УДК 519.216:62-53

ФОРМИРОВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ИХ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Н.А. Вундер[a], Е.А. Надькина[a], А.В. Ушаков[a], Ю.В. Чугина[a]

[a] Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация
Адрес для переписки: 79214215187@ya.ru

Информация о статье
Поступила в редакцию 06.04.15, принята к печати 10.09.15
doi:10.17586/2226-1494-2015-15-6-1036-1044
Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Вундер Н.А., Надькина А.Е., Ушаков А.В., Чугина Ю.В. Формирование корреляционных функций линейных непрерывных систем на основе их фундаментальных матриц // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2015. Т. 15. № 6. С. 1036–1044.

Аннотация
Для стохастических воздействий, стационарных в широком смысле, решена задача формирования корреляционных матриц и функций векторов состояний и выходов линейных непрерывных систем на основе их фундаментальных матриц. Показано, что если линейная непрерывная система относится к классу систем типа одномерный вход–одномерный выход, то корреляционная функция выхода такой системы может быть найдена как свободное движение этой системы, порождаемое ее начальным состоянием, конструируемым на матрице дисперсий вектора состояния и транспонированной матрице выхода. Установлено, что когда непрерывная система относится к классу систем типа многомерный вход–многомерный выход, то возможны следующие варианты решения задачи формирования корреляционной функции линейной системы. Первый вариант состоит в разбиении системы на сепаратные каналы с последующим применением к каждому из сепаратных каналов подхода, разработанного для систем типа одномерный вход–одномерный выход. Второй вариант применяется для случая сохранения векторной природы стохастического внешнего воздействия, но использует разбиение вектора выхода на скалярные компоненты путем разделения матрицы выхода на сепаратные матрицы–строки с последующим формированием корреляционной функции по схеме систем типа одномерный вход–одномерный выход. Третий вариант основан на скаляризации матричной корреляционной функции выхода путем применения к ней сингулярного разложения, позволяющего сформировать скалярные мажоранту и миноранту корреляционных функций выхода. Установлено, что ключевым компонентом вычислительной процедуры формирования корреляционной функции линейных непрерывных систем является матрица дисперсий вектора состояния системы. Матрица дисперсий, в случае экзогенного стохастического воздействия типа «белый шум», вычисляется с помощью матричного уравнения Ляпунова. Обнаружено, что в случае экзогенного стохастического воздействия типа «окрашенный шум» возможность поиска матрицы дисперсии состояния системы с помощью уравнения Ляпунова возникает, если сконструировать агрегированную систему, составленную из исследуемой системы и формирующего фильтра, на выходе которого наблюдается «окрашенный шум». Полученные процедуры формирования корреляционных функций иллюстрируются примерами.

Ключевые слова: стохастическое воздействие, непрерывная система, уравнение Ляпунова, фундаментальная матрица, корреляционная функция.

Благодарности. Работа поддержана правительством Российской Федерации, Грант 074-U01 и Министерством образования и науки Российской Федерации (Проект 14. Z50.31.0031).

CREATION OF CORRELATION FUNCTIONS OF LINEAR CONTINUOUS SYSTEMS BASED ON THEIR FUNDAMENTAL MATRICES

N.A. Vunder[a], E.A. Nad'kina[a], A.V. Ushakov[a], J.V. Chugina[a]

[a] ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation
Corresponding author: 79214215187@ya.ru

Article info
Received 06.04.15, accepted 10.09.15
doi:10.17586/2226-1494-2015-15-6-1036-1044
Article in Russian
For citation: Vunder N.A., Nad'kina E.A., Ushakov A.V., Chugina J.V. Creation of correlation functions of linear continuous systems based on their fundamental matrices. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2015, vol. 15, no. 6, pp. 1036–1044.

Abstract
The paper presents a method of creating correlation matrices and functions of the state vectors and outputs of the linear continuous systems functioning under the conditions of stochastic stationary, in a broad sense, effects. Fundamental matrices form the basis of the method. We have shown that for the linear continuous systems with single dimensional input and single

dimensional output the correlation output function of such system can be found as the free movement of this system generated by its initial state. This state is constructed from the variance matrix of the state vector and the transposed output matrix. We have elucidated that when a continuous system belongs to a class of multi-dimensional input – multi-dimensional output systems, the following options are available for solving the problem of creation of the correlation function of a linear system. The first option is to partition the system into separate channels. Then the approach developed for systems with one-dimensional input and one-dimensional output is applied to each of the separate channels. The second option is used to preserve the vector nature of the stochastic external influence. It consists in partition of output vector to scalar components by separating output matrix into separate rows with subsequent formation of the correlation function according to the scheme for single dimensional input and single dimensional output type systems. The third option is based on the scalarization of matrix correlation output function by applying the singular value decomposition to it. That gives the possibility to form scalar majorant and minorant of correlation output functions. We have established that a key component of a computational procedure of creating the correlation function of continuous linear system is a variance matrix of the system state vector. In the case of functioning under an exogenous stochastic effect like "white noise" the variance matrix is calculated by solving the matrix Lyapunov equation. We have found out that in the case of an exogenous stochastic effect like "colored noise" capability of using the Lyapunov equation to find the variance matrix of system state arises after aggregated system design composed of the system itself and the shaping filter with "colored noise" at the output. Examples illustrate obtained procedures of creating correlation functions.

Keywords

stochastic effects, continuous system, Lyapunov equation, fundamental matrix, correlation function.

Acknowledgements

This work was supported by the Government of the Russian Federation, Grant 074-U01 and the Ministry of Education and Science (Project 14. Z50.31.0031).

