

УДК 533.6.011

## ПРИМЕНИМОСТЬ РАЗЛИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РАСЧЕТЕ СВЕРХЗВУКОВЫХ НЕИЗОБАРИЧЕСКИХ СТРУЙ

Е.Е. Ильина<sup>a</sup>, Т.Е. Ильина<sup>a</sup>, П.В. Денисенко<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация

<sup>b</sup> Уорикский университет, Ковентри, CV4 7AL, Великобритания.

Адрес для переписки: Tamara-190@yandex.ru

### Информация о статье

Поступила в редакцию 24.02.15, принята к печати 13.03.15

doi:10.17586/2226-1494-2015-15-3-509-516

Язык статьи – русский

**Ссылка для цитирования:** Ильина Е.Е., Ильина Т.Е., Денисенко П.В. Применимость различных дифференциальных моделей турбулентности при численном расчете сверхзвуковых неизобарических струй // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2015. Т. 15. № 3. С. 509–516.

### Аннотация

**Предмет исследования.** Приведены результаты исследования применимости наиболее распространенных моделей турбулентности к расчету сверхзвуковых турбулентных струй, содержащих ударные волны. Целью исследования является отработка эффективной методики расчета неизобарических турбулентных сверхзвуковых газовых струй, содержащих ударные волны. В осесимметричном случае такие струи характеризуются нерегулярным (маховским) отражением ударных волн от оси симметрии, что сопровождается образованием прямых скачков уплотнения (дисков Маха), которые соответствуют пики давления и температуры на оси струи. Течение за дисками Маха – дозвуковое. Появление дозвуковых областей течения, а также резкого изменения параметров течения на прямых скачках уплотнения приводит к некоторым методическим сложностям в применении стандартных двухпараметрических дифференциальных моделей турбулентности. Известно, что разные модели турбулентности приводят к существенно отличающемуся распределению параметров вдоль оси струи. В частности, степень размытия ударно-волновой структуры струи при использовании некоторых моделей турбулентности значительно отличается от экспериментально наблюдаемой.

**Основные результаты.** Выполнено сравнение широко представленных в современных коммерческих вычислительных пакетах моделей турбулентности:  $k-\omega$ -модель турбулентности, модель *Realizable k- $\epsilon$* , модель *RNG k- $\epsilon$* , *SAS*-модель, стандартная *SST k- $\omega$* -модель, *transition SST*-модель. Проведенное тестирование показало, что наилучшие результаты при расчетах сверхзвуковых течений, характерных для перспективных воздушно-реактивных двигателей, дают *Realizable k- $\epsilon$*  и *transition SST*-модели турбулентности. Первая модель при небольшом перепаде давления на срезе сопла и в окружающей среде, типичном для штатных режимов работы воздушно-реактивных двигателей, обеспечивает получение надежных данных о распределении давления по оси струи, донном давлении, распределении давления по стенкам сопла и эжектора. Хорошую точность удается получить на достаточно грубой сетке без применения каких-либо специальных приемов и ухищрений. *Transition SST*-модель турбулентности обеспечивает лучшее совпадение с результатами эксперимента в случае большого перепада давления между срезом сопла и окружающей средой. Она более требовательна к разностной сетке, граничным и начальным условиям, отличается существенно большим временем счета. Вместе с тем, она гарантированно позволяет получить качественно верную картину ударно-волновой структуры при приемлемой точности определения распределения давления по оси струи.

**Практическая значимость.** Практическое применение приведенных в работе рекомендаций позволит исследователям избежать грубых неточностей при расчете сверхзвуковых газовых струй.

### Ключевые слова

модель турбулентности, сверхзвуковые газовые струи.

## APPLICABILITY OF VARIOUS DIFFERENTIAL TURBULENCE MODELS IN THE CALCULATION OF SUPERSONIC GAS JETS

Е.Е. Il'ina<sup>a</sup>, Т.Е. Il'ina<sup>a</sup>, P.V. Denissenko<sup>b</sup>

<sup>a</sup> ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

<sup>b</sup> University of Warwick, Coventry, CV4 7AL, UK

Corresponding author: Tamara-190@yandex.ru

### Article info:

Received 26.12.14, accepted 05.03.15

doi: 10.17586/2226-1494-2015-15-3-509-516

Article in Russian

**For citation:** Il'ina E.E., Il'ina T.E., Denissenko P.V. Applicability of various differential turbulence models in the calculation of supersonic gas jets. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2015, vol.15, no. 3, pp. 509–516.

