



УДК 532.529

ОДНОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ И ИХ РЕШЕНИЕ ПРИ ПОМОЩИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ВЫСОКОЙ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ

П.В. Булат^а, К.Н. Волков^б^а Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация^б Университет Кингстона, Лондон, SW15 3DW, Великобритания

Адрес для переписки: pavelbulat@mail.ru

Информация о статье

Поступила в редакцию 30.04.15, принята к печати 26.05.15

doi:10.17586/2226-1494-2015-15-4-731-740

Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Булат П.В., Волков К.Н. Одномерные задачи газовой динамики и их решение при помощи разностных схем высокой разрешающей способности // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2015. Т. 15. № 4. С. 731–740.**Аннотация**

Одномерные задачи нестационарной газовой динамики являются показательными тестами для оценки точности численного решения при моделировании сверхзвуковых течений идеального сжимаемого газа. Рассматривается численное решение уравнений Эйлера, описывающих течения невязкого сжимаемого газа и допускающих гладкие и разрывные решения. Дискретизация уравнений Эйлера проводится при помощи метода конечных объемов и разностных схем WENO-типа. Полученные численные решения сравниваются с точными решениями задачи о распаде разрыва. Монотонизирующая коррекция производных предотвращает образование новых экстремумов и обеспечивает монотонность численного решения в окрестности разрыва, но приводит к сглаживанию существующих минимумов и максимумов и к потере точности. Расчеты с использованием схем WENO позволяют получить точное и монотонное решение задачи как при наличии слабых, так и сильных газодинамических разрывов.

Ключевые слова

газовая динамика, разностная схема, ударная волна, волна разрежения, контактный разрыв, задача Римана, задача Сода, задача Лакса.

ONE-DIMENSIONAL GAS DYNAMICS PROBLEMS AND THEIR SOLUTION BASED ON HIGH-RESOLUTION FINITE DIFFERENCE SCHEMES

P.V. Bulat^а, K.N. Volkov^б^а ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation^б Kingston University, London, SW15 3DW, UK

Corresponding author: pavelbulat@mail.ru

Article info

Received 30.04.15, accepted 26.05.15

doi:10.17586/2226-1494-2015-15-4-731-740

Article in Russian

For citation: Bulat P.V., Volkov K.N. One-dimensional gas dynamics problems and their solution based on high-resolution finite difference schemes. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2015, vol.15, no. 4, pp. 731–740.**Abstract**

One-dimensional unsteady gas dynamics problems are revealing tests for the accuracy estimation of numerical solution with respect to simulation of supersonic flows of inviscid compressible gas. Numerical solution of Euler equations describing flows of inviscid compressible gas and conceding continuous and discontinuous solutions is considered. Discretization of Euler equations is based on finite volume method and WENO finite difference schemes. The numerical solutions computed are compared with the exact solution of Riemann problem. Monotonic correction of derivatives makes possible avoiding new extremes and ensures monotonicity of the numerical solution near the discontinuity, but it leads to the smoothness of the existing minimums and maximums and to the accuracy loss. Calculations with the use of WENO schemes give the possibility for obtaining accurate and monotonic solution with the presence of weak and strong gas dynamical discontinuities.

Keywords

gas dynamics, finite difference scheme, shock wave, rarefaction wave, contact discontinuity, Riemann problem, Sod problem, Lax problem.

Введение

Одна из особенностей задач газовой динамики связана с возможностью образования разрывов решения (образование разрывов возможно и в том случае, когда начальные данные представляют собой гладкие функции), что накладывает на используемые разностные схемы специфические требования. Эффективность того или иного численного метода зависит от того, каким образом организуется расчет скачков уплотнения и волн разрежения.

Применение к расчету течений с газодинамическими разрывами центрально-разностных методов (например, схемы Лакса–Вендроффа) приводит к появлению осцилляций решения вблизи фронта ударной волны, которые распространяются по всей расчетной области, вызывая неустойчивость численного решения (такие дефекты сходимости известны в математике как явление Гиббса, возникающее при разложении в ряд Фурье разрывной функции). Данная проблема возникает и при дискретизации конвективных членов в уравнениях Навье–Стокса при достаточно высоких числах Рейнольдса, когда невозможно разрешение внутренней структуры ударной волны (получение гладкого решения, которое определяется физической вязкостью). Для обеспечения устойчивости численного решения вводится искусственная вязкость, что требует подбора диссипативных членов для подавления нефизических осцилляций решения. Для преодоления недостатков разностных схем с искусственной вязкостью (сильное размазывание зоны перехода, немонотонность численного решения) используются разностные схемы высокого порядка аппроксимации. Среди таких схем широкое распространение получили схемы с многоточечными шаблонами, компактные разностные схемы, схемы, полученные с использованием различных форм дифференциальных уравнений и их следствий [1, 2].

Схемы TVD (Total Variation Diminishing), в основу которых положен принцип невозрастания полной вариации решения, лишены этого недостатка. Способ получения схем высокого порядка аппроксимации состоит во введении антидиффузионных потоков и нелинейных ограничителей потоков, обеспечивающих выполнение условия TVD. Схемы TVD не приводят к образованию нефизических осцилляций решения в областях разрывов искомых функций. При этом повышенный порядок аппроксимации достигается на гладких функциях, а на газодинамических разрывах порядок аппроксимации снижается до первого. Решение ряда тестовых задач газовой динамики при помощи схем TVD-типа приводится в работе [3].

Появление ENO (Essentially Non-Oscillatory) и WENO (Weighted ENO) разностных схем привело к значительному улучшению качества численных решений по сравнению с классическими разностными методами фиксированного порядка точности [4]. Практическое использование ENO- и WENO-схем высокого порядка точности и их внедрение в существующие программные коды сопряжено с определенными сложностями. Реализация ENO- и WENO-схем требует значительных вычислительных затрат, что обусловлено перебором шаблонов и выбором наиболее гладкого из них. Поскольку условие невозрастания вариации решения строго не соблюдается, в решении зачастую возникают нефизические эффекты.

Модельные задачи играют роль испытательного полигона для проверки новых методологических концепций и оценки точности результатов, полученных с помощью сконструированных на их основе программных средств. Набор тестовых задач служит для проверки корректности работы проекционно-эволюционных методов.

