УДК 532.529

МОНОТОНИЗИРУЮЩАЯ КОРРЕКЦИЯ ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ РАСЧЕТА СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ СО СКАЧКАМИ УПЛОТНЕНИЯ

П.В. Булат[a], К.Н. Волков[b]

[a] Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация
[b] Университет Кингстона, Лондон, SW15 3DW, Великобритания
Адрес для переписки: pavelbulat@mail.ru

Информация о статье
Поступила в редакцию 29.04.15, принята к печати 26.05.15
doi:10.17586/2226-1494-2015-15-4-741-747
Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Булат П.В., Волков К.Н. Монотонизирующая коррекция производных для расчета сверхзвуковых течений со скачками уплотнения // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2015. Т. 15. № 4. С. 741–747.

Аннотация
Предмет исследования. Рассматриваются численные методы решения задач газовой динамики, основанные на точном и приближенном решении задачи о распаде произвольного разрыва (задача Римана). Разработан подход к численному решению уравнений Эйлера, описывающих течения невязкого сжимаемого газа, на основе метода конечных объемов и разностных схем расчета потоков различного порядка точности. В расчетах используются схема Годунова, схема Колгана, схема Рое, схема Хартена и схема Чакраварти–Ошера (порядок разностных схем изменяется от 1-го до 3-го). Сравнение точности и эффективности различных разностных схем демонстрируется на примере расчета течения невязкого сжимаемого газа в сопле Лаваля в случае непрерывного ускорения газа в сопле и в случае наличия соплового скачка уплотнения. Делаются выводы о точности различных разностных схем и затратах времени, необходимых на их реализацию. **Основные результаты.** Проведен сравнительный анализ разностных схем, предназначенных для интегрирования уравнений Эйлера и основанных на точном и приближенном решении задачи о распаде произвольного разрыва. Результаты расчетов показывают, что монотонизирующая коррекция производных обеспечивает монотонность численного решения в окрестности разрыва. С одной стороны, она предотвращает образование новых экстремумов, обеспечивая свойство монотонности, а с другой, приводит к сглаживанию существующих минимумов и максимумов и к потере точности. **Практическая значимость.** Разработанный метод численного расчета позволяет выполнять с высокой точностью расчеты течений с сильными нестационарными ударными и детонационными волнами. При этом не возникают нефизические осцилляции решения на фронте ударной волны.

Ключевые слова
вычислительная газовая динамика, метод конечных объемов, задача Римана, разностная схема, сопло.

Благодарности
Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение № 14.575.21.0057).

MONOTONIC DERIVATIVE CORRECTION FOR CALCULATION OF SUPERSONIC FLOWS WITH SHOCK WAVES

P.V. Bulat[a], K.N. Volkov[b]

[a] ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation
[b] Kingston University, London, SW15 3DW, UK
Corresponding author: pavelbulat@mail.ru

Article info
Received 29.04.15, accepted 26.05.15
doi:10.17586/2226-1494-2015-15-4-741-747
Article in Russian
For citation: Bulat P.V., Volkov K.N. Monotonic derivative correction for calculation of supersonic flows with shock waves. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2015, vol.15, no. 4, pp. 741–741.

Abstract
Subject of Research. Numerical solution methods of gas dynamics problems based on exact and approximate solution of Riemann problem are considered. We have developed an approach to the solution of Euler equations describing flows of inviscid compressible gas based on finite volume method and finite difference schemes of various order of accuracy. Godunov scheme, Kolgan scheme, Roe scheme, Harten scheme and Chakravarthy-Osher scheme are used in calculations (order of accuracy of finite difference schemes varies from 1st to 3rd). Comparison of accuracy and efficiency of various

finite difference schemes is demonstrated on the calculation example of inviscid compressible gas flow in Laval nozzle in the case of continuous acceleration of flow in the nozzle and in the case of nozzle shock wave presence. Conclusions about accuracy of various finite difference schemes and time required for calculations are made. **Main Results.** Comparative analysis of difference schemes for Euler equations integration has been carried out. These schemes are based on accurate and approximate solution for the problem of an arbitrary discontinuity breakdown. Calculation results show that monotonic derivative correction provides numerical solution uniformity in the breakdown neighbourhood. From the one hand, it prevents formation of new points of extremum, providing the monotonicity property, but from the other hand, causes smoothing of existing minimums and maximums and accuracy loss. **Practical Relevance.** Developed numerical calculation method gives the possibility to perform high accuracy calculations of flows with strong non-stationary shock and detonation waves. At the same time, there are no non-physical solution oscillations on the shock wave front.