**Abstract**

**Subject of study.** The paper presents research results of the applicability of the most common turbulence models to the calculation of turbulent supersonic jets containing shock waves. The aim of the study is to develop an efficient method for calculating non-isobaric turbulent supersonic gas jets containing shock waves. In the axisymmetric case such jets are characterized by irregular reflection of shock waves from the axis of symmetry, that is followed by the formation of normal shock waves (Mach disks), which are compatible with the peaks of pressure and temperature on the jet axis. The flow behind the Mach disk is subsonic. The appearance of subsonic flow region and the abrupt change of flow parameters on the direct shock wave leads to some methodological difficulties in the application of the standard two-parameter differential models of turbulence. It is known that various turbulence models lead to significantly different parameters distribution along the axis of the jet. In particular, the degree of blurring for shock wave structure of the jet for some turbulence models is significantly different from the observed one by experiment.

**Main results.** Comparison of widely represented in modern commercial computing packages turbulence models was completed:  $k-\omega$  turbulence model, *Realizable  $k-\varepsilon$*  model, *RNG  $k-\varepsilon$*  model, *SAS*-model, Standard *SST  $k-\omega$*  model, *transition SST*- model. Testing has shown that *Realizable  $k-\varepsilon$*  and *transition SST* turbulence models provide the best results in the calculation of supersonic flows, typical for advanced jet engines. The first model provides reliable data about the distribution of pressure along the jet axis, bottom pressure, the pressure distribution on the walls of the nozzle and ejector at low differential pressure at the nozzle exit and the environment, which are typical for the normal operation of air-jet engines. Good accuracy can be obtained at a fairly coarse grid without the use of any special techniques and tricks. *Transition SST* turbulence model provides a better match with the experimental results in the case of a large pressure difference between the nozzle exit and the environment. It is more particular about the difference grid quality, boundary and initial conditions, characterized by essentially increasing calculation time. At the same time, it guarantees qualitative accurate picture of shock-wave structure with acceptable accuracy of the pressure distribution determination along the jet axis.

**Practical significance.** Practical application of recommendations listed in the paper will give the possibility for researchers to avoid gross inaccuracies in the calculation of supersonic gas jets.

**Keywords**

turbulence model, supersonic gas jets.

**Введение. Развитие численных методов расчета сверхзвуковых струй**

Целью настоящего исследования является отработка методики расчета сверхзвуковых газовых струй, содержащих развитые ударно-волновые структуры (УВС), слои смешения, дозвуковые области течения за дисками Маха на оси струи. Проводится сравнение различных моделей турбулентности, получивших распространение в последние 10 лет в коммерческих вычислительных пакетах. Необходимость подобного исследования объясняется тем, что сверхзвуковая струя является сложным объектом для численного моделирования. Применение неподходящей модели турбулентности может приводить к искажению геометрии УВС, например, выгибанию дисков Маха навстречу потоку или вообще исчезновению дисков Маха. Возможны также слишком сильное нефизичное размытие ударных волн слоями смешения, более быстрое нарастание поперечных габаритов струи, а также другие вычислительные погрешности, искажающие картину течения. Часто не удается добиться даже качественного соответствия результатов расчетов и эксперимента, не говоря уже о количественном совпадении.

Рассмотрим кратко историю развития численных методов расчета сверхзвуковых газовых струй.

*Разностное моделирование струйных течений* – основной метод исследования сверхзвуковых газовых струй. Классический этап становления численных методов в газовой динамике приведен в монументальных трудах [1, 2]. Развитие прикладных методов расчета сверхзвуковых струй летательных аппаратов в 70-80-е годы XX века описано ведущими специалистами аэрокосмического комплекса США в сборнике [3]. Отметим также монографию [4], в которой дан обзор классических приближенных и полуэмпирических методов расчета струй идеального газа, служивших в те годы основой инженерных расчетов сопловых устройств ракет и самолетов, а также истекающих из них газовых струй.

В 80-е годы *методы с выделением газодинамических разрывов* являлись основным способом повышения точности расчета, так как широко распространенные методы сквозного счета, основанные на применении разностных схем первого и второго порядка точности, не позволяли качественно верно рассчитывать потоки с развитыми УВС. Значительным шагом вперед в их развитии стала работа А.Л. Адрианова [5], в котором выделение элементов УВС осуществлялось путем точного решения задач нулевого и первого порядка о взаимодействии сильных и слабых газодинамических разрывов. Логическим завершением работ в этом направлении стали методы расчета, основанные на решении задачи Римана о распаде произвольного разрыва на границе расчетных областей [6]. Такие вычисления могут производиться как в рамках модели идеального газа, так и с учетом турбулентных слоев смешения, могут быть точными или приближенными.

Позднее появились *зональные методы расчета*, подразумевающие разбиение всего поля течения на отдельные элементы (зоны) и применение к каждой из них наиболее подходящего алгоритма с последующей стыковкой решений.

