УДК 517.958

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ ПРИ ПОСТРОЕНИИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЯДА

А.И. Попов[a]

[a] Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация
Адрес для переписки: popov239@gmail.com

Информация о статье
Поступила в редакцию 10.06.15, принята к печати 06.07.15
doi:10.17586/2226-1494-2015-15-5-916-920
Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Попов А.И. Исследование разрешимости задачи Штурма–Лиувилля при построении асимптотического ряда // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2015. Т. 15. № 5. С. 916–920.

Аннотация

Предмет исследования. Построение асимптотических разложений решений уравнений в частных производных с малым параметром сводится обычно к последовательному решению цепочки задач Штурма–Лиувилля. Чтобы найти некоторый член ряда, необходимо решить неоднородную краевую задачу с источником на оси цилиндра. При этом соответствующая однородная задача имеет нетривиальное решение. Потому возникает содержательный вопрос о реализуемости предложенного способа построения. Настоящая работа посвящена построению таких асимптотических разложений. **Метод.** Для доказательства необходимого условия используется обычная техника интегрирования всего уравнения и использования граничных условий. Для доказательства достаточного условия строится подходящая задача Коши (которая всегда разрешима) и анализируется ее решение. Мы имеем дело с общим случаем формальных степенных рядов и не делаем предположений об их сходимости. **Основной результат.** В работе доказаны необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородной задачи Штурма–Лиувилля для общего случая формальных степенных рядов. Как частный случай общего результата, полученный результат остается верен, если заменить формальные степенные ряды функциями. **Практическая значимость.** Результат может найти применение при построении решений уравнений в частных производных и обыкновенных дифференциальных уравнений в форме формальных степенных рядов. Результат является общим и применим к частным случаям таких рядов, например, к асимптотическим рядам или функциям (сходящимся степенным рядам).

Ключевые слова
задача Штурма–Лиувилля, асимптотическое разложение, степенные ряды, краевая задача, обыкновенные дифференциальные уравнения.

Благодарности
Работа выполнена при частичной поддержке Правительства Российской Федерации (грант 074-U01), Минобрнауки РФ (Госзадание 2014/190, Проекты 14.Z50.31.0031 и 1.754.2014/K), а также гранта Президента РФ МК-5001.2015.1.

INVESTIGATION OF STURM-LIOUVILLE PROBLEM SOLVABILITY IN THE PROCESS OF ASYMPTOTIC SERIES CREATION

A.I. Popov[a]

[a] ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation
Corresponding author: popov239@gmail.com

Article info
Received 10.06.15, accepted 06.07.15
doi:10.17586/2226-1494-2015-15-5-916-920
Article in Russian

For citation: Popov A.I. Investigation of Sturm-Liouville problem solvability in the process of asymptotic series creation. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2015, vol. 15, no. 5, pp. 916–920.

Abstract

Subject of Research. Creation of asymptotic expansions for solutions of partial differential equations with small parameter reduces, usually, to consequent solving of the Sturm-Liouville problems chain. To find some term of the series, the non-homogeneous Sturm-Liouville problem with the inhomogeneity depending on the previous term needs to be solved. At the same time, the corresponding homogeneous problem has a non-trivial solution. Hence, the solvability problem occures for the non-homogeneous Sturm-Liouville problem for functions or formal power series. The paper deals with creation of such asymptotic expansions. **Method.** To prove the necessary condition, we use conventional integration technique of the whole equation and boundary conditions. To prove the sufficient condition, we create an appropriate Cauchy problem (which is always solvable) and analyze its solution. We deal with the general case of power series and make no hypotheses about the series convergence. **Main Result.** Necessary and sufficient conditions of solvability for the non-homogeneous Sturm-

Liouville problem in general case for formal power series are proved in the paper. As a particular case, the result is valid for functions instead of formal power series. **Practical Relevance.** The result is usable at creation of the solutions for partial differential equation in the form of power series. The result is general and is applicable to particular cases of such solutions, e.g., to asymptotic series or to functions (convergent power series).

