

УДК 532.529

ОТРАЖЕНИЕ КОСОГО СКАЧКА УПЛОТНЕНИЯ ОТ СТЕНКИ

П.В. Булат^a, В.В. Упырев^a, П.В. Денисенко^b

^a Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация

^b Университет Уорвика, Ковентри, CV4 7AL, Великобритания

Адрес для переписки: pavelbulat@mail.ru

Информация о статье

Поступила в редакцию 20.01.15, принята к печати 25.02.15

doi:10.17586/2226-1494-2015-15-2-338-345

Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Булат П.В., Упырев В.В., Денисенко П.В. Отражение косого скачка уплотнения от стенки // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2015. Том 15. № 2. С. 338–345.

Аннотация. Рассматривается регулярное и маховское (нерегулярное) отражение косого скачка уплотнения от стенки. Описаны критерии перехода от регулярного отражения к нерегулярному – критерий фон Неймана и критерий стационарной маховской конфигурации. Построены графики зависимостей особых интенсивностей падающего скачка, соответствующих двум критериям перехода от регулярного отражения к нерегулярному. Продемонстрирована область неоднозначности решения, в которой условиями динамической совместности не запрещается и регулярное, и маховское отражение. Описаны области, в которых переход от одного типа отражения к другому возможен только скачком, а также области возможного плавного перехода. Построены графики зависимости величины скачкообразного изменения интенсивности отраженного разрыва от интенсивности падающего скачка. Представлены зависимости интенсивности отраженного разрыва от интенсивности падающего на стенку скачка для всех типов отражений.

Ключевые слова: ударная волна, скачок уплотнения, маховское отражение, критерий фон Неймана, парадокс Неймана.

OBLIQUE SHOCK WAVE REFLECTION FROM THE WALL

P.V. Bulat^a, V.V. Upyrev^a, P.V. Denisenko^b

^a ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

^b University of Warwick, Coventry, CV4 7AL, United Kingdom

Corresponding author: pavelbulat@mail.ru

Article info

Received 20.01.15, accepted 25.02.15

doi:10.17586/2226-1494-2015-15-2-338-345

Article in Russian

For citation: Bulat P.V., Upyrev V.V., Denisenko P.V. Oblique shock wave reflection from the wall. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2015, vol.15, no. 2, pp. 338–345. (in Russian)

Abstract. Regular and Mach (irregular) reflection of an oblique shock wave from the wall is considered. Criteria for the transition from regular to irregular reflection are described: von Neumann criterion and the criterion for fixed Mach configuration. Specific incident shock wave intensities corresponding to the two criteria for the transition from regular to irregular reflection were plotted. The area of ambiguity solutions was demonstrated in which both regular and Mach reflection is not prohibited by the conditions of dynamic compatibility. Areas in which the transition from one type of reflection to another is possible only by a shock wave were described, as well as areas of a possible smooth transition. Dependence of the magnitude of this abrupt change in reflected discontinuity intensity from the intensity of the incident shock wave was plotted. Intensity dependences of the reflected discontinuity from the intensity of the shock wave incident on the wall for all types of reflections were shown.

Keywords: shock wave, Mach reflection, Neumann criterion, Neumann paradox.

Введение

Цель работы – представить основные сведения о задаче отражения косого скачка уплотнения от стенки, а также выполнить параметрическое исследование интенсивности приходящих и исходящих разрывов для различных возможных вариантов отражений. Рассматривается регулярное и нерегулярное (маховское) отражение.

В XXI веке широко развернулись работы по летательным аппаратам со сверхзвуковой скоростью полета, причем исследовался диапазон чисел Маха $M = 1,3–1,6$ для пилотируемых самолетов военного назначения, а также $M = 3–4,5$ для ракет с прямоточным воздушно-реактивным двигателем. Выявились,

что ударно-волновые структуры в воздухозаборниках на этих режимах ведут себя нестандартно. При больших числах Маха существует гистерезис, т.е. при одном и том же числе Маха потока наблюдаются две различные ударно-волновые структуры. При небольших числах Маха возникают так называемые нерегулярные формы отражения скачков от стенок, которые в соответствии с теорией на этих режимах существовать не могут. Это вызвало новую волну исследований в области взаимодействия ударных волн между собой и разных форм их отражения от стенки. Наибольший вклад внесли сотрудники Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича Сибирского отделения Российской академии наук М. Иванов, Д. Хотяновский, А. Кудрявцев, М. Фомин, а также другие исследователи – Бен-Дор, Е. Васильев, Л. Гвоздева [1–6]. Современное состояние вопроса подробно освещено в монографии Бен-Дора [7].

