УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ
март–апрель 2015 Том 15 № 2 ISSN 2226-1494 http://ntv.ifmo.ru/
SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL OF INFORMATION TECHNOLOGIES, MECHANICS AND OPTICS
March–April 2015 Vol. 15 No 2 ISSN 2226-1494 http://ntv.ifmo.ru/en

УДК 519.85

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ПЕРЕМЕННЫЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ТИПА

А.Р. Урбан[a,b]
[a] Петрозаводский государственный университет, Петрозаводск, 185910, Российская Федерация
[b] ООО «ОПТИ-СОФТ», Петрозаводск, 185910, Российская Федерация
Адрес для переписки: alexrurban@gmail.com

Информация о статье
Поступила в редакцию 13.09.14, принята к печати 09.02.15
doi:10.17586/2226-1494-2015-15-2-322-328
Язык статьи – русский
Ссылка для цитирования: Урбан А.Р. Методы решения задачи линейного программирования с дополнительными ограничениями на переменные определенного типа // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2015. Том 15. № 2. С. 322–328.

Аннотация. Представлено описание решения задачи, связанной с учетом специфических допустимых множеств на переменные в задачах линейного программирования. В работе речь идет о допустимом множестве, представляющем собой для некоторой переменной объединение отрезков с множительным параметром. Решение указанной задачи производится в два этапа: сначала решается релаксированная задача линейной оптимизации (без учета дополнительных ограничений на переменные), а затем на основании полученного решения строится вспомогательная задача нелинейной оптимизации. Решение указанной вспомогательной задачи основывается на специализированном методе нелинейной оптимизации – методе Бокса. Результатом является предложенный автором алгоритм для решения задачи линейного программирования с дополнительными ограничениями на переменные с указанием оценок точности. Решение указанной задачи имеет высокую практическую значимость. Такого рода ограничения на переменные в задачах линейного программирования возникают достаточно часто для производственных задач. Применение метода показано на примере задачи нахождения оптимального плана раскроев в бумагоделательной промышленности, при решении которой возникает задача округления количества накатов съема тамбура бумагоделательных машин в условиях найденного оптимального плана раскроев.
Ключевые слова: линейное программирование, нелинейная оптимизация, метод Бокса.

METHODS FOR SOLVING LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS WITH ADDITIONAL RESTRICTIONS TO THE PARTICULAR VARIABLES

A.R. Urban[a,b]
[a] Petrozavodsk State University, Petrozavodsk, 185910, Russian Federation
[b] LLC «OPTI-SOFT», Petrozavodsk, 185910, Russian Federation
Corresponding author: alexrurban@gmail.com

Article info
Received 13.09.14, accepted 09.02.15
doi:10.17586/2226-1494-2015-15-2-322-328
Article in Russian
Reference for citation: Urban A.R. Methods for solving linear programming problems with additional restrictions to the particular variables. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2015, vol.15, no. 2, pp. 322–328. (in Russian)

Abstract. The paper describes the solution of the problem related to the specific admissible sets of variables in linear programming. We are discussing the feasible set which is the union of segments with multiplier parameter for some variable. The solution of this problem is performed in two stages: at the beginning the relaxed problem of linear optimization is solved (without additional restrictions to the variables), and then auxiliary nonlinear optimization problem is constructed on the basis of the obtained solution. Solution of the mentioned auxiliary problem is based on a specialized method of nonlinear optimization - Box method. The result is the algorithm proposed by the author for solving linear programming problems with additional restrictions to the variables with indication of the accuracy estimates. The solution of this problem has a high practical importance. Such restrictions to the variables in the linear programming problems occur often enough for production problems. Method application is shown on the example of an optimal plan finding for pattern cutting in the paper industry, when the task arises associated with the rounding of reels number for paper machines in terms of the found optimal paper cutting plan.
Keywords: linear programming, nonlinear optimization, Box method.