Подробное изложение основных проблем использования TVD-подхода для построения разностных схем газовой динамики дается в работах [1, 2], а ENO- и WENO-схем – в работе [4]. Несмотря на многочисленные примеры использования ENO- и WENO-схем [5–11], вопросы их практического использования и тестирования на модельных задачах газовой динамики остаются недостаточно освещенными.

Тестирование численных методов проводится на задачах распада произвольного разрыва различной конфигурации. Рассматриваемые задачи имеют аналитические решения и являются стандартными тестами, которым подвергается любой новый численный метод. Для проекционно-эволюционных методов, к которым принадлежит метод WENO-типа, такой выбор тестовых задач позволяет осуществить полное тестирование численного метода (шаг реконструкции, шаг эволюции). Результаты расчетов позволяют судить о монотонности и точности численного решения, наличии численной диффузии и фазовых ошибок, нефизических осцилляций и сглаживании решения в областях резких градиентов параметров.

Распад произвольного разрыва

Задача о распаде произвольного разрыва (задача Римана, Riemann problem) состоит в нахождении решения интегральных законов сохранения массы, количества движения и энергии на бесконечном промежутке $-\infty < x < +\infty$ при специальных начальных условиях, характеризующихся постоянным состоянием в полуплоскости $-\infty < x < x_0$ и постоянным состоянием в полуплоскости $x_0 < x < +\infty$. Кусочно-постоянные начальные условия для уравнений Эйлера имеют следующий вид: $\mathbf{U}(0, x) = \mathbf{U}_L$ при $x < x_0$ и $\mathbf{U}(0, x) = \mathbf{U}_R$ при $x > x_0$, где $\mathbf{U} = \{\rho, u, p\}$ представляет собой вектор физических переменных, где ρ – плотность, u – скорость, p – давление. Индексы L и R соответствуют начальному состоянию потока слева и справа от разрыва в точке

x_0 . Мембрана, расположенная в точке $x=x_0$, разделяет два газа, находящихся при разных давлениях и имеющих различные плотности и скорости. Параметры слева и справа от разрыва являются произвольными и подчиняются лишь уравнению состояния. В общем случае используются различные уравнения состояния для газов слева и справа от разделительной перегородки.

В точке $x=x_0$, соответствующей положению разделительной перегородки, имеет место разрыв газодинамических параметров. В момент времени $t=0$ перегородка мгновенно убирается, и произвольный разрыв распадается на несколько разрывов. В зависимости от начальных условий образуется та или иная конфигурация устойчивых разрывов и непрерывных газодинамических течений [1, 2, 12]. Возможные решения содержат веер волн разрежения, контактный разрыв и ударную волну, разделяющие область течения на четыре подобласти с постоянными значениями параметров. В конфигурации А возникает ударная волна, контактный разрыв и веер волн разрежения, в конфигурации В – две ударные волны и контактный разрыв, в конфигурации С – две волны разрежения и контактный разрыв. Условно волны называют левой и правой волной (в неподвижной системе координат они могут двигаться в одну сторону). В случае ударной волны речь идет о движущемся фронте разрыва, по обе стороны которого параметры газа полагаются постоянными (своими для каждой из сторон) и связанными определенными соотношениями. В случае волны разрежения имеется область переменного течения, в которой параметры газа остаются постоянными вдоль прямолинейных лучей, играющих роль характеристик системы уравнений, а значения параметров зависят от наклона в веере характеристик, описывающем волну разрежения. Волна разрежения граничит с областями постоянного течения, подобным тем, которые имеют место для ударной волны.

Решение задачи Римана является автомодельным в поле характеристик. Точное решение задачи о распаде произвольного разрыва сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений, полученных из законов сохранения, и детально рассматривается во многих работах, например, в [1, 2, 12]. Нахождение решения задачи Римана лежит в основе численного решения гиперболических уравнений в частных производных, а также применяется для проверки схем расчета потоков.

Существуют различные подходы к численному решению задачи о распаде произвольного разрыва. К первому классу относятся центрально-разностные методы в консервативных переменных, реализуемые путем простой конечно-объемной записи и вычисления потоков через грани контрольных объемов (схема Лакса–Вендроффа, схема Лакса–Фридрихса и др.). Такие методы фактически не решают задачи Римана и имеют значительную диссипацию, в связи с чем практически не используются. Ко второму классу относится метод Годунова, который находит точное решение задачи Римана на основе постоянства функций в векторе начальных условий по линиям характеристик. После вычисления потоков через грани контрольных объемов находятся искомые функции в векторе решения. К третьему классу относятся методы приближенного решения, к которым принадлежат методы Roe, HLL, HLLC и др. К четвертому классу относятся методы, которые решают задачу на основе итерационной процедуры, строящейся из методов первого класса. Для записи потоков используются схемы Лакса–Вендроффа и Лакса–Фридрихса. В отличие от методов первого класса, итерационная процедура позволяет найти решение задачи Римана с раскрытием всего веера характеристик.

Обзор задач

Реальные течения характеризуются широким диапазоном изменения плотности, скорости и давления. При этом особенности течения обычно проявляются через отношения параметров, в связи с чем в тестовых задачах газовой динамики используются такие значения параметров, которые оказываются близкими к единице и легко представляются в вычислительной модели. Рабочей средой является некоторый вычислительный газ, представляющий собой совершенный газ с отношением удельных теплоемкостей, равным $\gamma=1,4$. В расчетах температуры полагается, что газовая постоянная равняется единице. Вычислительная энтропия пропорциональна физической энтропии и определяется как $s=\ln(p/\rho^\gamma)$. Начальные условия представляют собой разрыв в точке $x=x_0$. Уравнения Эйлера дискретизируются при помощи метода конечных объемов. Для расчетов невязких потоков используется схема WENO-3 с расщеплением потоков по Roe. Интегрирование по времени осуществляется при помощи трехшагового метода Рунге–Кутты.