Впервые задача отражения ударной волны (для нестационарного случая) рассмотрена в работах Э. Маха [8] и фон Неймана [9]. Они описали два вида отражения ударной волны от наклонной поверхности (рис. 1):

- регулярное отражение (РО), которое состоит из двух ударных волн – приходящей волны, падающей на твердую поверхность, и отраженной, исходящей из точки падения (рис. 1, а);
- нерегулярное отражение, которое состоит из трех ударных волн – падающей, отраженной и главной, имеющих общую тройную точку (рис. 1, б). Такой вид отражения носит название маховского (МО), а соответствующая конфигурация, если она не содержит других нормальных разрывов, – тройной конфигурации (ТК) ударных волн.

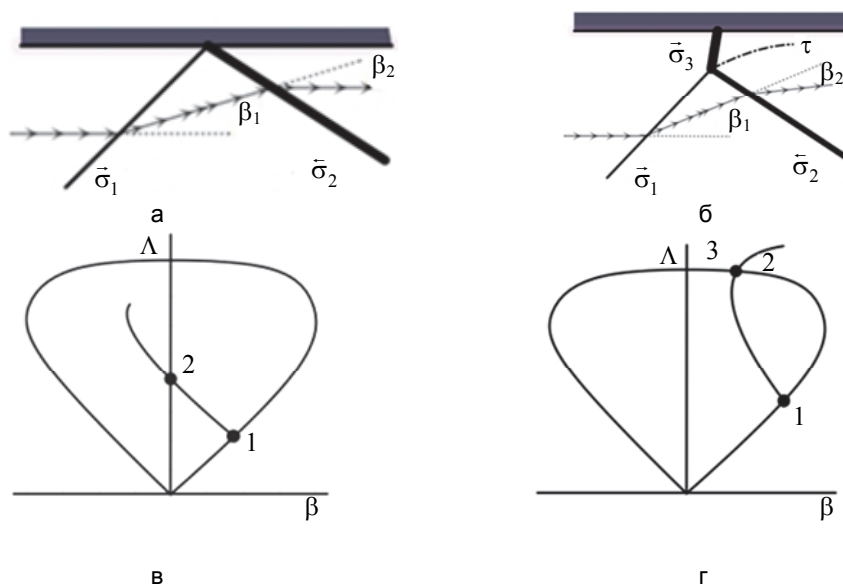


Рис. 1. Регулярное (а) и нерегулярное (б) отражение косога скачка σ_1 от стенки. Показаны поляры, соответствующие регулярному отражению (в); поляры, соответствующие нерегулярному отражению (г).

1 – параметры приходящего скачка (Λ_1, β_1), 2 – параметры отраженного скачка (Λ_2, β_2),

3 – параметры ножки Маха σ_3 (Λ_3, β_3)

На рис. 1 β_1 – угол разворота потока на приходящем скачке; β_2 – угол разворота потока на отраженном скачке; Λ – логарифм интенсивности приходящего скачка (отношение статического давления за скачком к давлению до него); σ_1 – приходящий скачок, σ_2 – отраженный скачок и ножка Маха σ_3 (главный скачок) соответственно. Стрелками показано направление скачка (правый или левый).

В описании ТК фон Нейман предположил, что из тройной точки исходит тангенциальный разрыв (поверхность скольжения τ), разделяющий потоки за отраженной σ_2 и за главной σ_3 ударными волнами (рис. 1, б).

Модель регулярного и нерегулярного отражения скачка от стенки или плоскости симметрии

Теоретический метод анализа ударных поляр, предложенный в 1956 г. Кавамура и Саито [10], был применен к анализу нерегулярного отражения.

В случае отражения скачка от стенки на плоскости поляр приходящему косому скачку соответствует точка 1 на основной поляре (рис. 1, в, г), построенной по числу Маха M_1 невозмущенного течения.

При регулярном отражении (рис. 1, в) поляра, выпущенная из точки 1, соответствующая числу Маха M_2 за скачком 1, пересекает вертикальную координатную ось в точке 2, которая соответствует отраженному скачку 2. При этом суммарный угол разворота потока $\beta = \beta_1 - \beta_2 = 0$. Суммарная степень сжа-

тия потока двумя скачками на плоскости поляра $\ln J_{1,2} = \Lambda_2 = \Lambda_1 + (\Lambda_2 - \Lambda_1)$, где Λ_1 – натуральный логарифм интенсивности падающего скачка σ_1 , а $(\Lambda_2 - \Lambda_1)$ – натуральный логарифм интенсивности отраженного скачка σ_2 .

Число Маха M_2 за первым скачком с интенсивностью J определяется уравнением [11]

$$M_2 = \sqrt{\frac{M_1^2 - (1 - E)(J + 1)}{EJ}},$$

где E – ударная адиабата Рэнкина–Гюгонио,

$$E = \frac{1 + \varepsilon J}{J + \varepsilon},$$

а $\varepsilon = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$, γ – показатель адиабаты.