Для случаев, когда имеется некоторое выделенное направление, вдоль которого преимущественно изменяются газодинамические переменные, например, это может быть ось симметрии струи или летательного аппарата, наиболее привлекательной является методика расчета на основе *параболитованных уравне-*

ний *Навье–Стокса* (ПУНС). Развитие численных методов расчета струй реального газа с помощью ПУНС можно проследить по работам Дэша в США, направленных на создание рабочей методики расчета факела твердотопливной тактической ракеты. Итоги развития этой технологии представляет работа [7].

*Основные трудности применения численных методов*, даже самых совершенных, основанных на зональном подходе, выделении разрывов и использовании ПУНС, связаны с отслеживанием зарождающихся висячих скачков уплотнения и расчете дозвуковых областей за диском Маха [8, 9]. Серьезные вычислительные трудности и привнесение существенных ошибок в расчеты вызывало явление отражение слабого газодинамического разрыва от оси симметрии [10]. Выход виделся в создании эффективных методов сквозного счета, которые могли бы с помощью универсального алгоритма рассчитывать и дозвуковые области турбулентного смешения, и ударные волны, и сверхзвуковые слои смешения. Это существенно упрощало алгоритм, но предъявляло повышенные требования к моделям турбулентности. Ведь в зональных методах хорошие результаты получались даже с применением простых алгебраических моделей турбулентности, в методах сквозного счета ситуация иная.

Примерно со второй половины 90-х годов прошлого века наметилось новое направление, связанное с совершенствованием моделей турбулентности в направлении повышения рабочего диапазона чисел Рейнольдса, а также учета сжимаемости. Но только в конце первого десятилетия XXI века в данной сфере появились ощутимые успехи.

### Анализ моделей турбулентности

Наиболее подробный обзор современных моделей турбулентности в приложении к расчету реальных воздушно-реактивных двигателей приведен в монографии [11]. Как и в ряде других работ [12], в которых выполнялось тестирование различных моделей турбулентности, рассматривались, главным образом, дозвуковые и трансзвуковые течения. Задачи расчета высокоскоростных турбулентных потоков, содержащих газодинамические разрывы, потребовали разработки как новых разностных схем, устойчивых к осцилляциям на ударных волнах, так и новых вариантов моделей турбулентности. И если первая задача в настоящее время может считаться решенной [13, 14], то совершенствование моделей турбулентности продолжается.

Основой всех моделей с двумя уравнениями является гипотеза Буссинеска о турбулентной (вихревой) вязкости, которая утверждает, что тензор напряжений Рейнольдса пропорционален тензору скоростей деформаций. Это создает проблемы с расчетом сильно вращающихся потоков и течений, где эффекты кривизны линий тока имеют большое значение. При расчете сверхзвуковых струй это приводит к заметным погрешностям в областях за диском Маха, при развороте слоя смешения на кромке сопла и в области взаимодействия отраженного от оси симметрии скачка уплотнения со слоем смешения на границе струи. Погрешности тем заметнее, чем выше перепад давления на срезе сопла и в окружающей среде. Модели турбулентности с двумя дифференциальными уравнениями часто имеют проблемы с расчетом низкоскоростных потоков, например, течений в застойных зонах.

*k-ε*-модель является наиболее распространенной, несмотря на ее недостатки при расчетах в условиях больших градиентов давления [15, 16]. Она включает в себя два уравнения переноса, позволяющих объяснить такие эффекты, как конвекция и диффузия энергии турбулентности. Вариантов *k-ε*-моделей существует огромное количество, наиболее широко распространенной низкорейнольдсовой разновидностью является модель Лаундера–Шарма [17].

Первоначальным толчком к созданию *k-ε*-модели было стремление улучшить алгебраическую модель пути смешения [18]. Существует два различных подхода к определению линейного масштаба при построении подобных функций. В рамках одного подхода в качестве линейного масштаба используется расстояние до стенки, во втором подходе линейный масштаб строится без использования расстояния до стенки на основе турбулентных характеристик течения. В ходе вычислительных экспериментов было выявлено снижение точности для потоков с большими градиентами давления, вследствие чего были сделаны выводы о том, что данную модель предпочтительнее использовать в задачах о расчете внутренних и пристенных течений со средними давлениями [19]. Для использования *k-ε*-модели в расчетах сверхзвуковых течений с ударными волнами в нее стали добавлять поправки на сжимаемость [16].

В работе [20] предложена модель турбулентности *Realizable k-ε*. В ней вводится улучшенный способ расчета турбулентной вязкости, а уравнение для скорости диссипации непосредственно выводится из точного уравнения переноса среднеквадратичного значения пульсационной составляющей вихря скорости.

Термин *Realizable* означает, что модель удовлетворяет математическим ограничениям на нормальные напряжения, согласующимся с физикой турбулентных течений (исключаются отрицательные значения вихревой вязкости при расчете высокоградиентных течений). Это достигается при помощи введения функциональной зависимости коэффициента турбулентной вязкости  $C_\mu$ . По сравнению со стандартной версией, модель *Realizable k-ε* наиболее точно предсказывает распределение скорости диссипации плоских и круглых струй, а также обеспечивает лучшее предсказание характеристик пограничных слоев,

подверженных сильным градиентам давления, отрывных и рециркуляционных течений, а также потоков, в которых существуют развитые вторичные течения.