Формулировку ряда тестовых задач нестационарной одномерной газовой динамики поясняет табл. 1. Численное решение задачи о распаде разрыва ищется на промежутке $[0,1]$. Разделительная перегородка располагается в точке $x_0=0,5$. Начальные условия задаются в физических переменных. На границах расчетного интервала используются условия зеркального отражения. Расчетная сетка является равномерной по координате x и содержит 101 узел. Числу Куранта присваивается значение 0,4. Контрольное время счета выбирается таким образом, чтобы возникающие при решении волны не успевали выйти за границы расчетной области, что упрощает реализацию условий в граничных ячейках. Полученные распределения плотности, скорости и давления сравниваются с точными и приближенными решениями, а также с численными данными, приведенными в работах [13, 14].

Задача	Левое состояние			Правое состояние			Время
	ρ	u	p	ρ	u	p	
1	1	0	1	0,125	0	0,1	0,15
2	0,445	0,698	3,528	0,5	0	0,571	0,15
3	1	0	1	0,02	0	0,02	0,15
4	3,857	0,920	10,333	1	3,55	1	0,09
5	1	0	0,5	0,5	0	0,5	0,42
6	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,43
7	1	-1	1	0,9275	-1,0781	0,9	0,18
8	1	0	1000	1	0	0,01	0,012
9	10	2000	500	20	0	500	0,012
10	1	-2	0,4	1	2	0,4	0,15

Таблица 1. Тестовые задачи одномерной газовой динамики

Несмотря на простоту постановки, тестовые задачи, приведенные в табл. 1, отражают основные особенности нестационарных газодинамических течений, поскольку в области течения формируются различные конфигурации разрывов.

В задаче о течении в ударной трубе (тест 1), сформулированной в работе [15] (задача Сода, Sod problem), газ слева и справа от разделительной перегородки в начальный момент времени покоится. Решение задачи Сода состоит из ударной волны, движущейся в область низкого давления, веера волн разрежения, расширяющегося в область высокого давления, и контактного разрыва (конфигурация А).

Другая задача о течении в ударной трубе (тест 2) формулируется в работе [16] (задача Лакса, Lax problem), в которой, как и в задаче Сода, образуется ударная волна, веер волн разрежения и контактный разрыв (конфигурация А). По сравнению с задачей Сода задача Лакса характеризуется меньшей интенсивностью волны разрежения и большими перепадами параметров на контактном разрыве и ударной волне.

В задачах Сода и Лакса (тесты 1 и 2) течение в ударной трубе остается дозвуковым. Дополнительные численные трудности возникают в случае сверхзвукового течения, которое реализуется в задаче о течении в сверхзвуковой ударной трубе (тест 3, supersonic shock tube) и в задаче о распространении волны с числом Маха, равным 3 (тест 4, Mach 3 problem) [17]. Конфигурация, соответствующая задаче 4, состоит из контактного разрыва и двух волн разрежения (конфигурация С).

В задаче о стационарном контактном разрыве (тест 5, stationary contact discontinuity) и в задаче о распространении медленного контактного разрыва (тест 6, slowly moving contact discontinuity) начальные условия задаются таким образом, чтобы образующийся контактный разрыв не распался и оставался неподвижным (тест 5) или двигался с небольшой скоростью (тест 6). Таким же образом задаются начальные условия в задаче о медленно движущейся слабой ударной волне (тест 7, slowly moving weak shock) [2].

Задача о сильной ударной волне (тест 8, strong shock) и задача о течении с высоким числом Маха (тест 9, high Mach) используются для проверки точности и устойчивости вычислительных алгоритмов, предназначенных для расчетов течений с сильными разрывами и значительными перепадами газодинамических параметров [18]. В частности, в задаче 7 перепад давлений составляет 10^4 , а число Маха достигает 198. В результате распада произвольного разрыва влево распространяется веер волн разрежения, а вправо – контактный разрыв и сильная ударная волна. В реальных течениях при таких перепадах давления обычно используется уравнение состояния, отличное от уравнения состояния совершенного газа.

В задаче 10, предложенной в работе [19] (задача 123 или задача Эйнфельдта, Einfeldt problem), возникает два симметричных веера волн разрежения, распространяющихся в противоположные стороны, и неподвижный контактный разрыв (конфигурация В). В центре между разбегающимися потоками газа плотность газа и давление принимают малые значения, близкие к вакууму, но внутренняя энергия к нулю не стремится. Задача находит применение для тестирования вычислительных алгоритмов, предназначенных для моделирования течений с малой плотностью [20].

Преимущества схем высокого порядка точности становятся заметными при рассмотрении профилей контактного разрыва и ударной волны, которые размываются из-за большой численной вязкости в схемах низкого порядка. Имеет место немонотонность численных профилей, полученных при помощи схем низкого порядка, которая проявляется вблизи разрывов. С другой стороны, профили плотности и давления, полученные на основе схем высокого порядка, являются монотонными.

Решения тестовых задач

Критериями качества численного метода служат точность описания фронта ударной волны и отсутствие нефизических осцилляций решения. Распределения плотности (ρ), скорости (u), давления (p), числа Маха (M), энтропии (s) и энтальпии (h) сравниваются с точным решением.

Задача Сода (тест 1) позволяет проверить отсутствие нефизических осцилляций решения в расчетах движущихся ударных волн и контактного разрыва, а также корректность воспроизведения профиля плотности. Распределения параметров течения в момент времени $t=0,2$ показывает рис. 1. В результате распада произвольного разрыва влево распространяется волна разрежения, а вправо – ударная волна и контактный разрыв.