Keywords
computational fluid dynamics, finite volume method, Riemann problem, difference scheme, nozzle.
Acknowledgements
The research has been carried out under financial support by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (agreement No. 14.575.21.0057).

Введение

Цель работы – исследовать точность разработанного метода решения уравнений Эйлера, описывающих течения невязкого сжимаемого газа, на основе метода конечных объемов и разностных схем расчета потоков различного порядка точности. В расчетах используются схема Годунова, схема Колгана, схема Рое, схема Хартена и схема Чакраварти–Ошера (порядок разностных схем изменяется от 1-го до 3-го). Сравнение точности и эффективности различных разностных схем демонстрируется на примере расчета течения невязкого сжимаемого газа в сопле Лаваля при наличии или отсутствии внутри сопла пусковой ударной волны (соплового прямого скачка уплотнения).

Модельные задачи играют роль испытательного полигона для проверки новых методологических концепций и оценки точности результатов, полученных с помощью сконструированных на их основе программных средств, в частности, для проверки корректности работы проекционно-эволюционных методов, широко используемых в вычислительной газовой динамике [1–9]. Результаты расчетов позволяют судить о монотонности и точности численного метода, наличии численной диффузии и нефизических осцилляций в областях с резкими градиентами искомых функций.

Задача о распаде произвольного разрыва (задача Римана, Riemann problem) находит широкое применение в методе конечных объемов при тестировании вычислительной процедуры и проверки точности схем расчета потоков [10, 11].

Для остановки итерационного процесса достигнутый уровень невязки сравнивается с заданной степенью точности (сходимость к машинной точности является желательной, но недостижимой на практике). Методы оценки ошибки основаны либо на графическом представлении истории сходимости итерационного процесса, либо на теоретическом исследовании поведения невязки и зависят от типа сходимости (монотонная, осциллирующая, смешанная). Для этого используется иерархия сеток, отличающихся шагом по пространству и времени в сторону уменьшения.

Сеточная зависимость решения проверяется при помощи решения задачи на последовательности сеток, шаг которых при движении по иерархии сеток сверху вниз уменьшается на определенную величину, например, в 2 раза.

В настоящей работе проводится решение ряда задач, связанных с моделированием сверхзвуковых течений идеального сжимаемого газа по соплу Лаваля в условиях, когда внутри сопла имеется пусковая ударная волна или течение по соплу гладкое. Полученные тестовые численные решения сравниваются с опубликованными эталонными решениями, что позволяет дать оценку точности используемых разностных схем. Монотонизирующая коррекция производных обеспечивает монотонность численного решения в окрестности разрыва. С одной стороны, она предотвращает образование новых экстремумов, обеспечивая свойство монотонности, а с другой – приводит к сглаживанию существующих минимумов и максимумов и к потере точности.

Задача Римана

Задача о распаде произвольного разрыва состоит в нахождении решения уравнений Эйлера на промежутке $-\infty<x<+\infty$ при специальных начальных условиях, характеризующихся постоянным состоянием в полуплоскости $-\infty<x<0$ (индекс L) и постоянным состоянием в полуплоскости $0<x<+\infty$ (индекс R). Начальные условия для уравнений Эйлера имеют следующий вид (используются физические переменные):

$$\mathbf{U}(0,x)=\begin{cases}\mathbf{U}_L, & x<0,\\ \mathbf{U}_R, & x>0,\end{cases}$$

где $\mathbf{U}$ – вектор газодинамических переменных (плотность, компоненты скорости, удельная полная энергия).

Мембрана, расположенная в точке x=0, разделяет два газа, находящихся при разных давлениях и имеющих различные плотности и скорости. В качестве рабочей среды выбирается воздух с отношением удельных теплоемкостей γ=1,4.