Введение

Рассматривается метод решения частного случая задачи линейного программирования (ЛП) с наличием одного или нескольких нелинейных ограничений на переменные [1, 2], таких, что переменные не только ограничены снизу нулем, но и должны принадлежать множеству, являющемуся объединением отрезков с множительным параметром вида $\bigcup_{p\in Z^+}[p\cdot r, p\cdot R]$, где p – множительный параметр, r, R – границы отрезка.

Указанные математические модели возникают при решении ряда производственных задач [1, 3, 4], что обусловливает актуальность рассматриваемого предмета исследования. Рассмотрим методы решения поставленной задачи, которые используются авторами в указанных работах. Во всех источниках применяется весьма распространенный подход к решению такого рода задач – принцип релаксации нелинейной задачи, т.е. переход к решению линейной задачи путем релаксирования нелинейных ограничений с последующей корректировкой результата. Таким образом, основная суть метода заключается именно в методе корректировки полученного решения релаксированной задачи для учета нелинейных ограничений оригинальной задачи. В источнике [3] применяется метод простого математического округления, который не учитывает отклонения для неравенств и изменение целевой функции. Авторами работы [4] предложен метод «жадного» алгоритма, который учитывает изменения целевой функции, однако не рассматривает отклонения для неравенств. Данные подходы имеют существенные недостатки, поскольку влекут за собой потерю целевой функции задачи и, следовательно, получение менее оптимального плана раскроев.

В настоящей работе автором предлагается иной путь к решению задачи корректировки найденного решения релаксированной задачи ЛП для соблюдения указанных нелинейных ограничений на переменные. Он заключается в построении новой вспомогательной задачи нелинейной условной оптимизации для учета изменения значения целевой функции и отклонений относительно неравенств. Для решения вспомогательной задачи предлагается авторский алгоритм, основанный на методах нелинейной оптимизации.

Практическая значимость состоит в применении данного подхода к задаче нахождения оптимального плана раскроев в бумагоделательной промышленности [1], при решении которой возникает задача округления количества накатов съема тамбура бумагоделательных машин в условиях найденного оптимального плана раскроев.

Постановка задачи

Представим релаксированную задачу ЛП для общей производственной задачи [1] в следующем виде:

$$\begin{gathered}\sum_{k\in K} c_k x_k + \sum_{i\in N}\left(c_i^f f_i + c_i^F F_i\right) \to \min ,\\ b_i - f_i \le \sum_{k\in K}\mathbf{A_{ik}} x_k \le B_i + F_i, i\in N,\\ x_k \ge 0,\ f_i \ge 0,\ F_i \ge 0,\ k\in K, i\in N .\end{gathered} \tag{1}$$

где N – индексное множество строк матрицы A; K – индексное множество столбцов матрицы A; b_i, B_i – значения нижней и верхней границ для ограничения с номером $i\in N$; f_i, F_i – значения отклонений от минимальной и максимальной границ соответственно для ограничения с номером $i\in N$; c_i^f, c_i^F – значения штрафов для соответствующих отклонений ограничения с номером $i\in N$; c_k – значение величины штрафа для столбца с номером $k\in K$; x_k – значение переменной с номером $k\in K$.

Пусть $x_k^*,\ k\in K$ – найденное оптимальное решение задачи (1). Это решение найдено посредством матричного конструктора [5, 6] с различными схемами симплексного метода, а также с возможностью распараллеливания процесса поиска оптимального столбца на каждой итерации симплекс-метода [7, 8]. Более подробно метод решения описан в работе [1].

Для определения множества допустимых решений необходимо ввести следующие обозначения:

– r_k – нижняя граница элементарного отрезка для переменной с номером $k\in K$;

– R_k – верхняя граница элементарного отрезка для переменной с номером $k\in K$.

На основе введенных обозначений определим дискретное допустимое множество Ω_k для каждой переменной $k\in K$:

$$\Omega_k = \bigcup_{p\in Z^+}[p\cdot r_k, p\cdot R_k],\ k\in K .$$

Каждое множество Ω_k представляет собой допустимое множество для значения переменной с номером $k\in K$, которое определяется посредством множительного параметра p . На рис. 1 схематично представлено множество Ω_k . Отметим, что отрезки $[p\cdot r_k, p\cdot R_k], k\in K$ в общем случае могут пересекаться.