Как будет видно ниже, модель *Realizable k-ε* позволяет в ряде случаев получать вполне удовлетворительные результаты при расчете сверхзвуковых струй, поэтому имеет смысл привести основные соотношения для этой модели [20].

Уравнения переноса:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho k u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k + P_b - \rho \varepsilon - Y_M + S_k,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \varepsilon u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \rho C_1 S \varepsilon - \rho C_2 \frac{\varepsilon^2}{k + \sqrt{v \varepsilon}} + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} C_{3\varepsilon} P_b + S \varepsilon,$$

где  $\rho$  – плотность;  $u_j$  – компоненты вектора скорости в декартовой системе координат;  $k$  – кинетическая энергия турбулентности;  $\varepsilon$  – скорость диссипации кинетической энергии;  $\mu$  и  $\mu_t$  – ламинарная и турбулентная динамические вязкости;  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\varepsilon$  – турбулентные числа Прандтля для  $k$  и  $\varepsilon$  соответственно:  $\sigma_k = 1,0$ ;  $\sigma_\varepsilon = 1,2$ .

$C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_{1\varepsilon}$ ,  $C_{3\varepsilon}$  – константы модели турбулентности:

$$C_{1\varepsilon} = 1,44; C_2 = 1,9; C_1 = \max \left[ 0,43 \frac{\eta}{\eta + 5} \right], \quad \eta = S \frac{k}{\varepsilon},$$

где  $S$  – модуль средней величины тензора скоростей деформаций,  $S \equiv \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}}$ .

$P_k$  представляет порождение турбулентной кинетической энергии благодаря средним градиентам скорости, посчитанным тем же путем, как и в стандартной  $k$ - $\varepsilon$ -модели:

$$P_k = -\overline{\rho u'_i u'_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}; \quad P_k = \mu_t S^2.$$

$P_b$  описывает формирование турбулентной кинетической энергии за счет плавучести, посчитанной тем же путем, что и в стандартной  $k$ - $\varepsilon$ -модели:

$$P_b = \beta g_i \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial T}{\partial x_i},$$

где  $Pr_t$  – турбулентное число Прандтля для энергии и  $g_i$  – компонент вектора гравитации в  $i$ -ом направлении. Для стандартной и осуществимой модели стандартная величина  $Pr_t = 85$ .

$$\text{Коэффициент теплового расширения: } \beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p.$$

$Y_M$  представляет собой вклад дилатационной составляющей в общую скорость диссипации энергии турбулентности.

$$\text{Турбулентная вязкость } \mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \text{ где } C_\mu = \frac{1}{A_0 + A_s \frac{kU^*}{\varepsilon}}; \quad U^* \equiv \sqrt{S_{ij} S_{ij} + \tilde{\Omega}_{ij} \tilde{\Omega}_{ij}} \frac{n!}{r!(n-r)!};$$

$\tilde{\Omega}_{ij} = \Omega_{ij} - 2\varepsilon_{ijk} \omega_k$ ;  $\tilde{\Omega}_{ij}$  – среднее арифметическое тензора скоростей вращения, рассматриваемого в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью  $\omega_k$ . Константы модели  $A_0$  и  $A_s$ :  $A_0 = 4,04$ ,  $A_s = \sqrt{6} \cos \varphi$ .

$$\varphi = \frac{1}{3} \cos^{-1}(\sqrt{6}W), \quad W = \frac{S_{ij} S_{jk} S_{ki}}{\tilde{S}^3}, \quad \tilde{S} = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right).$$

*RNG k-ε*-модель была разработана с использованием методов Re-Normalisation Group (RNG) Яхотом и др. [21]. В стандартной  $k$ - $\varepsilon$ -модели турбулентная вязкость определяется из единственного характерного линейного масштаба турбулентности, поэтому расчетная турбулентная диффузия отражает только то, что происходит в указанном масштабе, тогда как в реальности, все масштабы движения будут способствовать турбулентной диффузии. *RNG k-ε*-модель учитывает весь спектр турбулентных пульсаций. Хотя техника получения *RNG*-уравнений казалась революционной на момент создания, ее использование было довольно ограниченным. Некоторые исследователи заявляли, что модель *RNG k-ε* дает большую точность во вращающихся потоках. Однако в этом отношении имели место противоречивые результаты. Метод показывал более высокую точность при моделировании вращающихся полостей, но не показывал никаких преимуществ перед стандартным методом при расчете эволюции вихрей.