Введение. Постановка задачи

Корреляционная теория стационарных эргодических векторных стохастических процессов использует три матричных характеристики этих процессов [1, 2]. Первой матричной характеристикой является его матрица дисперсий, второй – корреляционная матрица, третьей – матрица спектральных плотностей [3, 4]. Каждая из перечисленных характеристик стохастического процесса выполняет свою пользовательскую функцию в теории систем управления, функционирующих в условиях стохастических воздействий. Предлагаемая настоящая работа сориентирована на пользовательские функции в теории систем, которые выполняет корреляционная матрица. Если исследуемый стохастический процесс является скалярным, то его корреляционная матрица тоже является скалярной и именуется корреляционной функцией. Основным пользовательским параметром корреляционной функции скалярного процесса является интервал корреляции, представляющий собой отрезок временной оси, за пределами которого корреляционная функция становится близкой к нулю, что свидетельствует о том, что отсчеты, снятые с реализации стохастического процесса с интервалом, превышающим интервал корреляции, оказываются некоррелируемыми. Информация о некоррелированности отсчетов с реализацией стохастического процесса используется для организации цифровой обработки [5] этих процессов. Если стохастический процесс – векторный, то его скаляризация может быть осуществлена тремя способами. Первый способ состоит в разбиении системы типа многомерный вход–многомерный выход на сепаратные каналы типа одномерный вход–одномерный выход, число которых определяется произведением числа входов на число выходов, сопроводив их вычислением корреляционной функции для каждого из них с дальнейшей оценкой интервалов корреляции. Второй способ состоит в разбиении вектора выхода на скалярные компоненты с дальнейшим построением корреляционной функции для каждого из них и оценкой сепаратных интервалов корреляции при сохранении векторного экзогенного стохастического воздействия. Третий основывается на сингулярном разложении [6] корреляционной матрицы векторного стохастического процесса с целью вычисления минимального и максимального сингулярных чисел корреляционной матрицы, по которым формируются минимальная и максимальная оценки интервала корреляции векторного стохастического процесса. Вычисление корреляционных функций долгие годы строилось по схеме вычисления функции спектральной плотности скалярного стохастического процесса с последующим использованием теоремы Винера–Хинчина–Колмогорова, позволяющей вычислять корреляционную функцию как обратное преобразование Фурье от функции спектральной плотности [7, 8]. При этом функция спектральной плотности в этой схеме вычисляется в мультипликативной форме, сомножителями которой являются функция спектральной плотности входного стохастического воздействия и квадрат модуля передаточной частотной характеристики отношения вход–выход непрерывной системы. Приведенная вычислительная схема хорошо себя зарекомендовала для случая передаточных функций невысокого порядка, с ростом порядка трудности заметно возрастают. В случае векторного стохастического процесса приведенная вычислительная схема становится практически неприменимой.

Ниже предлагается процедура формирования корреляционных матриц [3, 4, 9–11] стохастических процессов по переменным непрерывной системы, ключевым моментом которой является вычисление матрицы дисперсий вектора состояния этой системы. При этом используется тот факт, что матрица дисперсий [3, 4, 9–11] в случае экзогенного стохастического воздействия типа «белый шум» вычисляется с помощью матричного уравнения Ляпунова. Показано, что в случае экзогенного стохастического воздействия типа «окрашенный шум» возможность поиска матрицы дисперсии состояния системы с помощью уравнения Ляпунова появляется, если сконструировать агрегированную систему, составленную из исследуемой системы и формирующего фильтра, на выходе которого наблюдается «окрашенный шум» [3, 10, 11].

Матричное уравнение Ляпунова в задачах вычисления матриц дисперсии переменных линейной непрерывной системы

Рассматривается линейная непрерывная система (ЛНС) типа многомерный вход–многомерный выход, возбуждаемая стохастическим векторным экзогенным воздействием $\mathbf{w}(t)$, стационарным в широком смысле [3, 4], типа «белый шум», векторно-матричное описание (ВМО) которой «вход–состояние–выход» (ВСВ) при нулевом начальном состоянии $\mathbf{x}(0)$ имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{F}\mathbf{x}(t)+\mathbf{G}\mathbf{w}(t);\ \mathbf{x}(0)=0;\ \mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\mathbf{x}(t);\ \boldsymbol{\varepsilon}(t)=\mathbf{w}(t)-\mathbf{y}(t). \tag{1}$$

В ВМО (1) $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{t}$ – соответственно вектор состояния, выхода, ошибки по выходу ЛНС и непрерывное время; $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{C}$ – соответственно матрицы состояния, входа и выхода ЛНС; $\mathbf{x}\in R^n$; $\mathbf{y}, \boldsymbol{\varepsilon}\in R^m$; $\mathbf{F}\in R^{n\times n}$, $\mathbf{G}\in R^{n\times m}$, $\mathbf{C}\in R^{m\times n}$. Стохастическое векторное экзогенное воздействие $\mathbf{w}(t)$, стационарное в широком смысле, типа «белый шум» характеризуется нулевым математическим ожиданием и некоррелированностью отсчетов $\mathbf{w}(t+\tau), \mathbf{w}(t)$ при любом шаге τ их реализации, так что выполняются соотношения

$$M\{\mathbf{w}(t)\}=\bar{\mathbf{w}}(t)=0;\ M\{\mathbf{w}(t+\tau)\mathbf{w}^T(t)\}=\mathbf{N}\delta(\tau);\ \delta(\tau)=\begin{cases}\infty:\tau=0;\\ 0:\tau\neq 0.\end{cases} \tag{2}$$