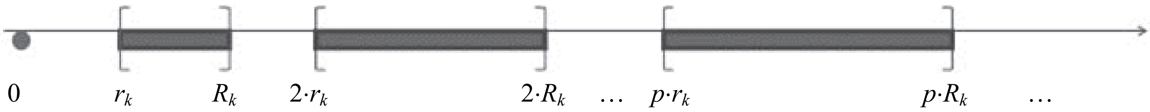


Рис. 1. Допустимое множество Ω_k

Определим для любого $\alpha \in \Re$: $\alpha^+ = \begin{cases} \alpha, \alpha \ge 0 \\ 0, \alpha < 0 \end{cases}$.

На основе введенных обозначений определим новую задачу оптимизации для поиска решения задачи $\{y_k, k \in K\}$ с учетом указанного допустимого множества:

$$\sum_{i\in N}\left(\left(b_i - \sum_{k\in K}\mathbf{A_{ik}}\, y_k\right)^+ \cdot c_i^f + \left(\sum_{k\in K}\mathbf{A_{ik}}\, y_k - B_i\right)^+ \cdot c_i^F\right) + cy \to \min, \tag{2}$$

$$y_k \in \Omega_k, k \in K\ . \tag{3}$$

При этом значение параметра p для переменной с номером $k \in K$ со значением $y_k \in \Omega_k$ будет определяться следующим образом: $p_k = \left\lfloor \frac{y_k}{r_k} \right\rfloor \in Z^+, k \in K.$

Об алгоритме решения задачи

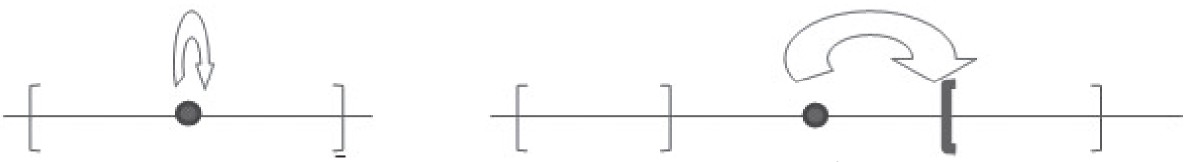
Для решения задачи (2)–(3) предлагается использовать следующую схему. Введем неизвестный вектор приращений $(-\varepsilon_k \le \Delta\mathbf{x}_k \le \varepsilon_k,\ \Delta\mathbf{x}_k \in \Re, k \in K)$, где граничные значения $(\varepsilon_k, k \in K)$ выбираются следующим образом: $\varepsilon_k = \lambda \cdot x_k^*,\ k \in K,\ \lambda = 0{,}05$.

Значение коэффициента λ выбирается на практике, и результаты показали, что наиболее приемлемое значение равно 0,05. Посредством введенного вектора приращений свяжем найденное решение задачи (1) и неизвестное решение задачи (2)–(3) следующим образом:

$$y_k = G_{r_k,R_k}\left(x_k^* + \Delta\mathbf{x}_k\right),\ k \in K. \tag{4}$$

$$G_{r,R}(x) = \begin{cases} x, \textit{ если для некоторого } p \in Z^+ \textit{ верно } \left\lceil \frac{x}{R} \right\rceil \le p \le \left\lfloor \frac{x}{r} \right\rfloor, \\ r \cdot \left\lceil \frac{x}{r} \right\rceil, \textit{ иначе.} \end{cases}$$

Функция $G_{r_k,R_k}(x)$ определена на всем множестве вещественных чисел $x \in \Re$, и в случае принадлежности аргумента к некоторому допустимому отрезку функция возвращает искомый аргумент, иначе возвращает левую границу ближайшего допустимого отрезка. Графическое изображение работы функции $G_{r,R}(x)$ представлено на рис. 2. Докажем это формально.