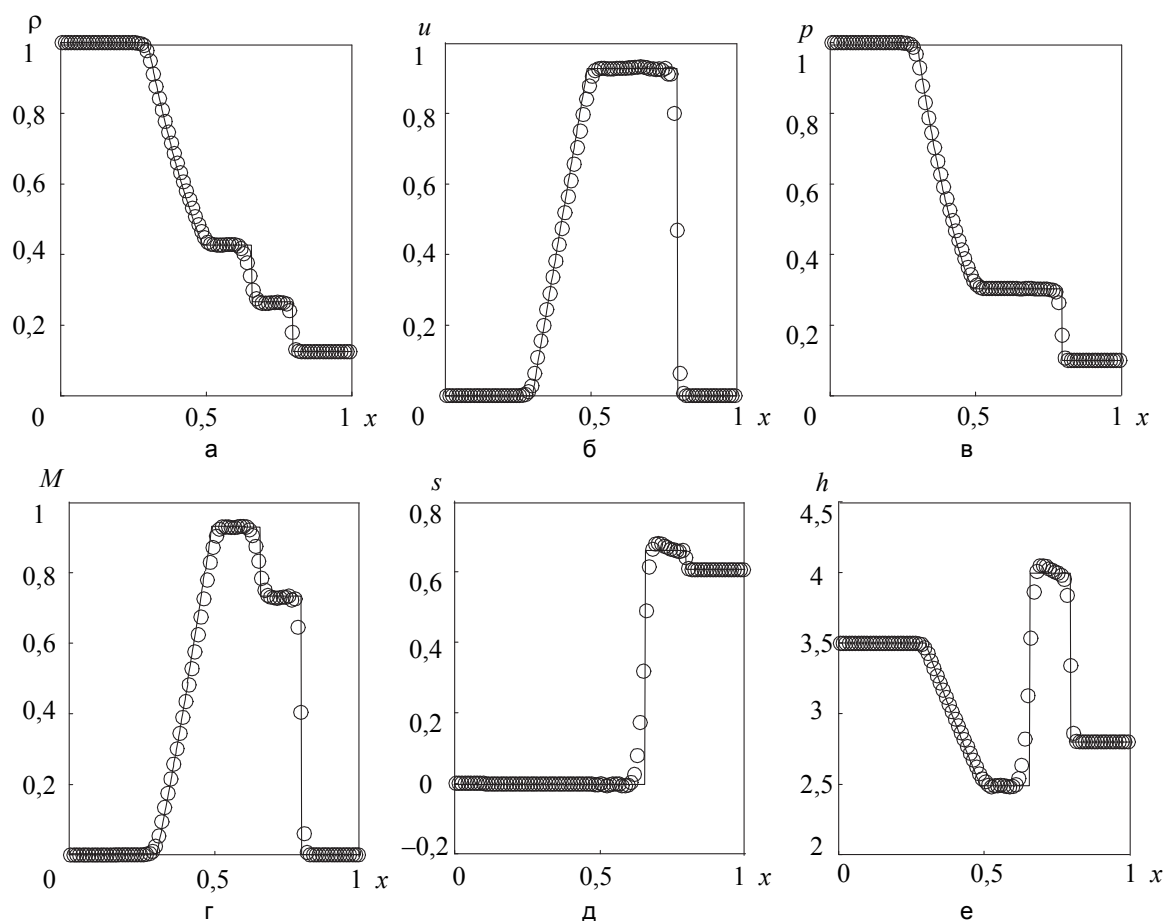


Рис. 1. Решение задачи Сода: плотность (а); скорость (б); давление (в); число Маха (г); энтропия (д); энтальпия (е). Сплошная линия соответствует точному решению задачи, а кружки – численному решению

На грубой сетке разрыв размывается примерно на две ячейки, а численное решение не содержит осцилляций. В середине волны разрежения имеется ошибка, характеризующаяся слабым разрывом плотности (энтропийный след, связанный с существованием звуковой точки внутри волны разрежения).

Улучшение точности расчетов происходит не только в областях гладкости решения (как, например, в области, занятой веером волн разрежения), но также вблизи ударной волны, контактного разрыва и двух слабых разрывов, которыми являются передняя и замыкающая характеристики волны разрежения. Увеличение порядка точности по пространству приводит к уменьшению размывания контактного разрыва и ударной волны.

Для оценки фактического порядка аппроксимации на разрывных решениях проводится серия расчетов на сетках различной разрешающей способности. Вычисляется средняя относительная ошибка для плотности, скорости и давления δf , где $f = \rho, u, p$. Средняя относительная ошибка для норм L_1 и L_2 приводится в табл. 2 для сеток с числом контрольных объемов 20, 40, 80 и 100. При этом уменьшение ошибки с ростом числа контрольных объемов примерно соответствует линейной зависимости в логарифмическом масштабе.

Сетка	$\delta \rho$		δu		δp	
	L_1	L_2	L_1	L_2	L_1	L_2
20	2,198	3,161	9,442	11,121	2,170	3,546
40	1,453	2,450	6,957	9,734	1,310	2,521
80	0,835	1,784	4,582	7,862	0,705	1,642
100	0,695	1,611	3,962	7,120	0,572	1,433

Таблица 2. Средняя относительная ошибка

В задаче Лакса (тест 2) формируется промежуточное состояние, плотность в котором значительно превышает плотность газа на концах ударной трубы. Распределения параметров течения в момент времени $t=0,2$ показывает рис. 2. Численное решение достаточно хорошо предсказывает горизонтальные участки в распределении плотности.