В (2) $M\{(*)\}$ – оператор вычисления математического ожидания стохастической переменной $(*)$, $\overline{(*)}$ – математическое ожидание (среднее значение) стохастической переменной $(*)$, $\mathbf{N}$ – матрица интенсивностей векторного «белого шума» $\mathbf{w}(t)$; $\mathbf{w}(t)\in R^m, \mathbf{N}\in R^{m\times m}$. Дополним характеристику векторного «белого шума» свойством его некоррелированности [3, 4] со стохастическим вектором состояния ЛНС (1), записываемым в формах

$$M\{\mathbf{x}(t)\mathbf{w}^T(t)\}=0,\ M\{\mathbf{w}(t)\mathbf{x}^T(t)\}=0. \tag{3}$$

Введем в рассмотрение матрицы дисперсий стохастических переменных линейной непрерывной системы (1) с помощью соотношений

$$\mathbf{D}_x(t)=M\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)\};\ \mathbf{D}_y(t)=M\{\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^T(t)\};\ \mathbf{D}_\varepsilon(t)=M\{\boldsymbol{\varepsilon}(t)\boldsymbol{\varepsilon}^T(t)\}. \tag{4}$$

Очевидно, дисперсия выхода $\mathbf{y}(t)$ ЛНС (1) удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{D}_y(t)=M\{\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^T(t)\}=M\{\mathbf{C}\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)\mathbf{C}^T\}=\mathbf{C}\mathbf{D}_x(t)\mathbf{C}^T, \tag{5}$$

а дисперсия ошибки $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ ЛНС (1) с учетом (2) и (3) определяется выражением

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_\varepsilon(t)&=M\{\boldsymbol{\varepsilon}(t)\boldsymbol{\varepsilon}^T(t)\}=M\left\{(\mathbf{w}(t)-\mathbf{C}\mathbf{x}(t))(\mathbf{w}(t)-\mathbf{C}\mathbf{x}(t))^T\right\}=\\&=M\{\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t)-\mathbf{C}\mathbf{x}(t)\mathbf{w}^T(t)-\mathbf{w}(t)\mathbf{x}^T(t)\mathbf{C}^T+\mathbf{C}\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)\mathbf{C}^T\}=\mathbf{N}\delta(0)+\mathbf{D}_y(t).\end{aligned} \tag{6}$$

На основании (6) нетрудно сделать заключение, что дисперсия ошибки по выходу системы вида (1) при стохастическом воздействии типа «белый шум» принимает бесконечное значение, и ее контроль в этом случае утрачивает смысл. Следует ожидать, что дисперсия ошибки будет конечной в случае стохастического векторного экзогенного воздействия типа «окрашенный шум».

Известно [3, 4, 9], что матрица дисперсий $\mathbf{D}_x(t)$ (4) вектора состояний линейной непрерывной системы (1) типа многомерный вход–многомерный выход, возбуждаемой стохастическим векторным экзогенным воздействием $\mathbf{w}(t)$, стационарным в широком смысле, типа «белый шум», определяется матричным дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{D}}_x(t)=\mathbf{F}\mathbf{D}_x(t)+\mathbf{D}_x(t)\mathbf{F}^T+\mathbf{G}\mathbf{N}\mathbf{G}^T;\ \mathbf{D}_x(t)\big|_{t=0}=\mathbf{D}_x(0). \tag{7}$$

Очевидно, в силу стационарности в широком смысле векторного «белого шума» $\mathbf{w}(t)$ в случае гурвицевости матрицы состояния $\mathbf{F}$ системы (1) матрицы дисперсий $\mathbf{D}_x(t)$ и $\mathbf{D}_y(t)$ с течением времени стационаризируются, т.е. выполняются соотношения

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{D}_x(t)=\mathbf{D}_x,\ \lim_{t\to\infty}\mathbf{D}_y(t)=\mathbf{D}_y. \tag{8}$$

В силу выражений (7), (8) стационарная реализация $\mathbf{D}_x$ матрицы дисперсий $\mathbf{D}_x(t)$ вектора состояний системы (1) будет удовлетворять алгебраическому матричному уравнению Ляпунова

$$\mathbf{F}\mathbf{D}_x + \mathbf{D}_x\mathbf{F}^T = -\mathbf{G}\mathbf{N}\mathbf{G}^T. \qquad (9)$$

Поставим теперь задачу, опираясь на матричное уравнение Ляпунова вида (9), построить расчетную процедуру для вычисления матрицы дисперсий вектора состояния системы вида (1), возбуждаемой $\xi(t)$ стационарным в широком смысле стохастическим векторным воздействием типа «окрашенный шум». Будем полагать, что «окраска» «белого шума» $\mathbf{w}(t)$ при формировании «окрашенного шума» производится с помощью формирующего фильтра (ФФ), имеющего ВСВ векторно-матричное представление

$$\dot{\mathbf{z}}_{\phi}(t) = \mathbf{\Gamma}_{\phi}\mathbf{z}_{\phi}(t) + \mathbf{G}_{\phi}\mathbf{w}(t); \xi(t) = \mathbf{C}_{\phi}\mathbf{z}_{\phi}(t). \qquad (10)$$

В ВМО (10) $\mathbf{z}_{\phi}, \xi$ – соответственно вектор состояния и выхода ФФ; $\mathbf{\Gamma}_{\phi}, \mathbf{G}_{\phi}, \mathbf{C}_{\phi}$ – соответственно матрицы состояния, входа и выхода ФФ; $\mathbf{z}_{\phi} \in R^l$, $\xi \in R^m, \mathbf{\Gamma}_{\phi} \in R^{l\times l}, \mathbf{G}_{\phi} \in R^{l\times m}, \mathbf{C}_{\phi} \in R^{m\times l}$.