$k$ - $\omega$ -модель турбулентности [19] похожа на  $k$ - $\epsilon$ , однако в ней вместо уравнения скорости диссипации используется уравнение для удельной скорости диссипации. Поскольку  $k$ - $\omega$ -модель позволяет моделировать турбулентность разного масштаба, то она нашла применение в таких областях, как расчеты течений, в которых существенным является пограничный слой. Например, турбомшины и внешнее обтекание летательных аппаратов. К примеру, компания General Electric использует ее при разработке авиадвигателей, которые активно применяются в Airbus. Данная модель хорошо описывает пристенные течения, не имея проблем с градиентом давления. Однако при расчете сверхзвуковых струйных течений имеются определенные трудности. Основная из них состоит в чрезвычайной чувствительности данной модели к граничным условиям во внешнем потоке.

Турбулентная  $k$ - $\omega$  SST-модель (Shear Stress Transport) была введена Ментером (Menter, 1993 [22]) и сразу приобрела большую популярность. Эта модель, по сути, является объединением двух разных моделей ( $k$ - $\epsilon$  вдали от стенок и  $k$ - $\omega$  вблизи). Использование  $k$ - $\omega$ -модели во внутренних частях пограничного слоя позволяет использовать SST-модель напрямую, вплоть до стены через вязкий подслой.  $k$ - $\omega$ -модель SST с успехом применяется и для расчета сверхзвуковых струйных течений. В свободном турбулентном потоке модель Ментера ведет себя как  $k$ - $\epsilon$ , тем самым избегая обычной проблемы  $k$ - $\omega$ -модели, заключающейся в том, что она слишком чувствительна к начальным условиям турбулентного потока. В турбулентных слоях смещения  $k$ - $\omega$ -модель SST при средних градиентах давления ведет себя как комбинация  $k$ - $\omega$  (в дозвуковых областях слоя) и  $k$ - $\epsilon$  (в сверхзвуковых областях). При больших нормальных напряжениях, например, в застойных течениях и при движении газа с высокими ускорениями, стандартная SST  $k$ - $\omega$ -модель генерирует слишком большие уровни турбулентности. Тем не менее, эта тенденция значительно слабее, чем в нормальной  $k$ - $\epsilon$ -модели. Стандартная SST  $k$ - $\omega$ -модель успешно используется при расчете взаимодействия скачков уплотнения с пограничными слоями и турбулентными слоями смещения [23].

Transition SST-модель [24] представляет собой дальнейшее усовершенствование стандартной SST-модели в направлении более точного описания турбулентности за счет введения дополнительных уравнений переноса, одного – для перемежаемости, а другого – для скоростного напора, посчитанного для толщины потери импульса. Поскольку данная модель показала хорошие результаты при расчете сверхзвуковых струй, ниже приведены основные соотношения для стандартной SST-модели, а также версии transition SST-модели [23, 24].

Кинематическая турбулентная вязкость:

$$\nu_T = \frac{\alpha_1 k}{\max(\alpha_1 \omega, SF_2)}$$

Уравнение переноса кинетической энергии турбулентности  $k$ :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P_k - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v + \sigma_k \nu_T) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]$$

Уравнение переноса удельной скорости диссипации  $\omega$ :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \alpha S^2 - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v + \sigma_\omega \nu_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2(1 - F_1) \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}$$

Дополнительные соотношения и константы:

$$F_2 = \tanh \left[ \left[ \max \left( \frac{2\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right) \right]^2 \right], \quad P_k = \min \left( \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, 10\beta^* k \omega \right),$$

$$F_1 = \tanh \left\{ \left\{ \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right), \frac{4\sigma_{\omega 2} k}{CD_{kw} y^2} \right] \right\}^4 \right\}, \quad CD_{kw} = \max \left( 2\rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}, 10^{-10} \right),$$

$$\alpha_1 = \frac{5}{9}, \quad \alpha_2 = 0,44, \quad \beta_1 = \frac{3}{40}, \quad \beta_2 = 0,0828, \quad \beta^* = \frac{9}{100},$$

$$\sigma_{k1} = 0,85, \quad \sigma_{k2} = 1, \quad \sigma_{\omega 1} = 0,5, \quad \sigma_{\omega 2} = 0,856.$$

$\nu$  – кинематическая вязкость;  $\tau_{ij}$  – тензор вязких сдвиговых напряжений;  $U_j$  – местная скорость потока;  $\omega$  – удельная скорость диссипации турбулентности.