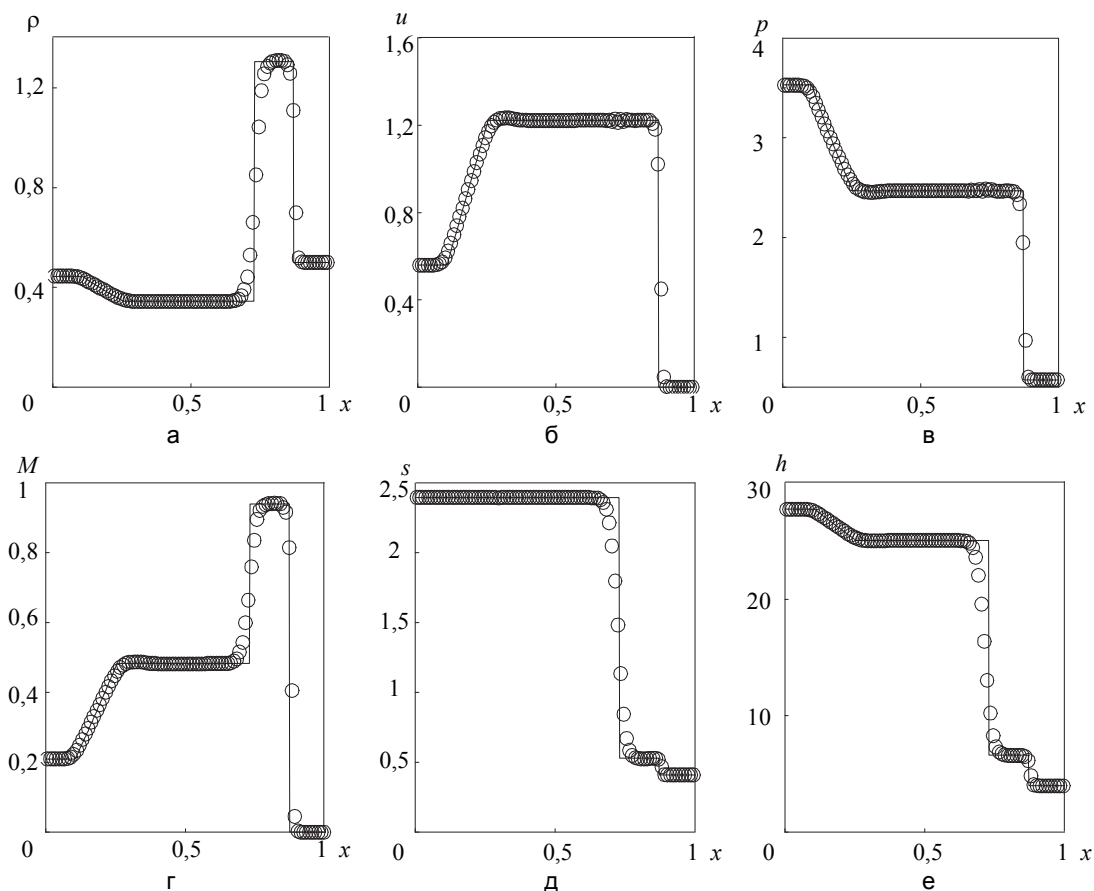


Рис. 2. Решение задачи Лакса: плотность (а); скорость (б); давление (в); число Маха (г); энтропия (д); энтальпия (е). Сплошная линия соответствует точному решению задачи, а кружки – численному решению

В задачах о сверхзвуковой ударной трубе и в задаче о распространении волны с числом Маха, равным 3, формируется область сверхзвукового течения. Распределения параметров течения в момент времени $t=0,2$ показывают рис. 3 (тест 3) и рис. 4 (тест 4).

При решении задачи 4 схема Рое дает некорректное решение, что связывается с энтропийным условием в звуковой точке (эта особенность решения отсутствует в задачах Сода и Лакса, в которых не возникает сильной волны разрежения). Сравнение с результатами, приведенными в работе [2], показывает, что, в отличие от TVD-схем, схема WENO дает корректное распределение скорости в области, соответствующей веру волн разрежения (при том же самом сеточном разрешении).

Для задачи о контактном разрыве распределения параметров течения в момент времени $t=0,8$ показывает рис. 5 (тест 5) и рис. 6 (тест 6).

В то время как численное решение корректно предсказывает распределение плотности, распределения скорости и давления характеризуются слабыми осцилляциями (порядка 0,25% от среднего значения). Расчеты по схеме с расщеплением вектора потока приводят к тому, что контактный разрыв в задаче 5 оказывается нестационарным, а профиль плотности в задаче 6 размывается с течением времени.

Для задачи об ударной волне распределения параметров течения в момент времени $t=0,175$ показывает рис. 7. Имеет место хорошее соответствие численного и точного решений.

Для задачи Эйфельда распределения параметров течения в момент времени $t=0,15$ показывает рис. 8 (тест 10). Решение ищется на сетке, содержащей 200 ячеек.

Распределения плотности и давления являются симметричными относительно сечения $x=0,5$. Численное решение задачи достаточно хорошо воспроизводит горизонтальные участки в распределениях плотности, давления, скорости и энтальпии (эти участки примыкают к границам расчетного интервала). В то же время численное решение дает знакопеременную скорость потока и всплеск энтальпии при $0,42 < x < 0,58$ (согласно точному решению, скорость потока равняется нулю, а энтальпия принимает постоянное значение).