Фон Нейман сформулировал «критерий отсоединения» (criterion detaching), в соответствии с которым переход от регулярного отражения к маховскому происходит в момент, когда вторичная поляра касается оси ординат (рис. 2, а, г). В его честь данный критерий называется критерием фон Неймана.

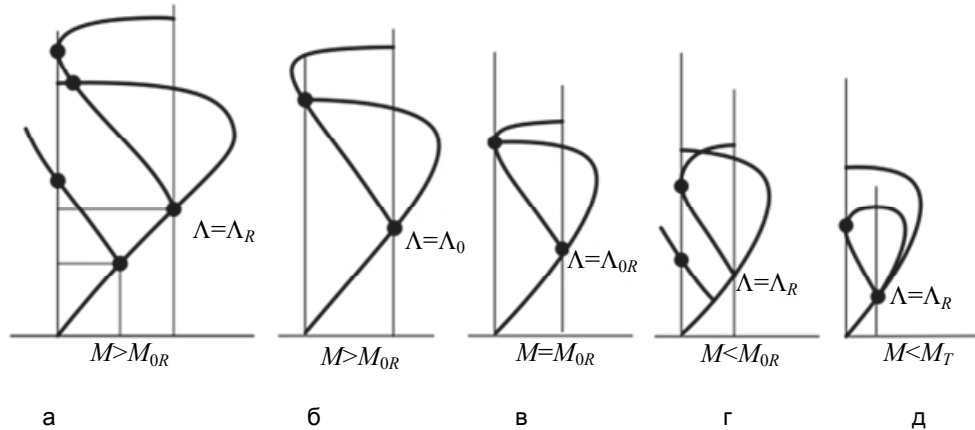


Рис. 2. Переход от регулярного отражения к маховскому: переход в соответствии с критерием фон Неймана при больших числах Маха (а); переход в соответствии с критерием стационарной маховской конфигурации (б); случай особого числа Маха $M = M_{0R}$, при котором оба критерия совпадают (в); переход в соответствии с критерием фон Неймана при небольших числах Маха (г); предельное число Маха $M = M_T$, ограничивающее область существования тройных конфигураций ударных волн (д). Λ_R – особая интенсивность приходящего скачка, при которой происходит переход к МО в соответствии с критерием фон Неймана; Λ_0 – особая интенсивность приходящего скачка, при которой происходит переход к МО в соответствии с критерием стационарной маховской конфигурации; $\Lambda_{0R} = \Lambda_R = \Lambda_0$ – особая интенсивность при $M = M_{0R}$

При заданном числе Маха касанию поляры оси ординат соответствует интенсивность скачка 1, равная J_R [12], которая определяется из решения следующего уравнения:

$$\sum_{n=0}^3 A_n x_R^n = 0, x_R = (1 + \varepsilon)M^2 / (J_R + \varepsilon), \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= -(1 - \varepsilon)^2 L^4, L = (J_R - 1)/(J_R + \varepsilon), \\ A_1 &= 2(1 - \varepsilon)(3 - \varepsilon)L^2 - 4(1 - \varepsilon)(1 - 3\varepsilon)L^3 + (1 - \varepsilon)^4 L^4, \\ A_2 &= 2L^2(1 - 2\varepsilon - \varepsilon^2) - 4L - 1, \\ A_3 &= 1. \end{aligned} \quad (2)$$

В уравнениях (1)–(2) $\varepsilon = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$, где γ – показатель адиабаты, равный отношению удельной теплоемкости при постоянном давлении к удельной теплоемкости при постоянном объеме.

Если вторичная поляра не пересекается с осью ординат, то регулярное отражение невозможно, так как предельный угол разворота потока на втором скачке меньше угла разворота потока β_1 на первом скачке. В данном случае образуется тройная конфигурация ударных волн, содержащая тангенциальный разрыв τ , постепенно разворачивающий поток параллельно стенке. Давление по сторонам тангенциального разрыва равно, а вектора скорости параллельны, что выражается равенствами $\Lambda_2 = \Lambda_3$ и $\beta_2 = \beta_3$. Ножка Маха искривляется, и логарифм ее интенсивности изменяется от Λ_3 до Λ_m . Точке Λ_m соответствует вершина основной поляры.