Уравнение переноса для перемежаемости в transition SST-модели имеет вид

$$\frac{\partial(\rho y)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j y)}{\partial x_j} = P_{y1} - E_{y1} + P_{y2} - E_{y2} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_y} \right) \frac{\partial y}{\partial x_j} \right].$$

Уравнение переноса для критериев напора в терминах числа Рейнольдса, посчитанного для момента толщины потери импульса:

$$\frac{\partial(\rho \text{Re}_{\theta r})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j \text{Re}_{\theta r})}{\partial x_j} = P_{\theta r} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \sigma_{\theta r} (\mu + \mu_t) \frac{\partial \text{Re}_{\theta r}}{\partial x_j} \right],$$

где  $\text{Re}_{\theta r}$  – переходное число Рейнольдса по толщине потери импульса (посчитанное на основе набегающего потока);  $P_{\theta r}$  – источникный член.

### Результаты сравнения моделей турбулентности

При моделировании сверхзвуковых струй погрешность применения моделей турбулентности зависит от степени нерасчетности струи (отношение статического давления на срезе сопла к статическому давлению в окружающей среде).

Ниже представлены результаты систематического тестирования *Realizable k-ε*, *RNG k-ε*, стандартной *SST k-ω*-модели, *Scale-Adaptive Simulation (SAS)* и *transition SST k-ω*-модели при расчете сверхзвуковых струйных течений. Исследования выполнены с использованием открытого условно бесплатного пакета OpenFOAM (<http://www.openfoam.com>).

В качестве тестовых вариантов для расчета выбраны два предельных случая. Первый – расчет слабо недорасширенной струи, которая имеет периодическую УВС с множеством бочкообразных ячеек. Скачки уплотнения многократно отражаются от оси симметрии и постепенно затухают в нарастающих с удалением от среза сопла слоях смешения.

Второй – расчет сильно недорасширенной струи с одной бочкообразной ячейкой. Для таких струй характерен быстрый переход к турбулентному течению, большая кривизна линий тока начального участка, наличие рециркуляционного течения за диском Маха.

Как показали расчеты, наилучшие результаты для слабо недорасширенных струй показывает *Realizable k-ε*-модель (рис. 1). Контроль погрешности применения исследуемых моделей осуществлялся по распределению давления на оси.

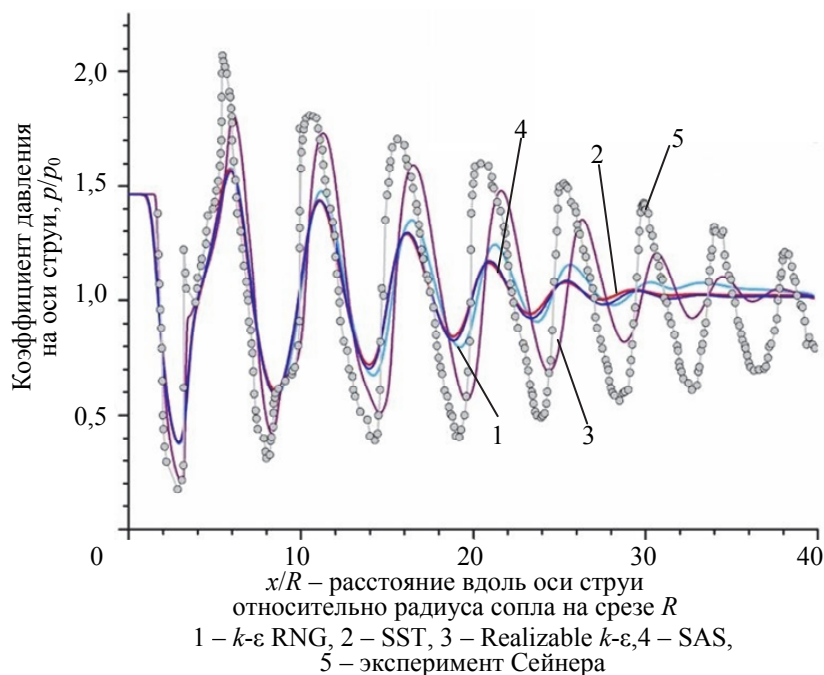


Рис. 1. Сравнение результатов расчета распределения относительного статического давления на оси симметрии струи, истекающей из профилированного сопла с числом Маха на срезе  $M_a=2$ , степенью нерасчетности  $n=1,445$ , с экспериментом Сейнера [25]

УВС слабо нерасчетной струи определяется в основном характеристиками слоя смешения на ее границе, который лучше всего описывает *Realizable k-ε*-модель. Влияние же областей отражения скачков уплотнения от оси симметрии, в которых проявляются недостатки *Realizable k-ε*-модели, существенно меньше. Наоборот, стандартная *SST k-ω*-модель завышает уровни турбулентности в областях взаимодействия скачков уплотнения со слоем смешения на границе струи, что приводит к более быстрому размыванию УВС по сравнению с экспериментом.

Все модели турбулентности дают большую длину бочкообразных ячеек струи, чем это наблюдается в эксперименте, что проявляется на рис. 1 смещением пиков давления вправо. Такое явление объясняется занижением величины кривизны отраженного от слоя смешения скачка, что является следствием лежащей в основе всех исследованных моделей турбулентности гипотезы Буссинеска.