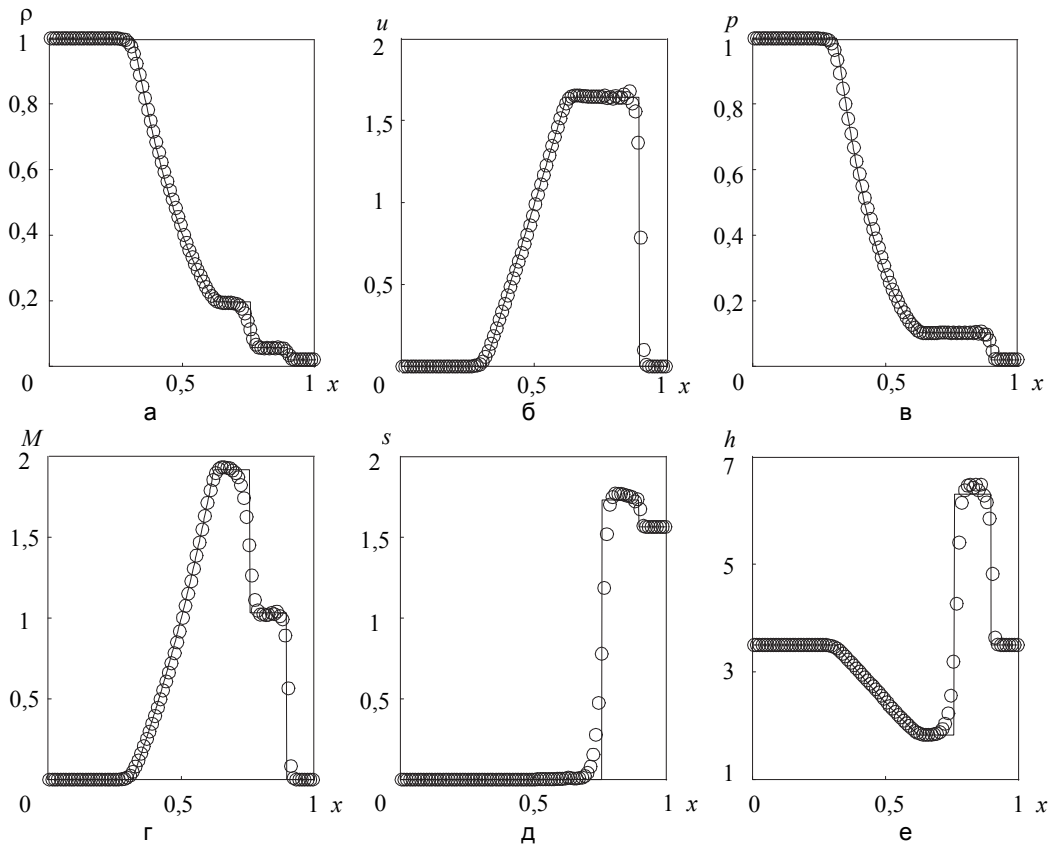


Рис. 3. Решение задачи о сверхзвуковой ударной трубе: плотность (а); скорость (б); давление (в); число Маха (г); энтропия (д); энтальпия (е). Сплошная линия соответствует точному решению задачи, а кружки – численному решению

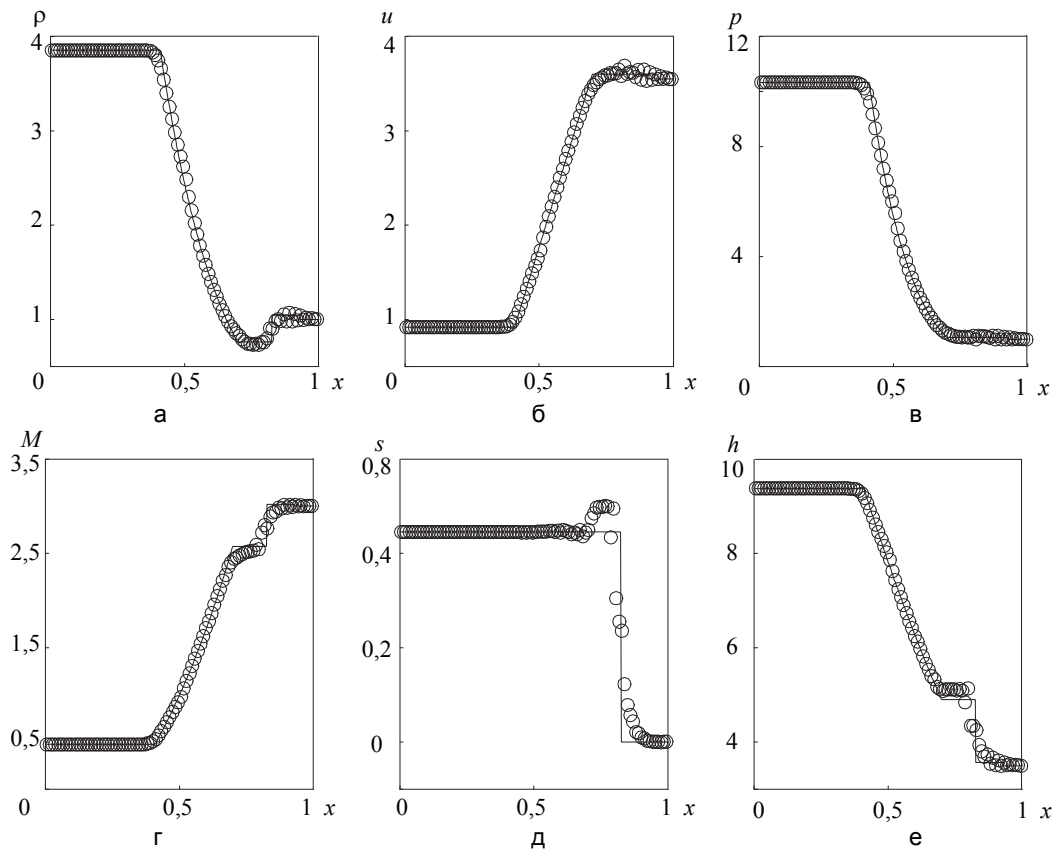


Рис. 4. Решение задачи о распространении волны с числом Маха, равным 3: плотность (а); скорость (б); давление (в); число Маха (г); энтропия (д); энтальпия (е). Сплошная линия соответствует точному решению задачи, а кружки – численному решению

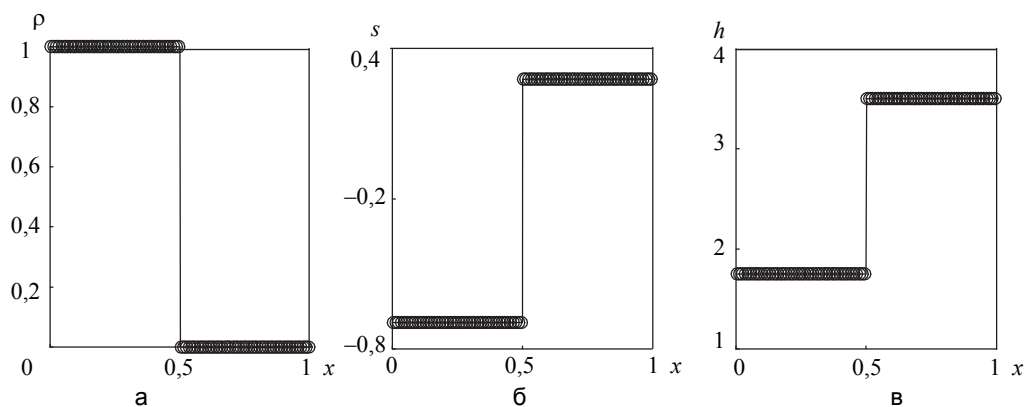


Рис. 5. Решение задачи о неподвижном контактом разрыве: плотность (а); скорость (б); давление (в). Сплошная линия соответствует точному решению задачи, а кружки – численному решению