Обратив внимание на тот факт, что в некотором диапазоне углов клина ударная поляра пересекается как с осью ординат, так и с верхней ветвью основной поляры (рис. 2, а, б), т.е. теоретически возможны как регулярное, так и маховское отражение. Фон Нейман предложил и другой критерий перехода

от регулярного отражения к маховскому, несколько неудачно назвав его «критерием механического равновесия» (mechanical equilibrium). В соответствии с этим критерием переход должен происходить в момент пересечения ударной поляры с изомахой в ее вершине, т.е. интенсивность ножки Маха в данном случае равняется максимальной для заданного числа Маха, определяющего изомаху (рис. 2, б). Возникающая при этом ударно-волновая структура называется стационарной маховской конфигурацией (СМК). Именно поэтому данный критерий был назван В.Н. Усковым [13] критерием СМК.

При заданном числе Маха СМК соответствует характерная интенсивность J_0 , которая определяется уравнением

$$\sum_{k=0}^3 A_k J_0^k = 0,$$

где

$$A_3 = 1 - \varepsilon^2,$$

$$A_2 = -\left((1 + \varepsilon - \varepsilon^2 + \varepsilon^3)J_m + 1 + \varepsilon^2\right),$$

$$A_1 = \varepsilon(1 + J_m)[(1 - \varepsilon)J_m - 2],$$

$$A_0 = (1 - \varepsilon)J_m(J_m - 1),$$

$$J_m = (1 + \varepsilon)M^2 - \varepsilon.$$

Очевидно, что существует некоторое особое число Маха M_{0R} , такое, что вторичная поляра, выпущенная из точки 1 основной поляры, касается оси ординат в точности в вершине основной поляры (рис. 2, в). Этому случаю соответствует уравнение

$$\frac{4A_1\left(\frac{A_1}{A_0} - 3\frac{A_2}{A_1}\right)^2}{9 - \frac{A_1A_2}{A_0}} = 9 - \frac{A_1A_2}{A_0} - 4\left(3 - \frac{A_2^2}{A_1}\right),$$

где коэффициенты A_k – те же, что и в (2). При числах Маха $M < M_{0R}$, вторичная поляра касается оси ординат внутри основной поляры (рис. 2, г), поэтому переход от регулярного отражения к нерегулярному происходит скачком к точке пересечения левой ветви вторичной поляры с дозвуковой областью правой ветви основной поляры (рис. 2, г).

При числах Маха $M > M_{0R}$ вторичная ударная поляра сначала пересекает первичную поляру в ее вершине (рис. 2, б), а уже потом отсоединяется от оси ординат (самая верхняя точка на рис. 2, а). Соответственно, теоретически возможны два варианта перехода к нерегулярному отражению в соответствии с критерием:

- СМК при интенсивности падающего скачка, равной J_0 , – переход плавный;
- отсоединения при интенсивности падающего скачка, равной J_R , – переход происходит скачком на точку пересечения основной и вторичной поляры.

Последующие исследования показали, что часто имеет место гистерезис, т.е. при увеличении интенсивности падающего скачка переход от регулярного отражения к нерегулярному происходит при интенсивности, близкой к критерию отсоединения, а при уменьшении угла наклона скачка обратный переход ближе к критерию СМК. Этому вопросу посвящено большое количество работ, однако вопрос о причинах гистерезиса остался открытым. Проведенный авторами эксперимент методом гидроанalogии четко продемонстрировал, что существует область, в которой при одних и тех же параметрах течения может реализовываться и РО, и МО (рис. 3).

Вместо отражения от стенки изучалось взаимодействие двух встречных скачков уплотнения, которые генерировались симметричными клиньями. Такая постановка эксперимента соответствует отражению косоугольного скачка от плоскости симметрии. В начальный момент времени отражение было регулярным. После создания рукой возмущения (рис. 3, а) в потоке позади точки пересечения скачков течение переходило к МО (рис. 3, б). Затем возмущение вносилось в поток перед ножкой Маха путем небольшого увеличения скорости потока. Течение возвращалось в режим РО скачков (рис. 3, в).

Для чисел Маха, меньших особого числа

$$M_T = \sqrt{\frac{2 - \varepsilon}{1 - \varepsilon}},$$

решение для нерегулярного отражения ударной волны от стенки с образованием тройной точки отсутствует, так как вторичная поляра полностью лежит внутри основной при любых интенсивностях скачка 1 (рис. 2, д), тем не менее, оно наблюдается экспериментально [14].

Это явление получило название парадокса Неймана, поскольку первым на него обратил внимание опять же фон Нейман. Долгое время не удавалось получить и численное решение для такого рода пото-

ков, пока Е.И. Васильев [15] не продемонстрировал, что все дело в недостаточной точности численных методов, влиянии «схемной» вычислительной вязкости и паразитных осцилляций решения, а течение отвечает «четырёхволновой» модели Гудерля [16]. Для этого был использован численный метод с выделением разрывов [17]. Тем не менее, вопрос остался открытым, так как существуют и другие объяснения, например, нестационарный или трехмерный характер течения на данных режимах, возникновение за тройной точкой криволинейного слоя смещения, поперек которого давление может изменяться, и т.п.