Чтобы можно было воспользоваться уравнением Ляпунова (9) для вычисления матриц дисперсий, сконструируем на паре «ФФ – ЛНС» агрегированную линейную непрерывную систему (АЛНС), возбуждаемую стохастическим векторным экзогенным воздействием $\mathbf{w}(t)$, стационарным в широком смысле [3, 10, 11], типа «белый шум». Для этих целей введем в рассмотрение агрегированный вектор состояния АЛНС $\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix}\mathbf{x}^T, & \mathbf{z}_{\phi}^T\end{bmatrix}^T$, относительно которого на основании (1) с заменой $\mathbf{w}(t)$ на $\xi(t)$ и (10) можно построить векторно-матричное уравнение динамики:

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}(t)\\ \dot{\mathbf{z}}_{\phi}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{F}\mathbf{x}(t)+\mathbf{G}_{\phi}\mathbf{C}_{\phi}\mathbf{z}_{\phi}(t)\\ 0\mathbf{x}(t)+\mathbf{\Gamma}_{\phi}\mathbf{z}_{\phi}(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \mathbf{G}_{\phi}\mathbf{w}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{F} & \mathbf{G}_{\phi}\mathbf{C}_{\phi}\\ 0 & \mathbf{\Gamma}_{\phi}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{z}_{\phi}(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \mathbf{G}_{\phi}\end{bmatrix}\mathbf{w}(t) =\\
&\qquad = \tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{w}(t);\\
&\mathbf{x}(t) = \mathbf{I}\mathbf{x}(t) + 0\mathbf{z}_{\phi}(t) = \begin{bmatrix}\mathbf{I} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{z}_{\phi}(t)\end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{C}}_x\tilde{\mathbf{x}}(t); \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + 0\mathbf{z}_{\phi}(t) = \begin{bmatrix}\mathbf{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{z}_{\phi}(t)\end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}}(t);\\
&\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \xi(t) - \mathbf{y}(t) = -\mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}_{\phi}\mathbf{z}_{\phi}(t) = \begin{bmatrix}-\mathbf{C} & \mathbf{C}_{\phi}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{z}_{\phi}(t)\end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{C}}_{\varepsilon}\tilde{\mathbf{x}}(t).
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

В ВМО (11) АЛНС $\tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix}\mathbf{F} & \mathbf{G}_{\phi}\mathbf{C}_{\phi}\\ 0 & \mathbf{\Gamma}_{\phi}\end{bmatrix} \in R^{(n+l)\times(n+l)}$; $\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix}0\\ \mathbf{G}_{\phi}\end{bmatrix} \in R^{(n+l)\times m}$; $\tilde{\mathbf{C}}_x = \begin{bmatrix}\mathbf{I} & 0\end{bmatrix} \in R^{n\times(n+l)}$; $\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix}\mathbf{C} & 0\end{bmatrix} \in R^{m\times(n+l)}$; $\tilde{\mathbf{C}}_{\varepsilon} = \begin{bmatrix}-\mathbf{C} & \mathbf{C}_{\phi}\end{bmatrix} \in R^{m\times(n+l)}$.

Теперь для системы (11) оказывается справедливым использование уравнения Ляпунова вида (9), которое для случая АЛНС записывается в форме

$$\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{D}}_x + \tilde{\mathbf{D}}_x\tilde{\mathbf{F}}^T = -\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{N}\tilde{\mathbf{G}}^T. \qquad (12)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{D}}_x$ – стационарная реализация матрицы дисперсий $\tilde{\mathbf{D}}_x(t)$ агрегированного вектора $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ состояний АЛНС (11), определяемая выражениями

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{\mathbf{D}}_x(t) = M\left\{\tilde{\mathbf{x}}(t)\tilde{\mathbf{x}}^T(t)\right\} = M\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{z}_{\phi}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}^T(t), & \mathbf{z}_{\phi}^T(t)\end{bmatrix}\right\} = M\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t) & \mathbf{x}(t)\mathbf{z}_{\phi}^T(t)\\ \mathbf{z}_{\phi}(t)\mathbf{x}^T(t) & \mathbf{z}_{\phi}(t)\mathbf{z}_{\phi}^T(t)\end{bmatrix}\right\} =\\
&\quad = \begin{bmatrix}M\left\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)\right\} & M\left\{\mathbf{x}(t)\mathbf{z}_{\phi}^T(t)\right\}\\ M\left\{\mathbf{z}_{\phi}(t)\mathbf{x}^T(t)\right\} & M\left\{\mathbf{z}_{\phi}(t)\mathbf{z}_{\phi}^T(t)\right\}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{D}_x(t) & \mathbf{D}_{xz_{\phi}}(t)\\ \mathbf{D}_{z_{\phi}x}(t) & \mathbf{D}_{z_{\phi}}(t)\end{bmatrix},\\
&\tilde{\mathbf{D}}_x = \lim_{t\to\infty}\tilde{\mathbf{D}}_x(t) = \begin{bmatrix}\mathbf{D}_x & \mathbf{D}_{xz_{\phi}}\\ \mathbf{D}_{z_{\phi}x} & \mathbf{D}_{z_{\phi}}\end{bmatrix}, \mathbf{D}_{z_{\phi}x} = \mathbf{D}_{xz_{\phi}}^T.
\end{aligned}\right\}. \qquad (13)$$

Запишем матричное уравнение Ляпунова (12) в покомпонентной форме, воспользовавшись представлением (13) матрицы дисперсии $\tilde{\mathbf{D}}_x$:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{F} & \mathbf{G}_{\text{ф}}\mathbf{C}_{\text{ф}}\\ 0 & \mathbf{\Gamma}_{\text{ф}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{D}_x & \mathbf{D}_{xz_{\text{ф}}}\\ \mathbf{D}_{z_{\text{ф}}x} & \mathbf{D}_{z_{\text{ф}}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{D}_x & \mathbf{D}_{xz_{\text{ф}}}\\ \mathbf{D}_{z_{\text{ф}}x} & \mathbf{D}_{z_{\text{ф}}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{F}^T & 0\\ \mathbf{C}_{\text{ф}}^T\mathbf{G}_{\text{ф}}^T & \mathbf{\Gamma}_{\text{ф}}^T\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathbf{G}_{\text{ф}}\mathbf{N}\mathbf{G}_{\text{ф}}^T\end{bmatrix}. \tag{14}$$

