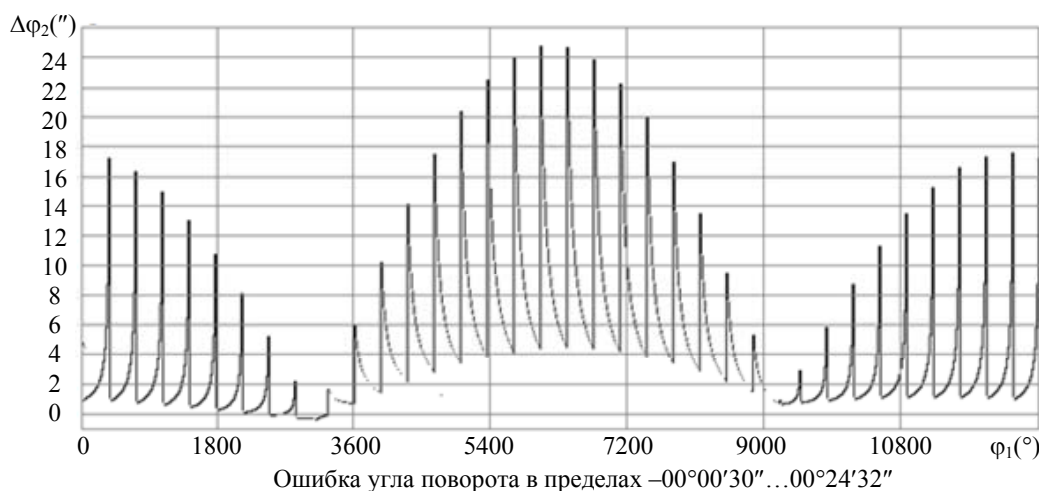


Рис. 4. Ошибки угла поворота сателлита при эксцентриситете зубчатого венца сателлита 5 мкм

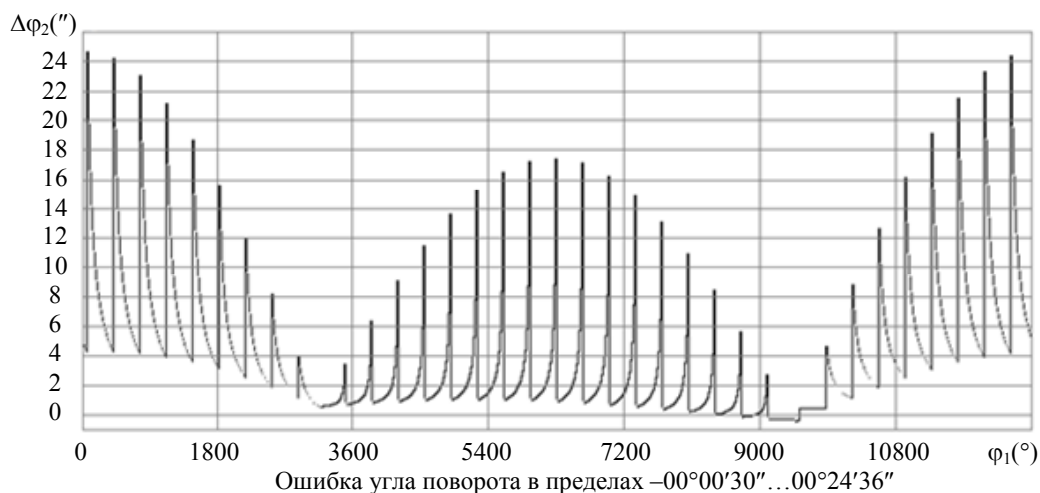


Рис. 5. Ошибки угла поворота сателлита при эксцентриситете колеса 5 мкм

На рис. 3–5 приведены результаты расчетов функции ошибки угла поворота сателлита на одном обороте выходного вала для передачи со следующими параметрами: передаточное число  $u = 35$ ;  $R_b = 100$  мм;  $r_b = 70$  мм;  $E = 0,972$  мм;  $z_b = 36$ ;  $z_g = 35$ ; диаметр цевок равен 5 мм.

Результаты расчетов показали, что наибольшее влияние на колебание ошибки угла поворота сателлита оказывают эксцентриситет колеса и эксцентриситет зубчатого венца сателлита. При этом функции ошибки имеют сходный характер. За счет большого числа одновременно зацепляющихся зубьев увеличение радиуса окружности центров цевок приводит к возникновению только постоянной составляющей ошибки угла поворота сателлита, равной  $-22''$  при  $dR_b = +5$  мкм.

### Заключение

Погрешности элементов цевочной передачи оказывают различное влияние на ошибку угла поворота сателлита. Приведенная методика расчета позволяет обоснованно выбрать точностные параметры технологических процессов изготовления деталей редуктора. Она также дает возможность по результатам измерения на координатно-измерительной машине прогнозировать кинематическую погрешность редуктора и диагностировать ошибки изготовления деталей на основании анализа его кинематограммы.