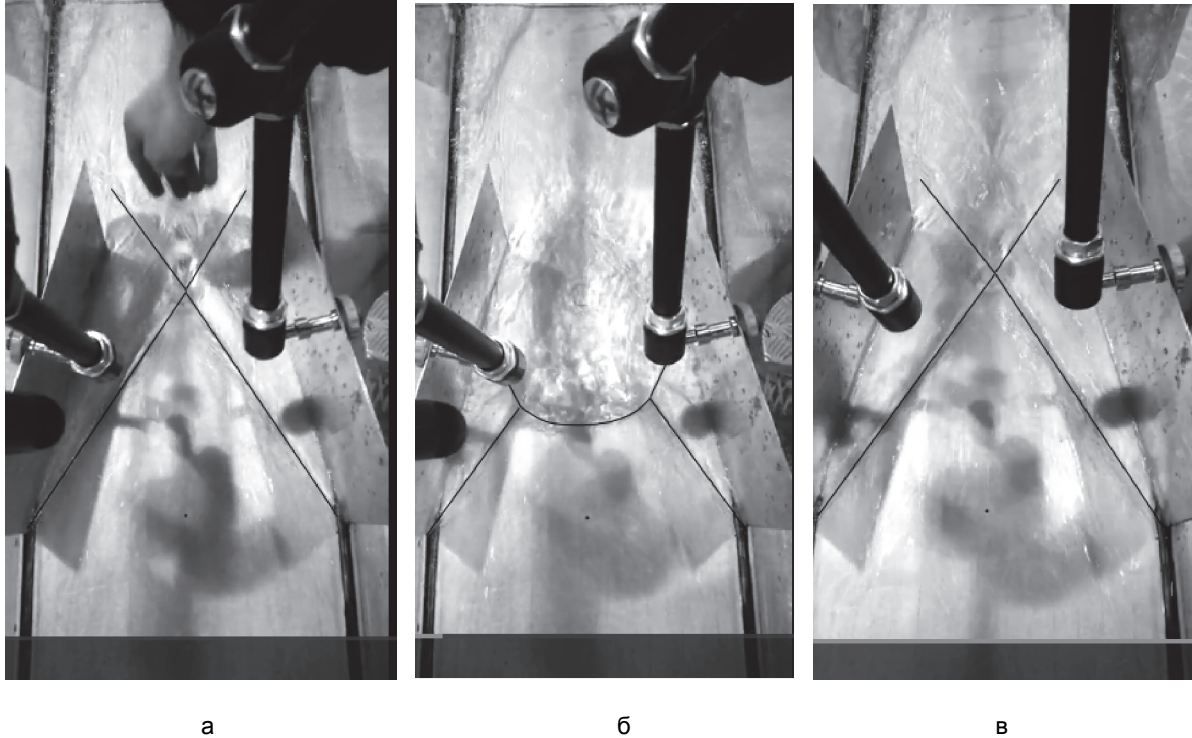


Рис. 3. Моделирование гистерезиса $МО \Leftrightarrow РО$ методом гидроанalogии: РО до помещения возмущения (а); МО после создания рукой возмущения (б); возвращение течения в режим РО после внесения возмущения в поток перед ножкой Маха путем увеличения его скорости (в)

Анализ результатов

Ниже приведен анализ зависимости интенсивности отраженного скачка от интенсивности падающего скачка как при РО, так и при МО. Интенсивность скачка 1 изменялась от 1 до интенсивности J_s , при которой поток за этим скачком становился дозвуковым:

$$J_s = \frac{M^2 - 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{M^2 - 1}{2}\right)^2 + \varepsilon(M^2 - 1) + 1}.$$

Для каждого показателя адиабаты определены особые числа Маха M_{0R} , при которых интенсивность J_R , соответствующая критерию фон Неймана, равна интенсивности J_0 , соответствующей критерию СМК. Результаты расчета приведены в таблице.

| | | | | |
|----------|-------|-------|-------|-------|
| γ | 1,67 | 1,4 | 1,25 | 1,1 |
| M_{0R} | 2,447 | 2,203 | 2,078 | 1,952 |

Таблица. Особые числа Маха

Газ считался термодинамически и калорически совершенным. Результаты расчета представлены на рис. 4. Видно, что в области, в которой реализуется РО, вторичная поляра пересекается с осью ординат (сплошная линия) и с дозвуковой частью основной поляры (пунктирная линия). Если число Маха основного потока $M < M_{0R}$, то $J_R < J_0$ ($M=2$ на рис. 4). При $J_1 = J_R$ система ударных волн скачком переходит к МО, при этом интенсивность J_2 отраженного скачка увеличивается (линии, обозначенные точками, на рис. 4). Если же число Маха основного потока $M > M_{0R}$, то $J_R > J_0$ ($M=3, 4, 5$ на рис. 4). При $J_1 = J_R$ система ударных волн также скачком переходит к МО, но при этом интенсивность J_2 отраженного скачка уменьшается (линии, обозначенные точками, на рис. 4 при $M=3, 4, 5$). Таким образом, в зависимости от числа Маха основного потока интенсивность отраженного скачка может скачком увеличиваться или уменьшаться (рис. 5).