В момент времени t=0 в точке x=0, соответствующей положению разделительной перегородки, задается разрыв газодинамических параметров. В момент времени t=0 перегородка мгновенно убирается. Произвольный разрыв распадается на несколько разрывов, каждый из которых является ударной волной или волной разрежения (в зависимости от начальных условий). Возможные решения содержат веер волн разрежения, контактный разрыв и ударную волну, разделяющих область на четыре подобласти с постоянными значениями параметров.

Точное решение задачи о распаде произвольного разрыва сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений, полученных из законов сохранения, и детально рассматривается во многих работах, например, в работе [1].

Методы решения

В методе Годунова [2] параметры газа аппроксимируются кусочно-постоянными распределениями на выбранной сетке таким образом, чтобы в пределах каждой ячейки сетки они были бы постоянными и равными средним по ячейке значениям. Эволюция кусочно-постоянного поля на достаточно малом интервале времени определяется при помощи точного решения задачи Римана в каждой ячейке и используется для нахождения средних по ячейкам на новом слое по времени. Повторяя процедуру шаг за шагом, рассчитывают динамика изменения течения во времени.

При реализации численных методов типа Годунова повышенного порядка точности по пространству применяются кусочно-линейные или кусочно-полиномиальные распределения функций внутри дискретной ячейки с определенными ограничениями на величины коэффициентов соответствующих полиномов. Одна из сложностей этой задачи связана с неоднозначностью выбора величин наклонов для этих распределений. Задача о распаде произвольного разрыва в этих случаях теряет свою автомодельность, а нахождение точного решения задачи Римана при произвольных начальных данных становится проблематичным (обобщенная задача Римана, в которой параметры течения слева и справа от разрыва являются переменными). Поэтому решение неавтомодельной задачи тем или иным способом обходится и заменяется решением некоторой приближенной автомодельной задачи.

Использование кусочно-линейных аппроксимаций требует определения производных в каждой расчетной ячейке. Для гладких течений оправданным является подход, когда производные на каждом слое по времени аппроксимируются по рассчитанным средним значениям. Для течений, содержащих разрывы, такой подход приводит к большим ошибкам. На практике производные не аппроксимируются, а рассчитываются на основе данных о природе течения.

Метод Годунова сравнительно просто обобщается на многомерный случай. В каждой ячейке сетки параметры потока считаются постоянными (внутри ячейки течение представляется однородным потоком). Развитие течения сводится к взаимодействию однородных потоков на гранях ячеек (влиянием взаимодействия потоков в вершинах ячеек пренебрегают). При таком подходе требуется решить задачу о взаимодействии двух однородных потоков газа, изначально разделенных некоторой плоскостью. Решение трехмерной задачи сводится к решению одномерной задачи вдоль нормали к разделяющей плоскости.

В работе [3] приводится точное решение задачи. Важность нахождения такого решения обусловливается тем, что оно позволяет учитывать свойства среды достаточно общего вида при использовании специальной аппроксимации двучленными уравнениями состояния. Однопараметрические аппроксимации уравнения состояния не обеспечивают передачу свойств различных сред слева и справа от разрыва. Для некоторых типов уравнений состояния решение задачи Римана не является единственным, имеет сложную неклассическую структуру или нарушает гиперболичность системы уравнений [1].

К числу наиболее распространенных методов, основанных на приближенном решении задачи о распаде разрыва, относятся подходы [4–8]. В работах [5, 6] при распаде произвольного разрыва ударная волна заменяется волной сжатия, что приводит к системе уравнений, имеющей монотонные решения. Расщепление [7] основано на идее использования двух якобианов – в левом и правом узле, чтобы затем сконструировать один – из бегущих направо простых волн левого якобиана и бегущих налево простых волн правого якобиана. В работе [8] рассматриваются только волны разрежения и сжатия. Схема Рое [4] основана на задании явных формул для определения линеаризованных величин, входящих в якобиан (используются примитивные переменные). Недостаток схемы Рое, состоящий в том, что она допускает существование ударной волны разрежения в звуковой точке, устраняется при помощи введения дополнительной вязкости, модифицируя собственные числа в районе звуковых точек.