Keywords
Sturm-Liouville problem, asymptotic expansion, power series, boundary problem, ordinary differential equations.

Acknowledgements
This work was partially financially supported by the Government of the Russian Federation (grant 074-U01), by the Ministry of Science and Education of the Russian Federation (Government contract 2014/190, Projects No 14.Z50.31.0031 and No. 1.754.2014/K), by grant MK-5001.2015.1 of the President of the Russian Federation.

Введение

Теория Штурма–Лиувилля широко используется в спектральной теории. Она хорошо описана во многих книгах (см., например, [1, 2] и ссылки в них). К задаче Штурма–Лиувилля сводятся многие квантовые и классические задачи, например, задачи о квантовых ямах, квантовых графах, волноводах и т.д. [3–5]. Она оказывается полезной и при развитии численных методов (см., например, [6–9]). Отметим особо асимптотический подход в теории волн, с которым связана настоящая работа. Он применяется, когда в задаче есть малый параметр, обычно возникающий при физическом анализе проблемы. Формально асимптотический подход сводится к построению асимптотического разложения по степеням указанного малого параметра [10–13]. Ряд строится последовательно. При нахождении очередного члена требуется решить неоднородную задачу Штурма–Лиувилля для формальных степенных рядов, в которой неоднородность зависит от предыдущего (одного или нескольких) члена ряда (уже найденного). При этом соответствующая однородная задача имеет нетривиальное решение. В результате вопрос о разрешимости неоднородной задачи становится не просто содержательным, но и чрезвычайно важным, ибо определяет возможность продолжения построения. Именно такая ситуация возникает при использовании пространственно-временного лучевого метода [14, 15]. В настоящей работе доказываются необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородной задачи Штурма–Лиувилля в общей ситуации. Ранее для формальных степенных рядов и для подобной постановки задачи критерия разрешимости получено не было.

Основная теорема

Теорема. Рассмотрим однородную задачу Штурма–Лиувилля:

$$\begin{cases} Ly = (p(x)y')' - q(x)y = 0, \\ \ell_0 y = (\alpha_0 y + \alpha_1 y')|_{x=x_0} = 0, \\ \ell_1 y = (\beta_0 y + \beta_1 y')|_{x=x_1} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

$p(x) > 0.$

Здесь α_j, β_j, $j = 0,1$ – вещественные числа; $p(x), q(x)$ – формальные степенные ряды (ФСР). Операторы Ly, $\ell_0 y$, $\ell_1 y$ определены формулой (1). $q(x)$ – вещественная функция.

Пусть существует решение в виде ФСР $y_0 \neq 0$. Тогда необходимое и достаточное условие существования решения в виде ФСР неоднородной задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} Ly = -F, \\ \ell_0 y = A, \\ \ell_1 y = B, \end{cases}$$

таково:

$$p(x_1)\frac{B}{\beta_1} y_0 |_{x=x_1} - p(x_0)\frac{A}{\alpha_1} y_0 |_{x=x_0} = -\int_{x_0}^{x_1} F(x) y_0(x) dx. \tag{2}$$

Здесь $F(x)$, A, B – ФСР.

Замечание. Чтобы избежать неясностей, отметим еще раз, что формальные степенные ряды рассматриваются не по x, а по некоторому малому параметру, коэффициенты этих рядов могут зависеть от x. При этом условие $p(x) > 0$ означает, что формальный степенной ряд для $p(x)$ при нулевом значении малого параметра разложения не обращается в 0, т.е. содержит нетривиальный член с нулевой степенью малого параметра.