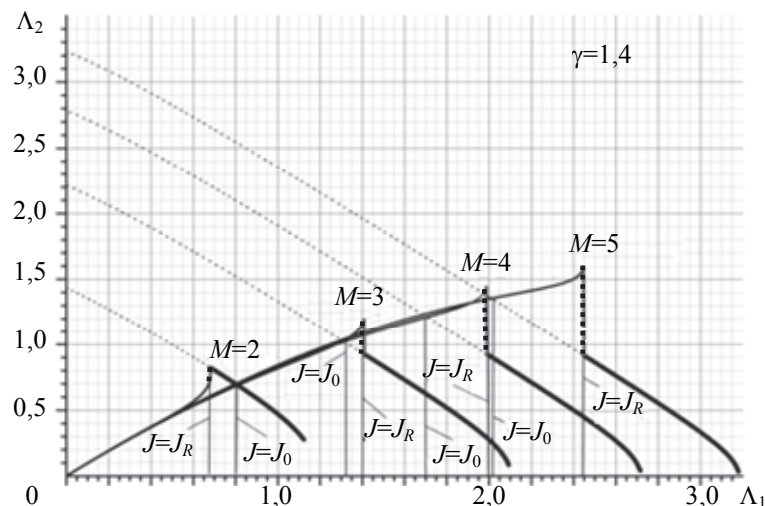


Рис. 4. Зависимость интенсивности отраженного скачка от интенсивности проходящего скачка. Сплошная линия – интенсивность отраженного скачка; линия, обозначенная точками – величина скачка интенсивности отраженного скачка при переходе от регулярного отражения к нерегулярному; пунктирная линия – при регулярном отражении проходящего скачка – «фиктивная» интенсивность отраженного скачка, соответствующая точке пересечения основной поляры и поляры проходящего скачка

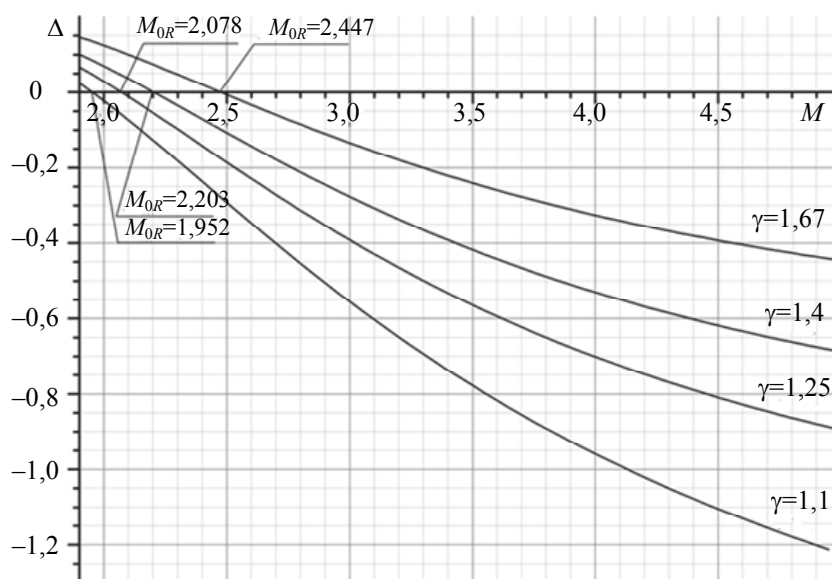


Рис. 5. Зависимость разности интенсивности отраженной ударной волны от числа Маха при скачкообразном переходе от РО к МО в соответствии с критерием отсоединения (критерий Фон Неймана)

Теоретически переход от РО к МО возможен в соответствии с критерием СМК при $J=J_0$. Эти интенсивности отмечены на рис. 4 тонкими вертикальными линиями. Хорошо видно, что при этом никакого скачкообразного изменения интенсивности отраженного скачка не происходит, т.е. переход от РО к МО является плавным. Таким образом, между вертикальными линиями J_r , J_0 заключена область неоднозначности решения, когда теоретически возможно и РО, и МО. Для этой важной области, в которой возможны нестационарные и гистерезисные явления, построены границы для основных γ . На графики нанесены значения особых чисел Маха. Напомним, что при $M < M_{0R}$ СМК существовать не может, и соответственно J_0 здесь не определена. С ростом числа Маха область неоднозначности решения расширяется, растет и величина скачкообразного изменения интенсивности отраженного скачка, что создает предпосылки для возникновения колебаний. При числах Маха $M < M_T$ тройные конфигурации ударных волн теоретически возникать не должны, но обнаруживаются экспериментально.