Метод Рое [4] основан на точном решении задачи Римана для специальным образом линеаризованной системы уравнений. Решение состоит из движущихся разрывов, которые отделены друг от друга областями с постоянными значениями величин. Особенность такого решения состоит в том, что оно точно сохраняет нелинейные соотношения Рэнкина–Гюгонио на одиночной ударной волне и соотношения на одиночном тангенциальном разрыве. Метод Рое дает возможность строить разностные схемы для гиперболических систем уравнений, записанных в консервативной форме.

В методе Ошера [5, 6] приближенное решение задачи Римана строится для квазилинейной системы уравнений и является комбинацией только волн Римана.

Численные методы

С математической точки зрения задача о распаде произвольного разрыва представляет собой начальную задачу Коши с начальными условиями для законов сохранения, определяющих движение сжимаемого газа, при начальном распределении параметров газа в виде кусочно-постоянных функций.

В методе Годунова для описания мгновенного состояния движущейся среды используются кусочно-постоянные распределения функций (параметры потока полагаются постоянными в пределах каждого контрольного объема). Последующее развитие во времени приближения течения, состоящего из множества элементарных однородных потоков, определяется решениями задач Римана на гранях контрольных объемов. При помощи достаточно простой схемы удается описать многообразие конфигураций возникающих разрывов, а также определить скорости разрывов и параметры течения в областях гладкости между разрывами простыми математическими соотношениями.

Разностная схема Годунова [2] является консервативной схемой 1-го порядка точности и широко используется в различных задачах численного моделирования динамики сжимаемого газа. Схема Годунова обладает аппроксимационной вязкостью, поэтому для расчета сильных разрывов нет необходимости вводить искусственную вязкость. При расчете слабых разрывов типа волн разрежения погрешность аппроксимации становится достаточно большой, что проявляется в их сильном размазывании (размазывание тем сильнее, чем меньше число Куранта). Ограничение на шаг по времени вытекает из условия, чтобы волны, образовавшиеся после распада разрыва на грани контрольного объема, не достигли его центра, а при более слабом ограничении – другой грани. В области взаимодействия сильных ударных волн метод Годунова проявляет численные диссипативные свойства, которые аналогичны применению искусственной квадратичной вязкости [3]. Методы Годунова, основанные на решении задачи Римана методом Рое [4], обладают линейной численной вязкостью. При моделировании сильных ударных волн для устойчивости расчетов требуется уменьшение числа Куранта с 1 до 0,2.

Информация, необходимая для расчета потоков в методе Годунова, сводится к использованию состояния, образовавшегося после распада разрыва на грани контрольного объема. При всей трудоемкости решения задачи Римана в методе Годунова используется только часть полученной информации.

Численные методы Годунова, построенные с использованием точного решения задачи Римана, позволяют проводить расчеты ударных волн произвольной интенсивности с числом Куранта, близким к единице ($0{,}8<C<1$).

Численные методы, основанные на приближенных решениях задачи Римана, опираются на использование отдельных точных элементарных решений задачи Римана (движущихся разрывов в методе Рое или волн Римана в методе Ошера). Различные обобщения и приложения обсуждаются в работах [9–13].

Течение в сопле

Рассмотрим течение невязкого сжимаемого газа в канале с переменной площадью поперечного сечения (в сопле Лаваля). Профиль сопла описывается зависимостью $y=[(1+x^2)/\pi]^{1/2}$, где x находится в интервале [–0,3,1]. В качестве рабочей среды принимается воздух ($\gamma=1{,}4$). Детали вычислительной процедуры приводятся в работах [14, 15]. Индексы 00 соответствуют параметрам потока в ресивере, а индекс ∞ – параметрам потока в окружающей среде

Режим течения в сопле определяется соотношением между давлением на срезе сопла p_2 и давлением в резервуаре p_1. В варианте 1 (перепад давления меньше критического, $p_2/p_1>0{,}528$) реализуется режим течения с противодавлением, когда восстановление давления перерасширенного потока до наружного давления осуществляется через сопловой скачок уплотнения. В варианте 2 (перепад давления больше критического, $p_2/p_1<0{,}528$) имеет место непрерывное ускорение газа от дозвуковой скорости на входе до некоторой скорости в критическом сечении, зависящей от заданного перепада давления, а затем торможение газа.