Дальнейшее усовершенствование модели должно идти в направлении учета упругих деформаций звеньев цевочной передачи при отсутствии и наличии вращающего момента на выходном валу редуктора с учетом возможности двухпрофильного контакта при заклинивании зубьев сателлита между цевками колеса. Решение указанной задачи позволит уточнить значение ошибки угла поворота выходного вала редуктора и получить зависимость упругого мертвого хода от передаваемого момента и величины нормальных зазоров в зацеплениях, вызванных погрешностями изготовления его деталей. Полученные результаты позволят уточнить распределение нагрузки в зацеплениях при определении контактных напряжений.

Особый интерес представляет применение модели для проведения статистических экспериментов при различных возможных сочетаниях погрешностей изготовления деталей.

Полученные результаты применены при разработке системы автоматизированного проектирования планетарных цевочных редукторов с циклоидальным зацеплением.

### Литература

1. Литвин Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений. М.: Наука, 1968. 584 с.
2. Litvin F.L. Gear Geometry and Applied Theory. 2<sup>nd</sup> ed. Cambridge University Press, 2004. 800 p.
3. Кудрявцев В.Н. Планетарные передачи. М.-Л.: Машиностроение, 1966. 307 с.
4. Шанников В.М. Теория и конструирование редукторов с внецентренным циклоидальным зацеплением. В кн.: Зубчатые и червячные передачи. М.-Л.: Машгиз, 1959. С. 74–109.
5. Dascalescu A. Contribution to the Kinematics and Dynamics Studys of the Planetary Gears with Cycloid Toothing and Roller Teeth, PhD Theses. Cluj-Napoca, Romania, 2005. 9 p.
6. Fedosovskii M.E., Aleksanin S.A., Nikolaev V.V., Yegorov I.M., Dunaev V.I., Puctozarov R.V. The effect of a cycloid reducer geometry on its loading capacity // World Applied Sciences Journal. 2013. V. 24. N 7. P. 895–899.
7. Бруевич Н.Г. Точность механизмов. М.-Л.: ГИТТЛ, 1946. 332 с.
8. Литвин Ф.Л. Проектирование механизмов и деталей приборов. Л.: Машиностроение, 1973. 695 с.

9. Сергеев В.И. Методологические основы повышения точности механизмов с высшими кинематическими парами // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2006. № 1. С. 3–9.
10. Guan T.M. Calculation and analysis on the return error resulting from cycloid-disk modification in the cycloid drive // Modular Machine Tool and Automatic Manufacturing Technique. 2001. V. 10. P. 15–18.
11. Hidaka T., Wang H., Ishida T., Matsumoto K., Hashimoto M. Rotational transmission error of K-H-V planetary gears with cycloid gear // Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series C. 1994. V. 60. N 570. P. 645–653.
12. Li C., Liu J., Sun T. Study on transmission precision of cycloidal pin gear in 2K-V planetary drives // Chinese Journal of Mechanical Engineering. 2001. V. 37. N 4. P. 61–65.
13. Shirokoshi N., Hidaka T., Kasei S. Studies of influences of geometrical errors to final performances in small backlash planetary gears. Relations among position deviations of planet gears, target of backlash and non-working flank load // Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series C. 2000. V. 66. N 646. P. 1950–1958.
14. Sun Y.G., Zhao X.F., Jiang F., Zhao L., Liu D., Lu G.B. Backlash analysis of RV reducer based on error factor sensitivity and Monte-Carlo simulation // International Journal of Hybrid Information Technology. 2014. V. 7. N 2. P. 283–292.
15. Yang D.C.H., Blanche J.G. Design and application guidelines for cycloid drives with machining tolerances // Mechanism and Machine Theory. 1990. V. 25. N 5. P. 487–501.

- |   |  |
|---|--|
| <b><i>Егоров Иван Михайлович</i></b>        | – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник, ЗАО «Диаконт», Санкт-Петербург, 195274, Российская Федерация, egrov@mail.ru |
| <b><i>Александрин Сергей Андреевич</i></b>  | – директор дивизиона систем управления и технологического оборудования, ЗАО «Диаконт», Санкт-Петербург, 195274, Российская Федерация, alexsanin@diakont.com    |
| <b><i>Федосовский Михаил Евгеньевич</i></b> | – кандидат технических наук, генеральный директор, ЗАО «Диаконт», Санкт-Петербург, 195274, Российская Федерация, diakont@diakont.com                           |
| <b><i>Кряжева Наталья Петровна</i></b>      | – аспирант, начальник лаборатории техногенной безопасности, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, kryazheva@diakont.com             |
| <b><i>Ivan M. Egorov</i></b>                | – PhD, senior researcher, “Diakont”, JSC, Saint Petersburg, 195274, Russian Federation, egrov@mail.ru  |
| <b><i>Sergei A. Aleksanin</i></b>           | – Technological Equipment & Control Systems Division Director, “Diakont”, JSC, Saint Petersburg, 195274, Russian Federation, alexsanin@diakont.com             |
| <b><i>Mikhail E. Fedosovskiy</i></b>        | – PhD, General Manager, “Diakont”, JSC, Saint Petersburg, 195274, Russian Federation, diakont@diakont.com  |
| <b><i>Natalya P. Kryazheva</i></b>          | – Technological Safety Laboratory Head, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, kryazheva@diakont.com                                   |

*Принято к печати 29.09.14*

*Accepted 29.09.14*