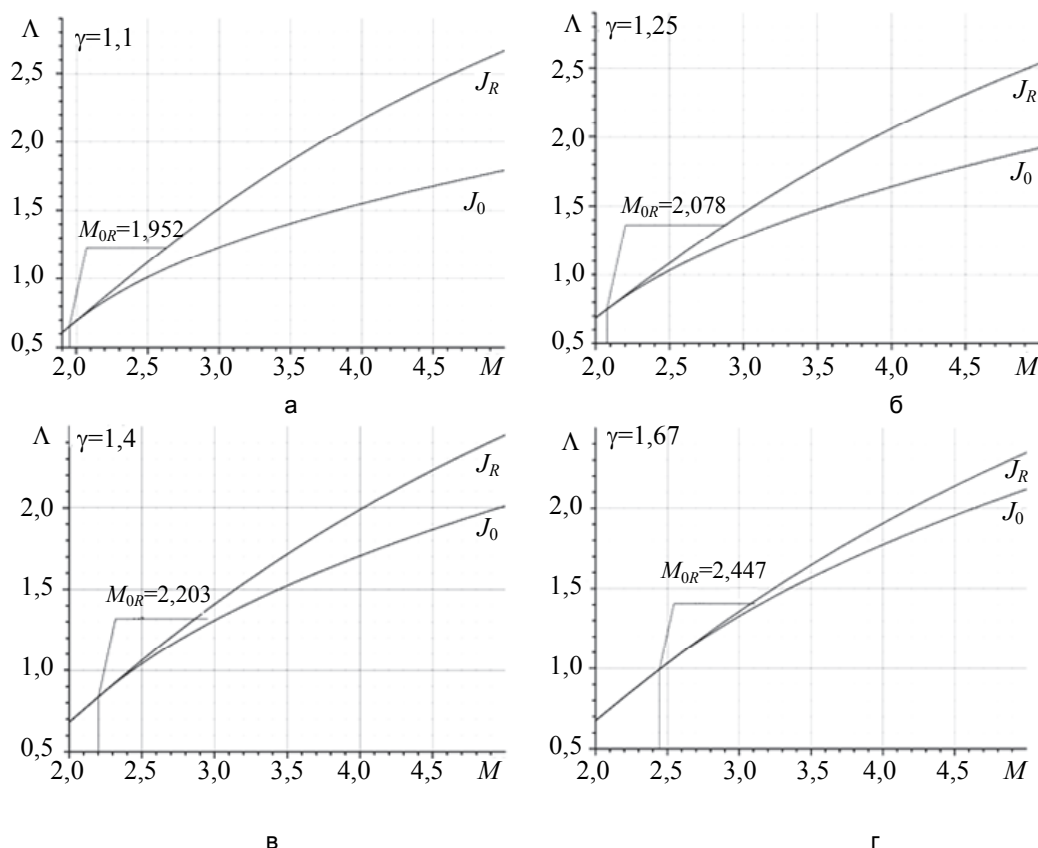


Рис. 6. Область неоднозначности, в которой возможно как РО, так и МО скачка от стенки при различных показателях адиабаты (а–г)

Заключение

Рассмотрено регулярное и нерегулярное отражение скачка уплотнения от плоской стенки. При малых интенсивностях ударных волн (числа Маха $M < M_T$) теория предсказывает невозможность маховского отражения ударной волны от препятствия, но оно наблюдается в экспериментах. Это явление известно как парадокс фон Неймана. Имеются области неоднозначности решения, в этих областях теория не запрещает существование и регулярного, и маховского отражения. С увеличением числа Маха ширина этих областей увеличивается. Переход от регулярного к маховскому отражению может происходить плавно при достижении интенсивностью падающего скачка особого значения J_0 , когда вторичная ударная поляра пересекает основную поляру в ее вершине. Такой переход возможен только при числах Маха, больших особого числа M_{0R} , когда точка касания вторичной поляры оси ординат совпадает с вершиной основной поляры. При переходе к маховскому отражению в соответствии с критерием отсоединения (касание вторичной поляры оси ординат) перестройка ударно-волновой структуры происходит скачком, т.е. интенсивность отраженного скачка изменяется скачкообразно: при $M < M_{0R}$ она скачкообразно увеличивается, а при $M > M_{0R}$ скачкообразно уменьшается. Эксперименты демонстрируют гистерезис характеристик отражения в зависимости от направления изменения угла наклона падающего скачка (уменьшение или увеличение). Все эти вопросы требуют дополнительного теоретического и экспериментального исследования.