Во входном сечении сопла задаются полное давление и полная температура. Способ задания граничных условий в выходном сечении зависит от режима истечения газа. При дозвуковом потоке на срезе сопла задается статическое давление, равное наружному давлению. Другие параметры определяются с помощью экстраполяции переменных из внутренних ячеек расчетной области. При сверхзвуковом истечении дополнительных граничных условий на срезе сопла не требуется.

Расчеты проводятся на сетке, содержащей 100 ячеек. Числу Куранта присваивается значение CFL=0,95. Стационарное решение задачи получается при помощи метода установления.

В варианте 1 во входном сечении задаются давление торможения ($p_1=10^6$ Па) и температура торможения ($T_1=300$ К), а в выходном сечении – статическое давление ($p_2=8\cdot 10^5$ Па). Поток на входе в расчетную область является дозвуковым. В сужающейся части сопла поток разгоняется, достигает скорости звука в критическом сечении и продолжает двигаться со сверхзвуковой скоростью. В расширяющейся части сопла образуется прямой скачок уплотнения, за которым поток становится дозвуковым.

В варианте 2 происходит ускорение газа в дозвуковой части сопла и торможение – в сверхзвуковой.

Расчеты проводятся для того, чтобы сравнить различные схемы вычисления потоков [12, 13]. Результаты численного моделирования, обработанные в виде зависимостей давления от координаты x, показаны на рис. 1 (число Куранта 0,98) и рис. 2 (число Куранта 0,25). Разностные схемы размазывают разрыв на 1–2 вычислительных ячейки, сохраняя монотонный характер решения.

В случае наличия соплового скачка уплотнения (рис. 1) схема Чакраварти–Ошера дает результаты, наиболее близкие к точному решению. При использовании схемы Годунова требуется 0,03479 с расчетного времени (12 шагов по времени) для достижения стационарного состояния, схемы Колгана – 0,03401 с (12 шагов), схемы Рое – 0,01999 с (6 шагов), схемы Хартена – 0,01975 с (5 шагов), схемы Чакраварти–Ошера – 0,01968 с (5 шагов).

При сверхзвуковом режиме истечения (рис. 2) все разностные схемы дают примерно одинаковые результаты. При использовании схемы Годунова требуется 0,007257 с расчетного времени (14 шагов по времени) для достижения стационарного состояния, схемы Колгана – 0,008151 с (15 шагов), схемы Рое – 0,009545 с (18 шагов), схемы Хартена – 0,006941 с (12 шагов), схемы Чакраварти–Ошера – 0,006938 с (10 шагов).