Доказательство. Необходимость.

$$(p(x)y')' - q(x)y = -F. \tag{3}$$

Домножим уравнение (3) на y_0 и проинтегрируем по x от x_0 до x_1. Заметим, что мы исследуем

ФСР, т.е. сходимость не рассматривается. В связи с этим их можно всегда почленно интегрировать и дифференцировать без дополнительных условий. В результате получаем:

$$\begin{aligned}&\int_{x_0}^{x_1}((py')'-qy)y_0dx=\int_{x_0}^{x_1}(py')'y_0dx-\int_{x_0}^{x_1}qyy_0dx=py'y_0\,|_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}py'y_0'dx-\int_{x_0}^{x_1}qyy_0dx=\\&=py'y_0\,|_{x_0}^{x_1}-py_0'y\,|_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}y(py_0')'dx-\int_{x_0}^{x_1}qyy_0dx.\end{aligned}\tag{4}$$

Подставим в (4) граничные условия:

$$y_0'(x_0)=-\frac{\alpha_0}{\alpha_1}y_0(x_0),$$

$$y'(x_0)=\frac{A}{\alpha_1}-\frac{\alpha_0}{\alpha_1}y(x_0),$$

$$y_0'(x_1)=-\frac{\beta_0}{\beta_1}y_0(x_1),\tag{5}$$

$$y'(x_1)=\frac{B}{\beta_1}-\frac{\beta_0}{\beta_1}y(x_1).\tag{6}$$

Тогда

$$\begin{aligned}&\int_{x_0}^{x_1}((py')'-qy)y_0dx=p(x_1)\frac{B}{\beta_1}y_0(x_1)-p(x_1)\frac{\beta_0}{\beta_1}yy_0(x_1)-\\&-p(x_0)\frac{A}{\alpha}y_0(x_0)+p(x_0)\frac{\alpha_0}{\alpha_1}yy_0(x_0)+p(x_1)\frac{\beta_0}{\beta_1}y_0y(x_1)-\\&-p(x_0)\frac{\alpha_0}{\alpha_1}y_0y(x_0)+\int_{x_0}^{x_1}y((py_0')'-qy_0)dx=p(x_1)\frac{B}{\beta_1}y_0\,|_{x=x_1}-p(x_0)\frac{A}{\alpha_1}y_0\,|_{x=x_0}.\end{aligned}\tag{7}$$

С другой стороны,

$$\int_{x_0}^{x_1}((py')'-qy)y_0dx=-\int_{x_0}^{x_1}Fy_0dx.\tag{8}$$

Из сравнения (7) и (8) получаем формулу (2), т.е. необходимость доказана.

Достаточность.

Пусть ψ – решение задачи Коши:

$$\begin{cases}(p\psi)'-q\psi=-F,\\ \psi\,|_{x=x_0}=A,\\ \psi'\,|_{x=x_0}=B.\end{cases}\tag{9}$$

Задача Коши всегда разрешима. Следовательно, ψ существует. Пусть $y=\psi-y_0$.

$$(py')'-qy=(p\psi')'-q\psi-(py_0')'+qy_0=-F,$$

т.е. y удовлетворяет нужному уравнению. Проверим краевые условия. Домножим первое уравнение в (9) на y_0 и проинтегрируем по x от x_0 до x_1:

$$\begin{aligned}&\int_{x_0}^{x_1}((p\psi')'-q\psi)y_0dx=\int_{x_0}^{x_1}(p\psi')'y_0dx-\int_{x_0}^{x_1}q\psi y_0dx=p\psi'y_0\,|_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}p\psi'y_0'dx-\int_{x_0}^{x_1}q\psi y_0dx=\\&=p(\psi'y_0-y_0'\psi)\,|_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\psi((py_0')'-qy_0)dx=p((y'+y_0')y_0-y_0'(y+y_0))\,|_{x_0}^{x_1}=p(y'y_0-y_0'y)\,|_{x_0}^{x_1},\end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned}&\int_{x_0}^{x_1}((p\psi')'-q\psi)y_0dx=p(x_1)y'(x_1)y_0(x_1)-p(x_1)y_0'(x_1)y(x_1)-\\&-p(x_0)y'(x_0)y_0(x_0)+p(x_0)y_0'(x_0)y(x_0).\end{aligned}\tag{10}$$