Покомпонентное перемножение матриц в (14) приводит к системе матричных уравнений

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{\Gamma}_{\text{ф}}\mathbf{D}_{z_{\text{ф}}}+\mathbf{D}_{z_{\text{ф}}}\mathbf{\Gamma}_{\text{ф}}^T=-\mathbf{G}_{\text{ф}}\mathbf{N}\mathbf{G}_{\text{ф}}^T,\\ &\mathbf{F}\mathbf{D}_{xz_{\text{ф}}}+\mathbf{D}_{xz_{\text{ф}}}\mathbf{\Gamma}_{\text{ф}}^T=-\mathbf{G}\mathbf{C}_{\text{ф}}\mathbf{D}_{z_{\text{ф}}},\\ &\mathbf{F}\mathbf{D}_x+\mathbf{D}_x\mathbf{F}^T=-\mathbf{D}_{xz_{\text{ф}}}\mathbf{C}_{\text{ф}}^T\mathbf{G}^T-\mathbf{G}\mathbf{C}_{\text{ф}}\mathbf{D}_{xz_{\text{ф}}}^T.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Последовательное решение уравнений системы (15) позволяет вычислить матрицу дисперсий $\mathbf{D}_x$ вектора состояния линейной непрерывной системы, возбуждаемой экзогенным стохастическим воздействием типа «окрашенный шум». Покомпонентный аналог (15) матричного уравнения Ляпунова (12) заметно выигрывает у последнего в том, что образующие его матричные уравнения используют матричные компоненты меньшей, чем в (12), размерности, чем гарантируется более высокая вычислительная устойчивость их решений за счет снижения числа обусловленности мультипликативных членов. Матрица дисперсий $\mathbf{D}_y$ выхода $\mathbf{y}(t)$ ЛНС (1) в составе АЛНС может быть вычислена с помощью соотношений (5) и (8). Матрица дисперсий $\mathbf{D}_\varepsilon$ вектора ошибки ЛНС (1) в составе АЛНС на основании (11) и (13) вычисляется как

$$\mathbf{D}_\varepsilon(t)=M\left\{\boldsymbol{\varepsilon}(t)\boldsymbol{\varepsilon}^T(t)\right\}=M\left\{\tilde{\mathbf{C}}_\varepsilon\tilde{\mathbf{x}}(t)\tilde{\mathbf{x}}^T(t)\tilde{\mathbf{C}}_\varepsilon^T\right\}=\tilde{\mathbf{C}}_\varepsilon\tilde{\mathbf{D}}_x(t)\tilde{\mathbf{C}}_\varepsilon^T=$$

$$=\begin{bmatrix}-\mathbf{C} & \mathbf{C}_{\text{ф}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{D}_x(t) & \mathbf{D}_{xz_{\text{ф}}}(t)\\ \mathbf{D}_{z_{\text{ф}}x}(t) & \mathbf{D}_{z_{\text{ф}}}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\mathbf{C}^T\\ \mathbf{C}_{\text{ф}}^T\end{bmatrix}=\mathbf{C}\mathbf{D}_x(t)\mathbf{C}^T+\mathbf{C}_{\text{ф}}\mathbf{D}_{z_{\text{ф}}}(t)\mathbf{C}_{\text{ф}}^T-\mathbf{C}\mathbf{D}_{xz_{\text{ф}}}(t)\mathbf{C}_{\text{ф}}^T-\mathbf{C}_{\text{ф}}\mathbf{D}_{xz_{\text{ф}}}^T(t)\mathbf{C}^T.$$

Стационаризированная $\mathbf{D}_\varepsilon$ реализация матрицы дисперсий $\mathbf{D}_\varepsilon(t)$ может быть записана в форме

$$\mathbf{D}_\varepsilon=\mathbf{C}\mathbf{D}_x\mathbf{C}^T+\mathbf{C}_{\text{ф}}\mathbf{D}_{z_{\text{ф}}}\mathbf{C}_{\text{ф}}^T-\mathbf{C}\mathbf{D}_{xz_{\text{ф}}}\mathbf{C}_{\text{ф}}^T-\mathbf{C}_{\text{ф}}\mathbf{D}_{xz_{\text{ф}}}^T\mathbf{C}^T=\mathbf{D}_y+\mathbf{D}_\xi-\left(\mathbf{C}\mathbf{D}_{xz_{\text{ф}}}\mathbf{C}_{\text{ф}}^T+\mathbf{C}_{\text{ф}}\mathbf{D}_{xz_{\text{ф}}}^T\mathbf{C}^T\right). \tag{16}$$

Выражение (16) обнаруживает интересный системный результат, состоящий в том, что минимизация дисперсии ошибки ЛНС при стохастическом экзогенном воздействии типа «окрашенный шум» может быть достигнута за счет ковариации векторов состояния ЛНС ФФ.