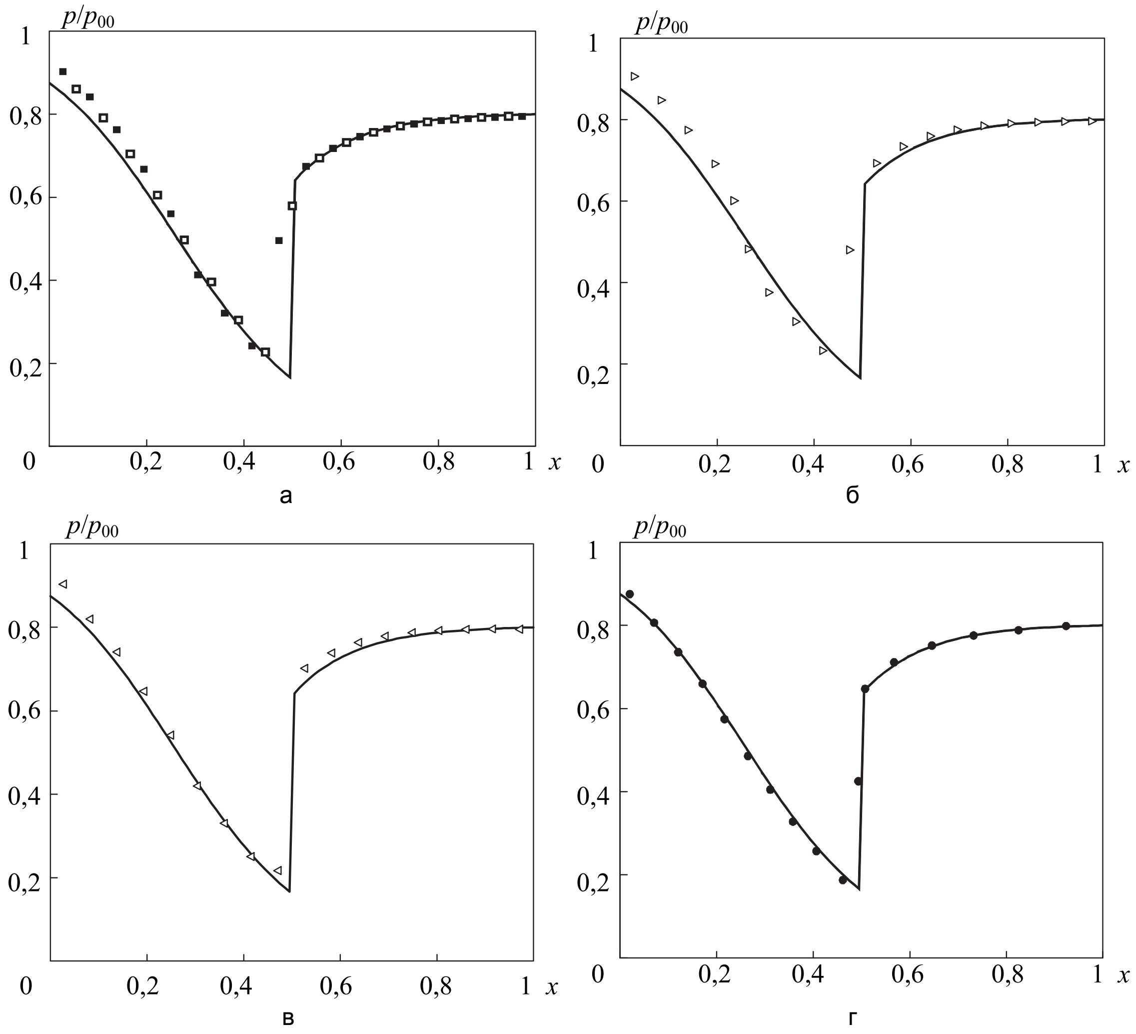

Рис. 1. Распределение давления вдоль координаты x при p_{00}=10^6 Па, T_{00}=300 К, p_∞=$8\cdot10^5$ Па.
Значки ■ и □ соответствуют результатам, полученным при помощи схемы Годунова и схемы Колгана (а);
► – при помощи схемы Рое (б); ◄ – при помощи схемы Хартена (в);
● – при помощи схемы Чакраварти–Ошера (г)