Для тестирования моделей турбулентности при расчете сильно нерасчетных струй выбрано звуковое сопло большого диаметра, чтобы свести к минимуму влияние сопловых скачков уплотнения и пограничного слоя на стенках сопла. В данном случае скачки уплотнения отражаются от оси струи с образованием тройных точек и дисков Маха, течение за которыми – дозвуковое и сильно завихренное. Течение в окрестности тройной точки отличается большими градиентами давления, уровнями турбулентности и завихренности.

Наилучшие качества при расчете такого рода течений демонстрирует *transition SST*-модель (рис. 2, а).

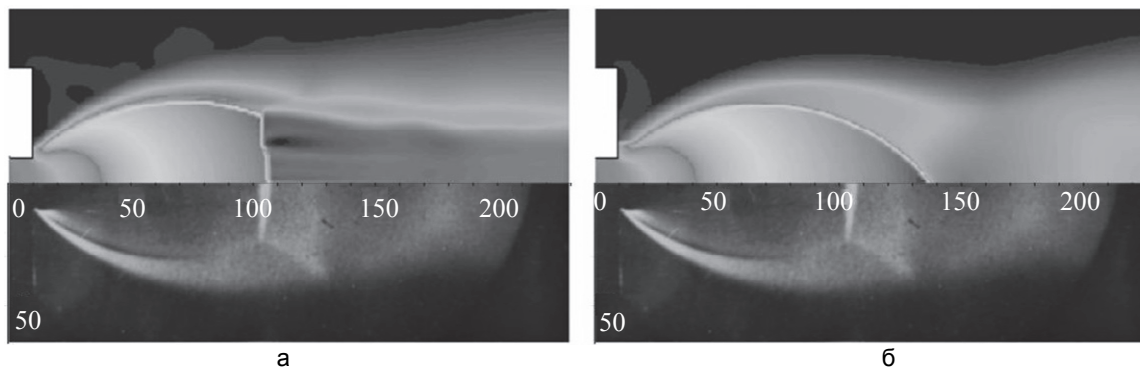


Рис. 2. Сравнение результатов расчета недорасширенной струи с нерасчетностью  $n=24$ , истекающей из сопла с числом Маха на срезе  $M_a=1$ : *transition SST*-модель (а); *Realizable k-ε*-модель (б) (шкала приведена в мм)

Применение модели турбулентности *Realizable k-ε*, напротив, приводит к неудовлетворительным результатам (рис. 2, б). Свойственная данной модели процедура ограничения турбулентной вязкости при помощи введения полуэмпирической функциональной зависимости для коэффициента турбулентной вязкости  $C_\mu$  приводит к нарушению дифференциальных условий динамической совместности на скачках уплотнения в тройной точке. В результате образование диска Маха затягивается, а его размеры оказываются намного меньше экспериментально наблюдаемых.

Применение остальных моделей приводит к промежуточным результатам, поэтому здесь они не рассматриваются.

### Заключение

В работе проведено исследование применимости двухпараметрических дифференциальных моделей турбулентности для расчета сверхзвуковых газовых струй. Тестирование показало, что наилучшие результаты при расчетах слабо нерасчетных сверхзвуковых газовых струй дает модель *Realizable k-ε*, а сильно нерасчетных – *transition SST*-модель турбулентности.

Первая модель при небольшом перепаде давления на срезе сопла и в окружающей среде обеспечивает получение надежных данных о распределении давления по оси струи, донном давлении, распределении давления по стенкам сопла и эжектора. Хорошую точность удастся получить на достаточно грубой сетке без применения каких-либо специальных приемов и ухищрений.

*Transition SST*-модель турбулентности более требовательная к разностной сетке, граничным и начальным условиям, требует существенно большего времени счета. Зато она гарантированно позволяет получить качественно верную картину ударно-волновой структуры струи при приемлемой точности определения распределения давления по оси струи.

### Литература

1. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. В 2-х т. М.: Мир, 1991.
2. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Флетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х т. М.: Мир, 1990.
3. Аэродинамика ракет: В 2-х кн. Кн. 2. Методы аэродинамического расчета / Под ред. М. Хемша, Дж. Нилсена. М.: Мир, 1989. 512 с.
4. Авдеевский В.С., Ашратов Э.А., Иванов А.В., Пирумов У.Г. Газодинамика сверхзвуковых неизобарических струй. М.: Машиностроение, 1989. 320 с.
5. Адрианов А.Л. Метод численного моделирования двумерных стационарных течений с выделением разрывов на несогласованной сетке. Красноярск: ВЦ СО АН СССР, 1987. 96 с.
6. Булат П.В., Волков К.Н., Сильников М.В., Чернышев М.В. Анализ разностных схем, основанных на точном и приближенном решении задачи Римана // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2015. Т. 15. № 1. С. 139–148.