а б

Рис. 2. Результат работы функции $G_{r,R}(x)$: аргумент функции принадлежит допустимому отрезку (а); аргумент функции не принадлежит допустимому отрезку (б)

Лемма 1. Для любого вещественного аргумента $x \in \Re$ функция $G_{r,R}(x)$ возвращает значение, которое принадлежит к некоторому отрезку множества $\bigcup_{p\in Z^+}[p \cdot r, p \cdot R]$.

Доказательство.

1. Случай $\left\lceil \frac{x}{R} \right\rceil \le p \le \left\lfloor \frac{x}{r} \right\rfloor, p \in Z^+$.

Напомним, что для любых $a, b \in R^+$ верны следующие неравенства:

$b \cdot \left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil \ge a$, $b \cdot \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \le a$.

Тогда

$$\left\lceil \frac{x}{R} \right\rceil \le p \to \left\lceil \frac{x}{R} \right\rceil R \le pR \xrightarrow{x \le \left\lceil \frac{x}{R} \right\rceil R} x \le pR \,, \quad p \le \left\lfloor \frac{x}{r} \right\rfloor \to pr \le \left\lfloor \frac{x}{r} \right\rfloor r \xrightarrow{x \ge \left\lfloor \frac{x}{r} \right\rfloor r} pr \le x \,.$$

Таким образом, $pr \le x \le pR, p \in Z^+$ – значение $G_{r,R}(x) = x$ принадлежит некоторому отрезку.

2. Случай, когда не существует такого $p \in Z^+$, что $\left\lceil \frac{x}{R} \right\rceil \le p \le \left\lfloor \frac{x}{r} \right\rfloor$ и результат равен $r \cdot \left\lceil \frac{x}{r} \right\rceil$. Докажем, что при значении $p = \left\lceil \frac{x}{r} \right\rceil$ значение функции $G_{r,R}(x)$ будет попадать в интервал $[pr, pR]$.

$$G_{r,R}(x) = r \cdot \left\lceil \frac{x}{r} \right\rceil = pr \,, \; r \le R \to G_{r,R}(x) = r \cdot \left\lceil \frac{x}{r} \right\rceil \le R \cdot \left\lceil \frac{x}{r} \right\rceil = pR \,.$$

Таким образом, $pr \le G_{r,R}(x) \le pR, p \in Z^+$ – значение $G_{r,R}(x)$ принадлежит некоторому отрезку. □

Из Леммы 1 следует, что значения $\{y_k, k \in K\}$, полученные посредством формулы (4), удовлетворяют ограничению (3) задачи (2)–(3) для любого вектора неизвестных $\{\Delta \mathbf{x}_k\}$, $k \in K$.

На основании Леммы 1 и формулы (4) задачу (2)–(3) можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{i \in N} \left(\left(b_i - \sum_{k \in K} \mathbf{A_{ik}} y_k \right)^+ \cdot c_i^f + \left(\sum_{k \in K} \mathbf{A_{ik}} y_k - B_i \right)^+ \cdot c_i^F \right) + cy \to \min, \tag{5}$$

$$y_k = G_{r_k, R_k} \left(x_k^* + \Delta \mathbf{x}_k \right), \; k \in K \,, \tag{6}$$

$$(-\varepsilon_k \le \Delta \mathbf{x}_k \le \varepsilon_k, k \in K) \,. \tag{7}$$

Методы решения

Задача (5)–(7) представляет собой задачу условной нелинейной оптимизации [9] в упрощенной форме:

$$f(x) \to \min \,,$$

$$x \in E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_{|k|} \,, \; E_k = [-\varepsilon_k, \varepsilon_k], \; k \in K \,.$$