Подставляя граничные условия (5)–(6) в (10), приходим к формуле

$$\begin{aligned}&\int_{x_0}^{x_1}((p\psi')'-q\psi)y_0dx=p(x_1)y'(x_1)y_0(x_1)+p(x_1)\frac{\beta_0}{\beta_1}y_0(x_1)y(x_1)-\\&-p(x_0)y'(x_0)y_0(x_0)-p(x_0)\frac{\alpha_0}{\alpha_1}y_0(x_0)y(x_0).\end{aligned}\tag{11}$$

С другой стороны,

$$\int_{x_0}^{x_1}((py')'-qy)y_0dx=-\int_{x_0}^{x_1}Fy_0dx. \tag{12}$$

Пусть

$$p(x_1)\frac{B}{\beta_1}y_0|_{x=x_1}-p(x_0)\frac{A}{\alpha_1}y_0|_{x=x_0}=-\int_{x_0}^{x_1}F(x)y_0(x)dx. \tag{13}$$

Тогда из (11)–(13) следует, что

$$\begin{gathered}p(x_1)\frac{B}{\beta_1}y_0|_{x=x_1}-p(x_0)\frac{A}{\alpha_1}y_0|_{x=x_0}=p(x_1)y'(x_1)y_0(x_1)+p(x_1)\frac{\beta_0}{\beta_1}y_0(x_1)y(x_1)-\\-p(x_0)y'(x_0)y_0(x_0)-p(x_0)\frac{\alpha_0}{\alpha_1}y_0(x_0)y(x_0).\end{gathered} \tag{14}$$

Условие (14) должно быть выполнено для любых точек x_0 и x_1. Зафиксируем x_0 и будем менять x_1. Так как соотношение (14) должно быть выполнено всегда, то части уравнения, отвечающие x_0 и x_1, должны быть независимы друг от друга:

$$-p(x_0)\frac{A}{\alpha_1}y_0(x_0)=-p(x_0)y'(x_0)y_0(x_0)-p(x_0)\frac{\alpha_0}{\alpha_1}y_0(x_0)y(x_0). \tag{15}$$

$$p(x_1)\frac{B}{\beta_1}y_0(x_1)=p(x_1)y'(x_1)y_0(x_1)+p(x_1)\frac{\beta_0}{\beta_1}y_0(x_1)y(x_1). \tag{16}$$

$y_0(x_1)\neq 0$. Доказывается от противного. Если $y_0(x_1)=0$, то из краевого условия

$$\ell_1 y=(\beta_0 y+\beta_1 y')|_{x=x_1}=0$$

следует, что $y_0'|_{x=x_1}=0$. Значит, y_0 – решение задачи Коши:

$$\begin{cases}(p(x)y_0')'-q(x)y_0=0,\\ y_0|_{x=x_1}=0,\\ y_0'|_{x=x_1}=0.\end{cases}$$

Следовательно, $y_0\equiv 0$, что противоречит предположению теоремы. По условию $p>0,\ \beta_1\neq 0$. Поделим обе части (16) на $p(x_1)y_0(x_1)$ и домножим на β_1, получим

$$B=\beta_1 y'(x_1)+\beta_0 y(x_1),$$

т.е. получили нужное условие при $x=x_1$.

Вернемся к соотношению (15):

$$-p(x_0)\frac{A}{\alpha_1}y_0(x_0)=-p(x_0)y'(x_0)y_0(x_0)-p(x_0)\frac{\alpha_0}{\alpha_1}y_0(x_0)y(x_0).$$

Учитывая, что $p>0,\ y_0(x_0)\neq 0$ (доказывается аналогично $y_0(x_1)$), $\alpha_1\neq 0$, получаем нужное условие при $x=x_0$:

$$\alpha_1 y'(x_0)+\alpha_0 y(x_0)=A.$$

Заключение

Рассмотрен вопрос о разрешимости неоднородной задачи Штурма–Лиувилля, возникающей при построении асимптотических рядов пространственно-временным лучевым методом. Предложены и доказаны необходимые и достаточные условия указанной разрешимости для общей постановки задачи. Результат может быть использован для построения асимптотических разложений в различных физических задачах.