7. Sinha N., Dash S.M. Parabolized Navier-Stokes analysis of ducted supersonic combustion problems // Journal of Propulsion and Power. 1987. V. 3. N 5. P. 455–464.
8. Усков В.Н., Булат П.В., Продан Н.В. Обоснование применения модели стационарной маховской конфигурации к расчету диска маха в сверхзвуковой струе // Фундаментальные исследования. 2012. № 11–1. С. 168–175.
9. Усков В.Н., Булат П.В., Продан Н.В. История изучения нерегулярного отражения скачка уплотнения от оси симметрии сверхзвуковой струи с образованием диска маха // Фундаментальные исследования. 2012. № 9–2. С. 414–420.
10. Bulat P.V. Reflection of a weak discontinuity of the axis and the plane of symmetry // American Journal of Applied Sciences. 2014. V. 11. N 6. P. 1025–1030. doi: 10.3844/ajassp.2014.1025.1030
11. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Течение и теплообмен в каналах и вращающихся полостях. М.: Физматлит, 2010. 480 с.
12. Исаев С.А., Баранов П.А., Кудрявцев Н.А., Лысенко Д.А., Усачов А.Е. Комплексный анализ моделей турбулентности, алгоритмов и сеточных структур при расчете циркуляционного течения в каверне с помощью пакетов программ VP2/3 и FLUENT. Ч. 1. Влияние схемных факторов // Теплофизика и аэромеханика. 2005. Т. 12. № 4. С. 587–608.
13. Волков К.Н. Применение и реализация разностных схем высокой разрешающей способности для решения задач газовой динамики на неструктурированных сетках // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2014. № 6 (94). С. 153–162.
14. Волков К.Н. Многосеточный метод ускорения сходимости при решении задач газовой динамики на неструктурированных сетках // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2014. № 4 (92). С. 156–163.
15. Глушко Г.С., Иванов И.Э., Крюков И.А. Расчет сверхзвуковых турбулентных течений. Препринт №793. М.: ИПМ РАН, 2006. 36 с.
16. Глушко Г.С., Иванов И.Э., Крюков И.А. Моделирование турбулентности в сверхзвуковых струйных течениях // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2010. №1. С. 164–171.
17. Launder B.E., Sharma B.I. Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc // Letters in Heat and Mass Transfer. 1974. V. 1. N 2. P. 131–137. doi: 10.1016/0094-4548(74)90150-7
18. Wilcox D.C. Turbulence Modeling for CFD. Anaheim: DCW Industries, 1994. 460 p.
19. Wilcox D.C. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models // AIAA Journal. 1988. V. 26. N 11. P. 1299–1310.
20. Shih T.-H., Liou W.W., Shabbir A., Yang Z., Zhu J.A. New  $k-\varepsilon$  eddy viscosity model for high Reynolds number turbulent flows // Computers Fluids. 1995. V. 24. N 3. P. 227–238. doi: 10.1016/0045-7930(94)00032-T
21. Yakhot V., Orszag S.A., Thangam S., Gatski T.B., Speziale C.G. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique // Physics of Fluids A. 1992. V. 4. N 7. P. 1510–1520.
22. Menter F.R. Zonal two equation  $k-\omega$  turbulence models for aerodynamic flows // Proc. 24<sup>th</sup> Fluid Dynamics Conference. Florida, 1993. P. 1993–2906.
23. Ершов С.В., Поливанов П.А., Сидоренко А.А., Деревянко А.И. Численное решение задачи о взаимодействии скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем // Проблемы машиностроения. 2010. Т. 13. № 2. С. 16–23.
24. Menter F.R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA Journal. 1994. V. 32. N 8. P. 1598–1605.
25. Seiner J.M., Dash S.M. Wolf D.E. Analysis of turbulent underexpanded jets. Part II: Shock noise features using SCIPVIS // AIAA Journal. 1985. V. 23. N 5. P. 669–677.

<i>Ильина Екатерина Евгеньевна</i>	– аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Иl-190.89@mail.ru
<i>Ильина Тамара Евгеньевна</i>	– аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Tamara-190@yandex.ru
<i>Денисенко Петр Валерьевич</i>	– PhD, научный сотрудник, Уорикский университет, Ковентри, CV4 7AL, Великобритания, P.Denissenko@warwick.ac.uk
<i>Ekaterina E. Il'ina</i>	– postgraduate, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Иl-190.89@mail.ru
<i>Tamara E. Il'ina</i>	– postgraduate, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Tamara-190@yandex.ru
<i>Petr V. Denissenko</i>	– PhD, researcher, University of Warwick, Coventry, CV4 7AL, UK, P.Denissenko@warwick.ac.uk