Для решения поставленной задачи применялись различные эвристические эволюционные методы решения задач нелинейной оптимизации, такие, как генетический алгоритм, метод муравьиной кучи [10–13], а также различные градиентные методы. Наиболее эффективным оказался комплексный метод Бокса [14]. Данный метод представляет модификацию метода деформируемого многогранника (метод Нелдера–Мида) [15, 16] и предназначен для решения задачи нелинейного программирования с ограничениями-неравенствами, нижними и верхними ограничениями на переменные. Суть метода заключается в минимизации функции n переменных в n-мерном пространстве посредством построения многогранников, содержащих $q > n+1$ вершин, называемых комплексами [14]. Основная идея метода заключается в итерационном уменьшении максимальной (относительно целевой функции) вершины комплекса. Важным аспектом данного метода является то, что на каждом шаге используется информация только о значениях целевой функции и функций ограничений задачи без необходимости расчета градиентных значений, что существенно упрощает его использование, а также способствует наличию приемлемой вычислительной сложности алгоритма [17]. Применение указанного метода облегчает тот факт, что допустимое множество задачи (5)–(7) является выпуклым и представляет собой n-мерный параллелепипед.

Укажем специфические особенности реализации метода Бокса для решения задачи (5)–(7).

Алгоритм комплексного поиска состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Выбор количества точек многогранника (комплекса): $P = 2 \cdot |K|$.

Шаг 2. Построение точек начального комплекса производится случайным образом в пределах допустимого множества:

$$x_k^{(i)} = \varepsilon_k \cdot (1 - 2 \cdot r_k), \; i = 1..P, \; k = 1..|K|, \; r_k \sim U[0,1] \,.$$

Шаг 3. Поиск точки с максимальным значением целевой функции и расчет центра тяжести:

$$h = \arg\max_{i=1..P} f(x^{(i)}) \,, \; x^{(c)} = \frac{1}{P-1} \left(\sum_{i=1, i \ne h}^{P} x^{(i)} \right).$$

Шаг 4. Операция отражения для получения новой точки комплекса

$$x^{(r)} = (\alpha + 1) x^{(c)} - \alpha \cdot x^{(h)} \,,$$

$\alpha = 1{,}3$ – значение коэффициента отражения, которое выбрано из источника [15] и подтверждено на практике для данной задачи.

Шаг 5. Проверка новой точки $x^{(r)}$:

1. $x^{(r)} \in E$ и $f(x^{(r)}) < f(x^{(h)})$ – точка $x^{(r)}$ допустима и значение функции меньше полученного ранее максимального значения – заменяем точку $x^{(h)}$ на точку $x^{(r)}$ и переходим к шагу 7.

2. $x^{(r)} \in E$ и $f(x^{(r)}) \geq f(x^{(h)})$ – точка $x^{(r)}$ допустима и значение функции не меньше полученного ранее максимального значения – переходим к новой точке посредством операции сжатия $x^{(r)} = \dfrac{x^{(r)} + x^{(c)}}{2}$ и переход на шаг 5.

3. $x^{(r)} \notin E$ – точка $x^{(r)}$ недопустима – переходим к граничному условию

$$x_k^{(r)} = \begin{cases} x_k^{(r)},\ x_k^{(r)} \in E_k \\ -\varepsilon_k,\ x_k^{(r)} < -\varepsilon_k \\ \varepsilon_k, x_k^{(r)} > \varepsilon_k \end{cases}$$

и переход на шаг 5.

Шаг 6. Критерий выхода. За оценку критерия выхода возьмем следующую величину среднеквадратичного отклонения значений функций для точек комплекса:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1, i\neq c}^{P} \left(f(x^{(i)}) - f(x^{(c)}) \right)}{P-1}}.$$

Если значение оценки σ меньше некоторой величины (выбирается эмпирическим путем), то алгоритм заканчивает свою работу и переход на шаг 7. Иначе продолжаем поиск новой точки $x^{(r)}$ – на шаг 3.

Шаг 7. Окончание алгоритма

$\overline{z} = \min\{\min_{i=1..P}\{f(x^{(i)})\},\ f(x^{(c)})\} = f(\overline{x})$ – решение задачи.