Литература

1. Brannan J.R., Boyce W.E. Differential Equations with Boundary Value Problems: An Introduction to Modern Methods and Applications. 2nd ed. NY: John Wiley and Sons, 2010. 992 p.
2. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988. 431 с.
3. Kong L., Kong Q. Second-order boundary value problems with nonhomogeneous boundary conditions (II) // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2007. V. 330. N 2. P. 1393–1411. doi: 10.1016/j.jmaa.2006.08.064
4. Jodar L. Explicit solution for non homogeneous Sturm-Liouville operator problems // Publicacions Matematiques. 1989. V. 33. N 1. P. 47–57.

5. Pokornyi Yu.V., Pryadiev V.L. Some problems of the qualitative Sturm-Liouville theory on a spatial network // Russian Mathematical Surveys. 2004. V. 59. N 3. P. 515–552. doi: 10.1070/RM2004v059n03ABEH000738
6. Popov I.Yu., Lobanov I.S., Popov S.I., Popov A.I., Gerya T.V. Practical analytical solutions for benchmarking of 2-D and 3-D geodynamic Stokes problems with variable viscosity // Solid Earth. 2014. V. 5. N 1. P. 461–476. doi: 10.5194/se-5-461-2014
7. Gerya T., Lobanov I.S., Popov A.I., Popov I.Yu. Numerical approach to the Stokes problem with high contrasts in viscosity // Applied Mathematics and Computation. 2014. V. 235. P. 17–25. doi: 10.1016/j.amc.2014.02.084
8. Popov A.I., Lobanov I.S., Popov I.Yu., Gerya T.V. Benchmark solutions for nanoflows // Nanosystems: Phys. Chem. Math. 2014. V. 5. N 3. P. 391–399.
9. Popov A.I., Lobanov I.S., Popov I.Yu., Gerya T.V. On the Stokes flow computation algorithm based on Woodbury formula // Nanosystems: Phys. Chem. Math. 2015. V. 6. N 1. P. 140–145. doi: 10.17586/2220-8054-2015-6-1-140-145
10. Babich V.M. The space-time ray method and quasiphotons // Journal of Mathematical Sciences. 2008. V. 148. N 5. P. 633–638. doi: 10.1007/s10958-008-0013-4
11. Babich V.M. Formal power series and their applications in the mathematical theory of diffraction // Journal of Mathematical Sciences. 2013. V. 194. N 1. P. 1–7. doi: 10.1007/s10958-013-1500-9
12. Pankratova T.F. Tunneling in multidimensional wells // Nanosystems: Phys. Chem. Math. 2015. V. 6. N 1. P. 113–121. doi: 10.17586/2220-8054-2015-6-1-113-121
13. Bagrov V.G., Belov V.V., Trifonov A.Yu. Semiclassical trajectory-coherent approximation in quantum mechanics // Annals of Physics. 1996. V. 246. N 2. P. 231–290. doi: 10.1006/aphy.1996.0027
14. Babich V.M., Popov A.I. Quasiphotons of waves on the surface of a heavy liquid // Journal of Mathematical Sciences. 2011. V. 173. N 3. P. 243–253. doi: 10.1007/s10958-011-0247-4
15. Popov A.I. Wave walls for waves on the surface of a heavy liquid // Journal of Mathematical Sciences. 2013. V. 194. N 1. P. 83–97. doi: 10.1007/s10958-013-1509-0

Попов Антон Игоревич – инженер-исследователь, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, popov239@gmail.com

Anton I. Popov – research engineer, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, popov239@gmail.com