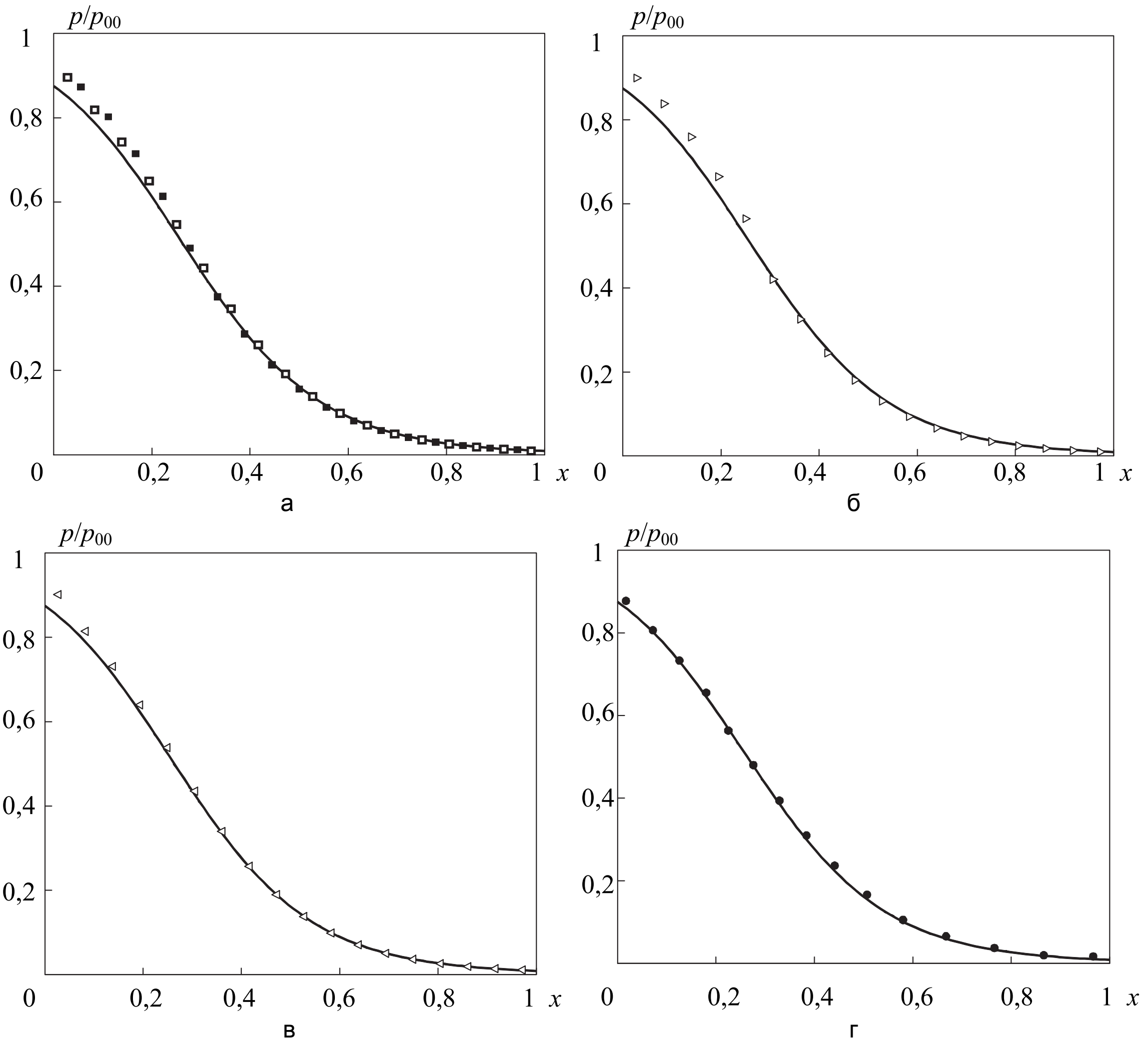

Рис. 2. Распределение давления вдоль координаты x при p_{00}=10^8 Па, T_{00}=300 К, p_∞=$8 \cdot 10^5$ Па. Значки ■ и □ соответствуют результатам, полученным при помощи схемы Годунова и схемы Колгана (а); ► – при помощи схемы Рое (б); ◄ – при помощи схемы Хартена (в); ● – при помощи схемы Чакраварти–Ошера (г)

Заключение

Сопоставление решений тестовых задач с точными решениями позволяет судить о точности схемы и скорости сходимости. Построение точных тестовых решений представляет собой необходимый элемент в общей программе конструирования численных алгоритмов.

Проведен сравнительный анализ разностных схем, предназначенных для интегрирования уравнений Эйлера и основанных на точном и приближенном решении задачи о распаде произвольного разрыва. Точность и эффективность различных разностных схем продемонстрирована на примере расчета течения невязкого сжимаемого газа в сопле Лаваля. В расчетах использованы схема Годунова, схема Колгана, схема Рое, схема Хартена и схема Чакраварти–Ошера (порядок разностных схем изменяется от 1-го до 3-го). Результаты расчетов показывают, что монотонизирующая коррекция производных обеспечивает монотонность численного решения в окрестности разрыва. С одной стороны, она предотвращает образование новых экстремумов, обеспечивая свойство монотонности, а с другой – приводит к сглаживанию существующих минимумов и максимумов и к потере точности.