Литература

1. Ivanov M.S., Vandromme D., Fomin V.M., Kudryavtsev A.N., Hadjadj A., Khotyanovsky D.V. Transition between regular and Mach reflection of shock waves: new numerical and experimental results // *Shock Waves*. 2001. V. 11. N 3. P. 199–207.
2. Ivanov M.S., Klemenkov G.P., Kudryavtsev A.N., Nikiforov S.B., Pavlov A.A., Fomin V.M., Kharitonov A.M., Khotyanovsky D.V., Hornung H.G. Experimental and numerical study of the transition between regular and Mach reflections of shock waves in steady flows // *Proc. 21st Int. Symp. on Shock Waves*. Great Keppel, Australia, 1997. V. 2. P. 819–824.
3. Ivanov M.S., Ben-Dor G., Elperin T., Kudryavtsev A.N., Khotyanovsky D.V. The reflection of asymmetric shock waves in steady flows: a numerical investigation // *Journal of Fluid Mechanics*. 2002. V. 469. P. 71–87. doi: 10.1017/S0022112002001799

4. Ben-Dor G., Ivanov M., Vasilev E.I., Elperin T. Hysteresis processes in the regular reflection \leftrightarrow Mach reflection transition in steady flows // *Progress in Aerospace Sciences*. 2002. V. 38. N 4–5. P. 347–387. doi: 10.1016/S0376-0421(02)00009-X
5. Gvozdeva L.G., Borsch V.L., Gavrenkov S.A. Analytical and numerical study of three shock configurations with negative reflection angle // *Proc. 28th Int. Symposium on Shock Waves*. Manchester, UK, 2011. V. 2. P. 587–592.
6. Gavrenkov S.A., Gvozdeva L.G. Numerical investigation of triple shock configuration for steady cases in real gases // *Proc. Physics of Extreme States of Matter 2011*. Chernogolovka, ICP RAS, 2011. P. 66–68.
7. Ben-Dor G. *Shock Wave Reflection Phenomena*. 2nd ed. Springer, 2010. 342 p.
8. Mach E. Über den verlauf von funkenwellen in der ebene und im raume. *Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien*. 1878. V. 78. P. 819–838.
9. von Neumann J. Oblique reflection of shocks. In: *Collected Works*, Pergamon. 1943. V. 6. P. 239–299.
10. Kawamura R., Saito H. Reflection of shock waves-1 pseudo-stationary case // *Journal of the Physical Society of Japan*. 1956. V. 11. N 5. P. 584–592.
11. Усков В.Н., Тао Ган, Омельченко А.В. О поведении газодинамических переменных за косой ударной волной // *Сборник статей "Современные проблемы неравновесной газо- и термодинамики"*. 2002. С. 179–191.
12. Bulat P.V., Uskov V.N. Mach reflection of a shock wave from the symmetry axis of the supersonic nonisobaric jet // *Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology*. 2014. V. 8. N 1. P. 135–142.
13. Адрианов А.Л., Старых А.Л., Усков В.Н. *Интерференция стационарных газодинамических разрывов*. Новосибирск: Наука, 1995. 180 с.
14. White D.R. An experimental survey of shock waves // *Proc. 2nd Midwest Conference On Fluid Mechanics*. Ohio State University, 1952. N 3. P. 253–262.
15. Vasil'ev E.I. Four-wave scheme of weak Mach shock waves interaction under the von Neumann paradox conditions // *Fluid Dynamics*. 1999. V. 34. N 3. P. 421–427.
16. Гудерлей К.Г. *Теория околосзвуковых течений*. М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. 421 с.
17. Vasilev E.I., Olhovski M.L. The complex structure of supersonic patches in the steady Mach reflection of the weak shock waves // *Proc. 26th Int. Symposium on Shock Waves*. Göttingen, Germany, 2009. P. 322.

Булат Павел Викторович

— кандидат физико-математических наук, кандидат экономических наук, руководитель научной лаборатории, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, pavelbulat@mail.ru

Упырев Владимир Владимирович

аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, upyrevvv@ya.ru

Денисенко Петр Викторович

— кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Университет Уорвика, Ковентри, CV4 7AL, Великобритания, p.denissenko@gmail.com

Pavel V. Bulat

— PhD, Scientific supervisor of International laboratory, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, pavelbulat@mail.ru

Vladimir V. Upyrev

postgraduate, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, upyrevvv@ya.ru

Petr V. Denissenko

— PhD, scientific researcher, University of Warwick, Coventry, CV4 7AL, United Kingdom, p.denissenko@gmail.com