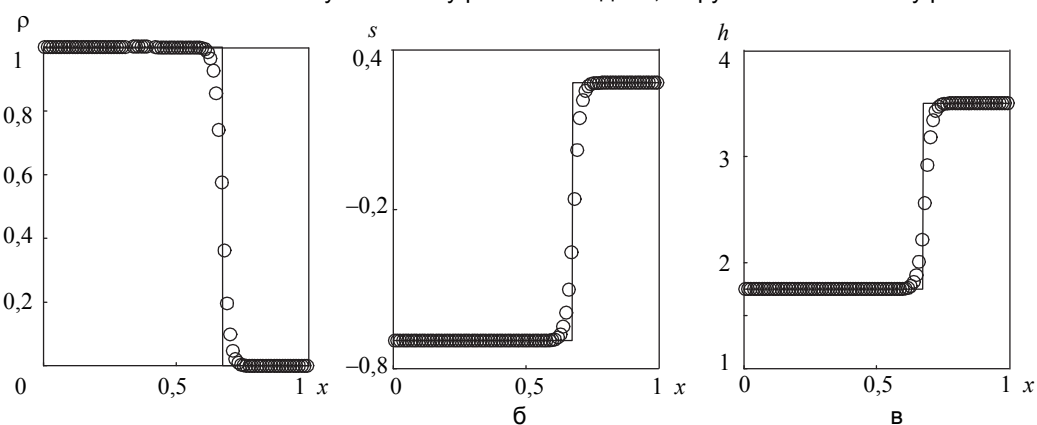


Рис. 6. Решение задачи о медленно движущемся контактом разрыве: плотность (а); скорость (б); давление (в). Сплошная линия соответствует точному решению задачи, а кружки – численному решению

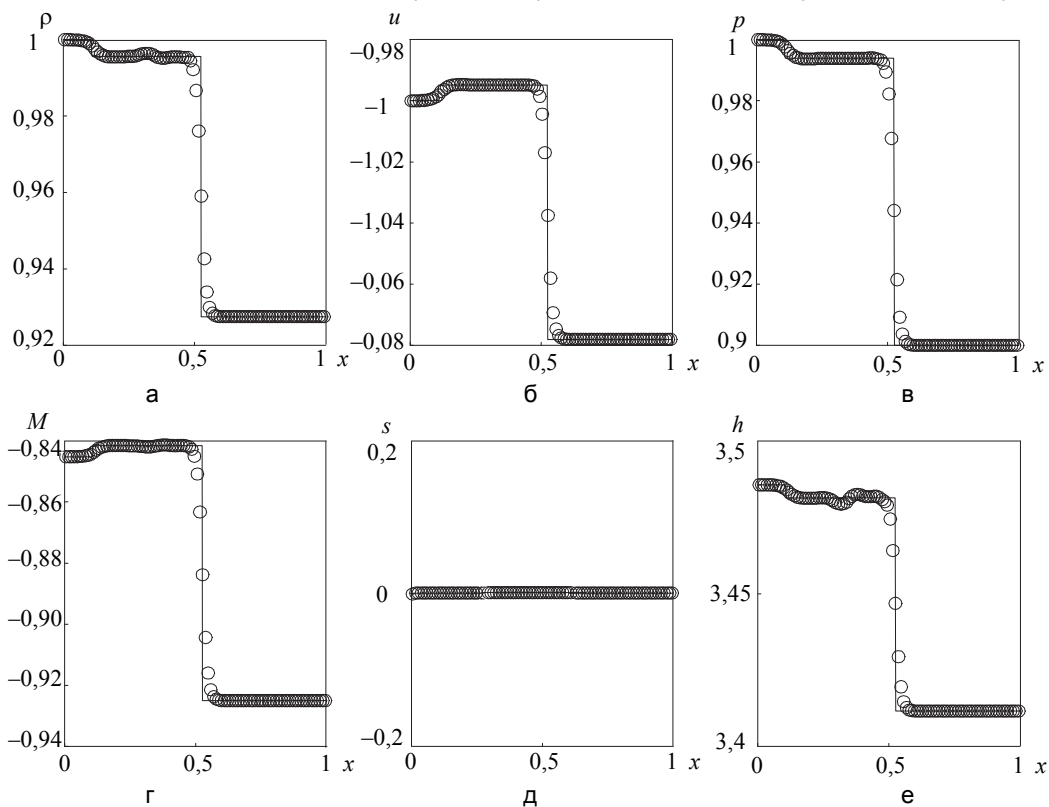


Рис. 7. Решение задачи о медленно движущейся слабой ударной волне: плотность (а); скорость (б); давление (в); число Маха (г); энтропия (д); энтальпия (е). Сплошная линия соответствует точному решению задачи, а кружки – численному решению

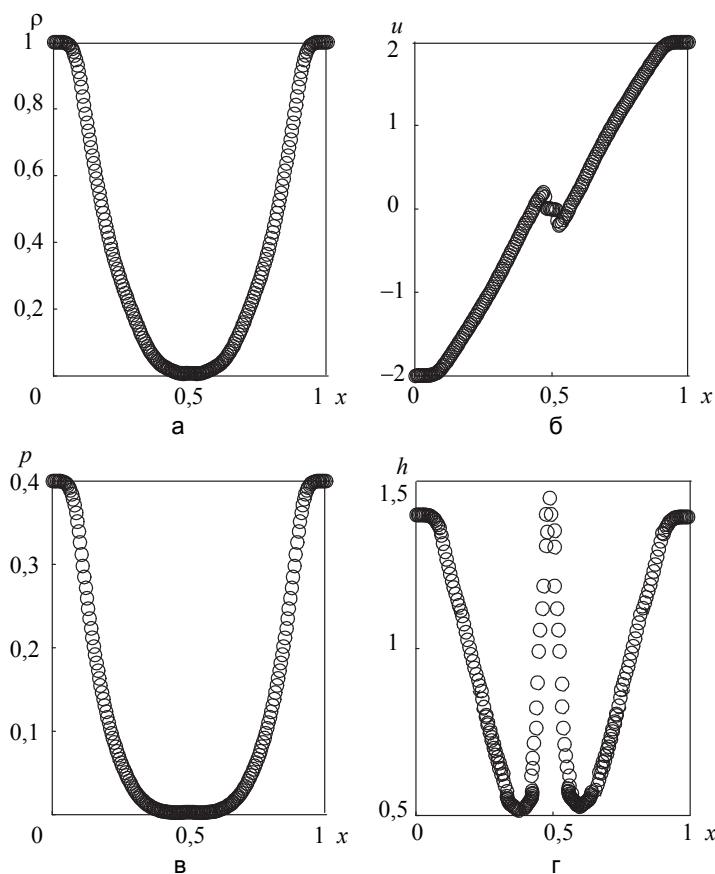


Рис. 8. Решение задачи Эйфельдта: плотность (а); скорость (б); давление (в); энтальпия (г).
Сплошная линия соответствует точному решению задачи, а кружки – численному решению