Точность

Практическая оценка. Практическая оценка базируется на отношении значения целевой функции задачи, полученной с помощью алгоритма, и значения целевой функции релаксированной задачи [18]. Под релаксированной задачей подразумевается задача ЛП (1). Введем следующие обозначения:

- $z^* = \min_{x\in E} f(x)$ – решение задачи, минимальное значение целевой функции на допустимом множестве E;
- $\overline{x}$ – решение, найденное методом Бокса, $\overline{z} = f(\overline{x})$ – верхняя оценка целевой функции задачи, полученная посредством алгоритма;
- $\tilde{x}$ – решение, найденное методом полного перебора границ отрезков каждого допустимого множества $\Omega_k,\ k \in K$, $\tilde{z} = f(\tilde{x})$ – соответствующее значение целевой функции задачи;
- $\underline{x}$ – решение релаксированной задачи (1), $\underline{z} = f(\underline{x})$ – нижняя оценка целевой функции задачи.

Для значений целевой функции $\underline{z}, z^*, \overline{z}, \tilde{z}$ справедливо следующее неравенство: $\underline{z} \leq z^* \leq \tilde{z} \leq \overline{z}$.

На основе указанных значений введем оценки точности алгоритма:

- $\delta = \dfrac{\overline{z} - \underline{z}}{\underline{z}} \geq 0$ – оценка относительно решения релаксированной задачи;
- $\sigma = \dfrac{\overline{z} - \tilde{z}}{\tilde{z}} \geq 0$ – оценка относительно решения, полученного посредством полного перебора.

В таблице представлены вышеуказанные оценки для различного набора входных данных.

Количество раскроев	Оценка δ	Оценка σ
5	0,01	0,004
10	0,02	0,006
15	0,02	0,011
20	0,04	0,028
25	0,05	0,045
30	0,09	0,082
35	0,10	0,087
40	0,14	0,106
45	0,18	0,118

Таблица. Оценки точности алгоритма

Как видно из таблицы, значения оценок весьма малы, особенно в контексте производственных объемов.

Теоретическая оценка. Теоретическая оценка базируется на сдвиге решения $\{x_k^*, k \in K\}$, являющимся допустимым базисным решением (угловой точкой симплекса) [19]. Зафиксируем некоторый индекс переменной $x_k^*,\ k \in K$, относительно которой будет рассматриваться сдвиг на $\Delta \mathbf{x}_k$.

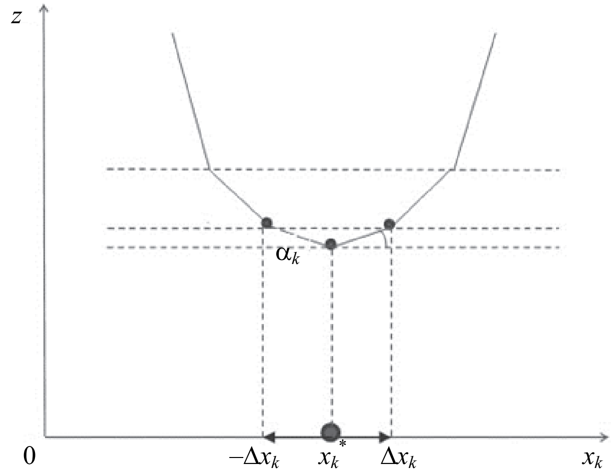


Рис. 3. Изменение функции при сдвиге на $\Delta \mathbf{x}_k$

При сдвиге значения x_k^* на некоторое значение $\Delta \mathbf{x}_k$ значение функции в точке будет перемещаться с некоторым углом α_k по кусочно-линейной функции (рис. 3). Значение тангенса угла α_k рассчитывается вместе с симплекс-таблицей в процессе расчета симплекс-метода [19].

Таким образом, за оценку сверху можно взять сумму значений угла отклонения от угловой точки:

$$\delta = \bar{z} - z^* \le \sum_{k \in K} \frac{\Delta \mathbf{x}_k}{\operatorname{tg}\alpha_k}.$$

Заключение

В работе описан метод, позволяющий производить учет представленных ограничений на переменные в задачах смешанного линейного программирования. Метод основан на решении полученной нелинейной задачи оптимизации на множестве сдвигов посредством метода Бокса. Результаты показали, что метод имеет весьма малые оценки отклонения значений целевой функции от релаксированной задачи, что говорит о целесообразности его применения для решения указанной задачи.