Основной результат. Формирование корреляционных матриц (функций) линейных непрерывных систем на основе их фундаментальных матриц

Введем в рассмотрение корреляционные матрицы векторных переменных линейной непрерывной системы вида (1). Тогда, следуя [3, 10, 11], в случае центрированных стохастических экзогенных воздействий, стационарных в широком смысле, для вектора состояния системы (1) корреляционная матрица $\mathbf{R}_x(\tau)$ получает представления

$$\mathbf{R}_x(\tau)=M\left\{\mathbf{x}(t+\tau)\mathbf{x}^T(t)\right\},\ \tau\geq 0, \tag{17}$$

$$\mathbf{R}_x(\tau)=M\left\{\mathbf{x}(t-\tau)\mathbf{x}^T(t)\right\},\ \tau\leq 0. \tag{18}$$

Нетрудно видеть, что для случая $\tau=0$ оба представления (17) и (18) приводят к равенству $\mathbf{R}_x(\tau)=\mathbf{D}_x$. Корреляционная матрица $\mathbf{R}_y(\tau)$ для вектора выхода системы (1) получает представления

$$\mathbf{R}_y(\tau)=M\left\{\mathbf{y}(t+\tau)\mathbf{y}^T(t)\right\}=\mathbf{C}M\left\{\mathbf{x}(t+\tau)\mathbf{x}^T(t)\right\}\mathbf{C}^T=\mathbf{C}\mathbf{R}_x(\tau)\mathbf{C}^T,\ \tau\geq 0, \tag{19}$$

$$\mathbf{R}_y(\tau)=M\left\{\mathbf{y}(t-\tau)\mathbf{y}^T(t)\right\}=\mathbf{C}M\left\{\mathbf{x}(t-\tau)\mathbf{x}^T(t)\right\}\mathbf{C}^T=\mathbf{C}\mathbf{R}_x(\tau)\mathbf{C}^T,\ \tau\leq 0. \tag{20}$$

Для корреляционной матрицы вектора состояния $\mathbf{R}_x(\tau)$ можно записать

$$\mathbf{R}_x(\tau)=M\left\{\mathbf{x}(t+\tau)\mathbf{x}^T(t)\right\}=M\left\{e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)\right\}=e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{D}_x,\ \tau\geq 0, \tag{21}$$

$$\mathbf{R}_x(\tau)=M\left\{\mathbf{x}(t-\tau)\mathbf{x}^T(t)\right\}=M\left\{e^{-\mathbf{F}\tau}\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)\right\}=e^{-\mathbf{F}\tau}\mathbf{D}_x,\ \tau\leq 0. \tag{22}$$

В свою очередь, для корреляционной матрицы вектора выхода $\mathbf{R}_y(\tau)$ на основании (19)–(22) получим представления

$$\mathbf{R}_y(\tau)=\mathbf{C}\mathbf{R}_x(\tau)\mathbf{C}^T=\mathbf{C}e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{D}_x\mathbf{C}^T,\ \tau\geq 0, \tag{23}$$

$$\mathbf{R}_y(\tau)=\mathbf{C}\mathbf{R}_x(\tau)\mathbf{C}^T=\mathbf{C}e^{-\mathbf{F}\tau}\mathbf{D}_x\mathbf{C}^T,\ \tau\leq 0. \tag{24}$$

Как указывалось в постановочной части работы, основная пользовательская нагрузка ложится на корреляционные матрицы вектора выхода системы, возбуждаемой стохастическим экзогенным воздействием. В связи с этим в дальнейшем предметом внимания становятся выражения (23), (24) для корреляционной матрицы $\mathbf{R}_y(\tau)$ вектора выхода системы. На основании (23), (24) необходимо констатировать следующие положения.

1. Зависимость корреляционной матрицы от свойств экзогенного стохастического воздействия несет в себе матрица дисперсий $\mathbf{D}_x$ вектора состояния системы, которая вычисляется или с помощью матричного уравнения Ляпунова (9) в случае воздействия типа «белый шум», или с помощью системы матричных уравнений Ляпунова (15) в случае воздействия типа «окрашенный шум».
2. Зависимость корреляционной матрицы от динамических свойств непрерывной системы вида (1) определяется ее фундаментальной матрицей [10–13] решений $\mathbf{\Phi}(\tau)=e^{\mathbf{F}\tau},\ \tau\geq 0\ \left(\mathbf{\Phi}(\tau)=e^{-\mathbf{F}\tau},\ \tau\leq 0\right)$ и матрицей $\mathbf{C}$ выхода системы. Причем, если система (1) обладает одномерным выходом, то корреляционная матрица выхода становится корреляционной функцией и формируется в силу правила [10–12] вычисления свободного движения системы
$$\dot{\boldsymbol{\kappa}}(\tau)=\mathbf{F}\boldsymbol{\kappa}(\tau);\ \boldsymbol{\kappa}(0)=\mathbf{D}_x\mathbf{C}^T;\ \boldsymbol{\eta}(\tau)=\mathbf{C}\boldsymbol{\kappa}(\tau), \tag{25}$$
так что $\mathbf{R}_y(\tau)=\boldsymbol{\eta}(\tau)=\mathbf{C}e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{D}_x\mathbf{C}^T,\ \tau\geq 0$.