References

1. Toro E.F. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Berlin, Springer-Verlag, 2009, 724 p. doi: 10.1007/b79761
2. Godunov S.K. A finite difference method for the computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Sbornik: Mathematics*, 1959, vol. 47, no. 8–9, pp. 357–393.
3. Kulikovskii A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu. *Matematicheskie Voprosy Chislennogo Resheniya Giperbolicheskikh Sistem Uravnenii* [Mathematical Problems in the Numerical Solution of Hyperbolic Systems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001, 608 p.

4. Roe P.L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 1981, vol. 43, no. 2, pp. 357–372. doi: 10.1016/0021-9991(81)90128-5
5. Osher S. Riemann solvers, the entropy condition, and difference approximations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1984, vol. 21, no. 2, pp. 217–235.
6. Osher S., Chakravarthy S. High resolution schemes and the entropy condition. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1984, vol. 21, no. 5, pp. 955–984.
7. Einfeldt B. On Godunov-type methods for gas dynamics. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1988, vol. 25, no. 2, pp. 294–318.
8. Donat R., Marquina A. Capturing shock reflections: an improved flux formula. *Journal of Computational Physics*, 1996, vol. 125, no. 1, pp. 42–58. doi: 10.1006/jcph.1996.0078
9. Capdeville G. A multi-dimensional HLL-Riemann solver for Euler equations of gas dynamics. *Computers and Fluids*, 2011, vol. 47, no. 1, pp. 122–143. doi: 10.1016/j.compfluid.2011.03.001
10. Bulat P.V., Volkov K.N., Silnikov M.S., Chernyshev M.V. Analiz raznostnykh skhem, osnovannykh na tochnom i priblizhennom reshenii zadachi Rimana [Analysis of finite-difference schemes based on exact and approximate solution of Riemann problem]. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2015, vol. 15, no. 1, pp. 139–148.
11. Bulat P.V., Bulat M.P. Definition of the existence region of the solution of the problem of an arbitrary gas-dynamic discontinuity breakdown at interaction of flat Supersonic jets with formation of two outgoing compression shocks. *Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology*, 2015, vol. 9, no. 1, pp. 65–70.
12. Yeom G.-S., Chang K.-S. A modified HLLC-type Riemann solver for the compressible six-equation two-fluid model. *Computers and Fluids*, 2013, vol. 76, no. 10, pp. 86–104. doi: 10.1016/j.compfluid.2013.01.021
13. Su Y.-C. On the compressible Euler dynamics equations in transonic flow. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2014, vol. 109, pp. 156–172. doi: 10.1016/j.na.2014.06.009
14. Volkov K.N. Raznostnye skhemy rascheta potokov povyshennoi razreshayushchei sposobnosti i ikh primenenie dlya resheniya zadach gazovoi dinamiki [High-resolution difference schemes of flux calculation and their application to solving gas dynamics problems]. *Vychislitel'nye Metody i Programmirovanie*, 2005, vol. 6, no. 1, pp. 146–167.
15. Volkov K.N. Reshenie nestatsionarnykh zadach mekhaniki zhidkosti i gaza na nestrukturirovannykh setkakh [Solution of time-dependant problems of gas and fluid mechanics on unstructured grids]. *Matematicheskoe Modelirovanie*, 2006, vol. 18, no. 7, pp. 3–23.

Булат Павел Викторович	–	кандидат физико-математических наук, руководитель научной лаборатории, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, pavelbulat@mail.ru
Волков Константин Николаевич	–	доктор физико-математических наук, старший лектор, Университет Кингстона, Лондон, SW15 3DW, Великобритания, k.volkov@kingston.ac.uk
Pavel V. Bulat	–	PhD, Scientific supervisor of International laboratory, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, pavelbulat@mail.ru
Konstantin N. Volkov	–	D.Sc., Senior Lecturer, Kingston University, London, KT12EE, UK, k.volkov@kingston.ac.uk