Заключение

Стандартные TVD-схемы, имеющие второй порядок точности вдали от разрывов, хорошо подходят для расчетов сверхзвуковых течений с небольшим числом изолированных ударных волн. Для устранения осцилляций на этапе дискретизации создаются разнообразные нелинейные механизмы, которые обеспечивают непрерывный переход от немонотонной разностной схемы высокого порядка аппроксимации к монотонной разностной схеме первого порядка аппроксимации. Разностные формулы с повышенным порядком аппроксимации используются в точках, в которых численное решение является гладким, а в точках, где решение терпит разрыв, используются монотонные схемы низкого порядка точности.

Задачи, содержащие как ударные волны, так и многочисленные сложные структуры в областях, где решение гладкое, требуют применения более точных вычислительных инструментов. Схемы ENO- и WENO-типа представляются естественными кандидатами на роль основного вычислительного инструмента в программах, предназначенных для моделирования течений вязкого сжимаемого газа.

Литература

1. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 608 с.
2. Wesseling P. Principles of Computational Fluid Dynamics. Springer, 2000. 664 p. doi: 10.1007/978-3-642-05146-3
3. Волков К.Н. Разностные схемы расчета потоков повышенной разрешающей способности и их применение для решения задач газовой динамики // Вычислительные методы и программирование. 2005. Т. 6. № 1. С. 146–167.
4. Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н., Козелков А.С., Тетерина И.В. Разностные схемы в задачах газовой динамики на неструктурированных сетках. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. 412 с.
5. Wolf W.R., Azevedo J.L.F. High-order ENO and WENO schemes for unstructured grids // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2007. V. 55. N 10. P. 917–943. doi: 10.1002/fld.1469
6. Castro M., Costa B., Don W.S. High order weighted essentially non-oscillatory WENO-Z schemes for hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics. 2011. V. 230. N 5. P. 1766–1792. doi: 10.1016/j.jcp.2010.11.028

7. Clain S., Diot S., Loubere R. A high-order finite volume method for systems of conservation laws-multi-dimensional optimal order detection (MOOD) // *Journal of Computational Physics*. 2011. V. 230. N 10. P. 4028–4050. doi: 10.1016/j.jcp.2011.02.026
8. Hu G.H., Li R., Tang T. A robust WENO type finite volume solver for steady Euler equations on unstructured grids // *Communications in Computational Physics*. 2011. V. 9. N 3. P. 627–648. doi: 10.4208/cicp.031109.080410s
9. Su X., Sasaki D., Kazuhiro N. Efficient implementation of WENO scheme on structured meshes // *Proc. 25th Computational Fluid Dynamics Symposium*. Osaka, Japan, 2011. N C01-3. 9 p.
10. Tsoutsanis P., Titarev V.A., Drikakis D. WENO schemes on arbitrary mixed-element unstructured meshes in three space dimensions // *Journal of Computational Physics*. 2011. V. 230. N 4. P. 1585–1601. doi: 10.1016/j.jcp.2010.11.023
11. Vincent P.E., Castonguay P., Jameson A. A new class of high-order energy stable flux reconstruction schemes // *Journal of Scientific Computing*. 2011. V. 47. N 1. P. 50–72. doi: 10.1007/s10915-010-9420-z
12. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 688 с.
13. van der Heul D.R., Vuik C., Wesseling P. A conservative pressure-correction method for flow at all speeds // *Computers and Fluids*. 2003. V. 32. N 8. P. 1113–1132. doi: 10.1016/S0045-7930(02)00086-5
14. Xiao F. Unified formulation for compressible and incompressible flows by using multi-integrated moments. I. One-dimensional inviscid compressible flow // *Journal of Computational Physics*. 2004. V. 195. N 2. P. 629–654. doi: 10.1016/j.jcp.2003.10.014
15. Sod G.A. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws // *Journal of Computational Physics*. 1978. V. 27. N 1. P. 1–31. doi: 10.1016/0021-9991(78)90023-2
16. Lax P.D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation // *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1954. V. 7. N 1. P. 159–193.
17. Arora M., Roe P.L. A well-behaved TVD limiter for high-resolution calculations of unsteady flow // *Journal of Computational Physics*. 1997. V. 132. N 1. P. 3–11. doi: 10.1006/jcph.1996.5514
18. Woodward P.R., Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // *Journal of Computational Physics*. 1984. V. 54. N 1. P. 115–173. doi: 10.1016/0021-9991(84)90142-6
19. Einfeldt B., Munz C.D., Roe P.L., Sjogren B. On Godunov-type methods near low densities // *Journal of Computational Physics*. 1991. V. 92. N 2. P. 273–295. doi: 10.1016/0021-9991(91)90211-3
20. Sjogreen B., Yee H.C. Variable high order multiblock overlapping grid methods for mixed steady and unsteady multiscale viscous flow // *Communications in Computational Physics*. 2009. V. 5. N 2–4. P. 730–744.

Булат Павел Викторович

– кандидат физико-математических наук, руководитель научной лаборатории, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, pavelbulat@mail.ru

Волков Константин Николаевич

– доктор физико-математических наук, старший лектор, Университет Кингстона, Лондон, SW15 3DW, Великобритания, k.volkov@kingston.ac.uk

Pavel V. Bulat

– PhD, Scientific supervisor of International laboratory, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, pavelbulat@mail.ru

Konstantin N. Volkov

– D.Sc., Senior Lecturer, Kingston University, London, KT12EE, UK, k.volkov@kingston.ac.uk