Формирование скалярных корреляционных функций непрерывной системы

Как указывалось ранее, формирование скалярной корреляционной функции непрерывной системы может быть осуществлено несколькими способами. Первый способ, основанный на разбиении системы на сепаратные каналы, приводит к необходимости рассмотрения непрерывных систем типа одномерный вход–одномерный выход, получающих на основании (1) представления
$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{F}\mathbf{x}(t)+\mathbf{G}_j g_j(t);\ \mathbf{x}(0)=0;\ y_l(t)=\mathbf{C}^l\mathbf{x}(t), \tag{26}$$
где $\mathbf{G}_j$, $g_j(t)$ – соответственно j-й столбец матрицы входа $\mathbf{G}$ системы и j-й элемент векторного экзогенного воздействия $\mathbf{g}(t)$, которое в зависимости от задачи исследования удовлетворяет условиям $\mathbf{g}(t)=\mathbf{w}(t), \mathbf{g}(t)=\xi(t)$; $y_l(t)$ – l-й элемент вектора выхода, $\mathbf{C}^l$ – l-я строка матрицы выхода $\mathbf{C}$; $j,l=\overline{1,m}$. Для (j,l)-го сепаратного канала (26), в случае задачи исследования реакции системы на экзогенное стохастическое воздействие типа «белый шум» $\mathbf{w}(t)$, становится справедливой система соотношений
$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{F}\mathbf{D}_x+\mathbf{D}_x\mathbf{F}^T=-\mathbf{G}_j\mathbf{N}\mathbf{G}_j^{\ T},\\&\mathbf{R}_{yl}(\tau)=\mathbf{C}^l\mathbf{R}_x(\tau)\left(\mathbf{C}^l\right)^T=\mathbf{C}^l e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{D}_x\left(\mathbf{C}^l\right)^T,\ \tau\geq 0\end{aligned}\right\}.$$
Для случая возбуждения системы экзогенным стохастическим воздействием типа «окрашенный шум» $\xi(t)$ получаем следующую систему уравнений для расчета корреляционной функции l-го элемента вектора выхода:
$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{\Gamma}_\phi\mathbf{D}_{z_\phi}+\mathbf{D}_{z_\phi}\mathbf{\Gamma}_\phi^T=-\mathbf{G}_\phi\mathbf{N}\mathbf{G}_\phi^T,\\&\mathbf{F}\mathbf{D}_{xz_\phi}+\mathbf{D}_{xz_\phi}\mathbf{\Gamma}_\phi^T=-\mathbf{G}_j\mathbf{C}_\phi\mathbf{D}_{z_\phi},\\&\mathbf{F}\mathbf{D}_x+\mathbf{D}_x\mathbf{F}^T=-\mathbf{D}_{xz_\phi}\mathbf{C}_\phi^T\mathbf{G}_j^{\ T}-\mathbf{G}_j\mathbf{C}_\phi\mathbf{D}_{xz_\phi}^T,\\&\mathbf{R}_{yl}(\tau)=\mathbf{C}^l\mathbf{R}_x(\tau)\left(\mathbf{C}^l\right)^T=\mathbf{C}^l e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{D}_x\left(\mathbf{C}^l\right)^T,\ \tau\geq 0\end{aligned}\right\}.$$
Второй способ применяется для случая, когда внешнее стохастическое воздействие является векторным, при этом интерес представляют корреляционные функции, формируемые для каждого выхода системы. В этом случае математическое обеспечение решения задачи формирования скалярной корреляционной функции непрерывной системы (1) может быть представлено системой матричных соотношений
$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{F}\mathbf{x}(t)+\mathbf{G}\mathbf{g}(t);\ \mathbf{x}(0)=0;\ \mathbf{y}_l(t)=\mathbf{C}^l\mathbf{x}(t),$$
где $\mathbf{g}(t)$ – векторное экзогенное стохастическое воздействие, которое в зависимости от задачи исследования удовлетворяет условиям $\mathbf{g}(t)=\mathbf{w}(t), \mathbf{g}(t)=\xi(t)$; $\mathbf{y}_l(t)$ – l-й элемент вектора выхода, $\mathbf{C}^l$ – l-я строка матрицы выхода $\mathbf{C}$; $l=\overline{1,m}$; при этом в случае $\mathbf{g}(t)=\mathbf{w}(t)$
$$\mathbf{F}\mathbf{D}_x+\mathbf{D}_x\mathbf{F}^T=-\mathbf{G}\mathbf{N}\mathbf{G}^T,\ \mathbf{R}_{yl}(\tau)=\mathbf{C}^l\mathbf{R}_x(\tau)\left(\mathbf{C}^l\right)^T=\mathbf{C}^l e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{D}_x\left(\mathbf{C}^l\right)^T,\ \tau\geq 0,$$

а в случае $\mathbf{g}(t)=\xi(t)$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{\Gamma}_{\text{ф}}\mathbf{D}_{z_{\text{ф}}}+\mathbf{D}_{z_{\text{ф}}}\mathbf{\Gamma}_{\text{ф}}^{T}=-\mathbf{G}_{\text{ф}}\mathbf{N}\mathbf{G}_{\text{ф}}^{\text{T}},\\ \mathbf{F}\mathbf{D}_{xz_{\text{ф}}}+\mathbf{D}_{xz_{\text{ф}}}\mathbf{\Gamma}_{\text{ф}}^{T}=-\mathbf{G}\mathbf{C}_{\text{ф}}\mathbf{D}_{z_{\text{ф}}},\\ \mathbf{F}\mathbf{D}_{x}+\mathbf{D}_{x}\mathbf{F}^{T}=-\mathbf{D}_{xz_{\text{ф}}}\mathbf{C}_{\text{ф}}^{T}\mathbf{G}^{T}-\mathbf{G}\mathbf{C}_{\text{ф}}\mathbf{D}_{xz_{\text{ф}}}^{T},\\ \mathbf{R}_{yl}(\tau)=\mathbf{C}^{l}\mathbf{R}_{x}(\tau)\left(\mathbf{C}^{l}\right)^{T}=\mathbf{C}^{l}e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{D}_{x}\left(\mathbf{C}^{l}\right)^{T},\ \tau\geq 0\end{array}\right\}.$$

Третий способ основан на применении сингулярного [6] разложения корреляционной матрицы $\mathbf{R}_y(\tau)$, в соответствии с которым ее можно представить в форме

$$\mathbf{R}_y(\tau)=\mathbf{U}(\tau)\mathbf{\Sigma}(\tau)\mathbf{V}^T(\tau), \qquad (27)$$