Литература

1. Урбан А.Р., Кузнецов В.А. Математические модели и методы учета сроков продукции в задаче раскроя тамбуров бумагоделательных машин // Ученые записки ПетрГУ. Серия: естественные и технические науки. 2014. № 4 (141). С. 112–115.
2. Кузнецов В.А. Задачи раскроя в целлюлозно-бумажной промышленности. СПб.: Изд-во СПбЛТА, 2000. 132 с.
3. Воронов Р.В. Математические модели и методы автоматизированных систем планирования производства бумаги: автореф. дисс. … канд. техн. наук. Петрозаводск, 2004. 22 с.
4. Westerlund T., Harjunkoski I., Isaksson J. Solving a production optimization problem in a paper-converting mill with MILP // Computers and Chemical Engineering. 1998. V. 22. N 4–5. P. 563–570.
5. Voronin A.V., Kuznetsov V.A., Arkhipov I.V., Shabaev A.I. Software system for sawmill operation planning // Proc. 12th Conference of FRUCT Association. St. Petersburg, Russia, 2012. P. 165–171.
6. Shabaev A.I., Arhipov I.V., Spirichev M.V., Urban A.R., Torozerov M.A. Development of planning system for plywood production using matrix designer // Proc. 14th Conference of FRUCT Association. St. Petersburg, Russia, 2014. P. 140–147.
7. Vasenin V.A., Vodomerov A.N. A formal model of a system for automated program parallelization // Programming and Computer Software. 2007. V. 33. N 4. P. 181–194. doi: 10.1134/S0361768807040019
8. Ilyushin A.I., Olenin M.A., Vasil'ev S.A. Solution of parallel computation problem based on «Space-Time» concept // Programming and Computer Software. 2012. V. 38. N 4. P. 189–200. doi: 10.1134/S0361768812040020
9. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982. 584 с.

10. Афанасьева А.С., Буздалов М.В. Выбор функции приспособленности особей генетического алгоритма с помощью обучения с подкреплением // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2012. № 1 (77). С. 77–81.
11. Еремеев А.В. Генетический алгоритм с турнирной селекцией как метод локального поиска // Дискретный анализ и исследование операций. 2012. Т. 19. № 2. С. 41–53.
12. Shtovba S.D. Ant algorithms: theory and applications // Programming and Computer Software. 2005. V. 31. N 4. P. 167–178. doi: 10.1007/s11086-005-0029-1
13. Khapaev M.M., Tsygankov A.A. An algorithm for the constrained extremum problem // Computational Mathematics and Modeling. 1997. V. 8. N 4. P. 322–325.
14. Трифонов А.Г. Постановка задачи оптимизации и численные методы ее решения [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://matlab.exponenta.ru/optimiz/book_2/index.php, свободный. Яз. рус. (дата обращения 25.01.2015)
15. Медынский М.М., Антоний Е.В. Численные методы нелинейной оптимизации: алгоритмы и программы. Учебное пособие. М.: МАИ, 2003. 192 с.
16. Городецкий С.Ю., Гришагин В.А. Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2007. 489 с.
17. Kapitonova A.P., Smelyanskii R.L., Terekhov I.V. A support system for estimating computational complexity in programs // Computational Mathematics and Modeling. 1994. V. 5. N 4. P. 279–287. doi: 10.1007/BF01130310
18. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦМНО, 2000. 960 с.
19. Гасс С. Линейное программирование: методы и приложения. М.: Физматгиз, 1961. 304 с.

Урбан Александр Ромолдович – ведущий программист, Петрозаводский государственный университет, Петрозаводск, 185910, Российская Федерация; ведущий программист, ООО «ОПТИ-СОФТ», Петрозаводск, 185910, Российская Федерация, alexrurban@gmail.com

Alexander R. Urban – leading programmer, Petrozavodsk State University, Petrozavodsk, 185910, Russian Federation; leading programmer, LLC «OPTI-SOFT», Petrozavodsk, 185910, Russian Federation, alexrurban@gmail.com