где $\mathbf{U}(\tau)$ и $\mathbf{V}^T(\tau)$ соответственно матрицы левого и правого сингулярных базисов, обладающих свойством $\mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^T(\tau)=\mathbf{U}^T(\tau)\mathbf{U}(\tau)=\mathbf{I}$, $\mathbf{V}(\tau)\mathbf{V}^T(\tau)=\mathbf{V}^T(\tau)\mathbf{V}(\tau)=\mathbf{I}$, для $\forall\tau$; $\mathbf{\Sigma}(\tau)=\mathrm{diag}\left\{\alpha_i(\tau)=\left|\mu_i^{0.5}(\tau)\right|:\det\left(\mu_i(\tau)\mathbf{I}-\mathbf{R}_y^T(\tau)\mathbf{R}_y(\tau)\right)=0;\, i=\overline{1,m}\right\}$, $\alpha_i(\tau)$ – сингулярное число матрицы $\mathbf{R}_y(\tau)$. Тогда, в соответствии с (27), становятся справедливыми неравенства

$$\alpha_{\min}(\tau)=\mathbf{R}_{y\min}(\tau)\leq\left\|\mathbf{R}_y(\tau)\mathbf{V}_i(\tau)\right\|\leq\mathbf{R}_{y\max}(\tau)=\alpha_{\max}(\tau),$$

где $\alpha_{\min}(\tau)$ и $\alpha_{\max}(\tau)$ – соответственно минимальные и максимальные сингулярные числа матрицы $\mathbf{R}_y(\tau)$; $\mathbf{R}_{y\min}(\tau)$, $\mathbf{R}_{y\max}(\tau)$ – соответственно миноранта и мажоранта корреляционных функций системы в пространстве ее выходов. Нетрудно видеть, что миноранта $\tau_{k\min}$ и мажоранта $\tau_{k\max}$ интервала корреляции τ_k связаны неравенствами

$$\tau_{k\min}=\arg\max_{\tau}\left\{\mathbf{R}_{y\min}(\tau)=0{,}05\mathbf{R}_{y\min}(0)\right\}\leq\tau_k\leq\arg\max_{\tau}\left\{\mathbf{R}_{y\max}(\tau)=0{,}05\mathbf{R}_{y\max}(0)\right\}=\tau_{k\max}. \qquad (28)$$

Иллюстративные примеры

В качестве иллюстративного примера рассматривается ЛНС типа одномерный вход–одномерный выход, описываемая передаточной функцией (ПФ)

$$\Phi(s)=\frac{1}{T^2s^2+2\varsigma Ts+1}=\frac{\Omega^2}{s^2+2\varsigma\Omega s+\Omega^2},\ \Omega=T^{-1}. \qquad (29)$$

Представление вида (1) ЛНС с ПФ (28),

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{F}\mathbf{x}(t)+\mathbf{G}g(t);\ \mathbf{x}(0)=0;\ \ y(t)=\mathbf{C}\mathbf{x}(t), \qquad (30)$$

характеризуется матричными компонентами

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\Omega^2 & -2\varsigma\Omega\end{bmatrix};\ \mathbf{G}=\begin{bmatrix}0\\ \Omega^2\end{bmatrix};\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}. \qquad (30)$$

В соответствии с разработанной в настоящей работе методологией для формирования корреляционной функции $R_y(\tau)$ вектора выхода для стохастического воздействия $\mathbf{g}(t)$, как в случае «белого шума» $\mathbf{g}(t)=\mathbf{w}(t)$, так и в случае «окрашенного шума» $\mathbf{g}(t)=\xi(t)$, достаточно сформировать автономную систему вида (25) и провести ее исследование при начальном состоянии $\boldsymbol{\kappa}(0)=\mathbf{D}_x\mathbf{C}^T$.

В случае $\mathbf{g}(t)=\mathbf{w}(t)$ ставится задача исследовать зависимость вида корреляционной функции от коэффициента демпфирования ς ЛНС (29)–(31) в форме $R_y(\tau)=R_y(\tau,\varsigma)$ для трех значений этого коэффициента $\varsigma=1$, $\varsigma=0{,}25$, $\varsigma=0{,}05$.

Матрица дисперсий вектора состояния ЛНС при $\mathbf{g}(t)=\mathbf{w}(t)$ имеет вид

$$\mathbf{D}_x=\frac{N\Omega}{4\varsigma}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \Omega^2\end{bmatrix}.$$

В случае $\mathbf{g}(t)=\xi(t)$, где $\xi(t)$ – окрашенный экспоненциально коррелированный шум, формируемый из «белого шума» $\mathbf{w}(t)$ с помощью формирующего фильтра с передаточной функцией

$W_ф(s) = \Omega_ф\left(s + \Omega_ф\right)^{-1}$, ставится задача исследовать зависимость вида корреляционной функции от отношения частот $\Omega/\Omega_ф$ в форме $R_y(\tau) = R_y\left(\tau, \Omega/\Omega_ф\right)$ для трех значений этого отношения: $\Omega/\Omega_ф = 2$, $\Omega/\Omega_ф = 1$, $\Omega/\Omega_ф = 0,5$ и $\varsigma = 0,25$. Матрица дисперсий вектора состояния ЛНС при $\mathbf{g}(t) = \xi(t)$ имеет вид

$$\mathbf{D}_x = \frac{N\Omega}{2}\begin{bmatrix} \dfrac{\Omega^2 + \Omega\Omega_ф/2\varsigma}{\Omega^2 + 2\varsigma\Omega\Omega_ф + \Omega_ф^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\Omega^3\Omega_ф/2\varsigma}{\Omega^2 + 2\varsigma\Omega\Omega_ф + \Omega_ф^2} \end{bmatrix}.$$

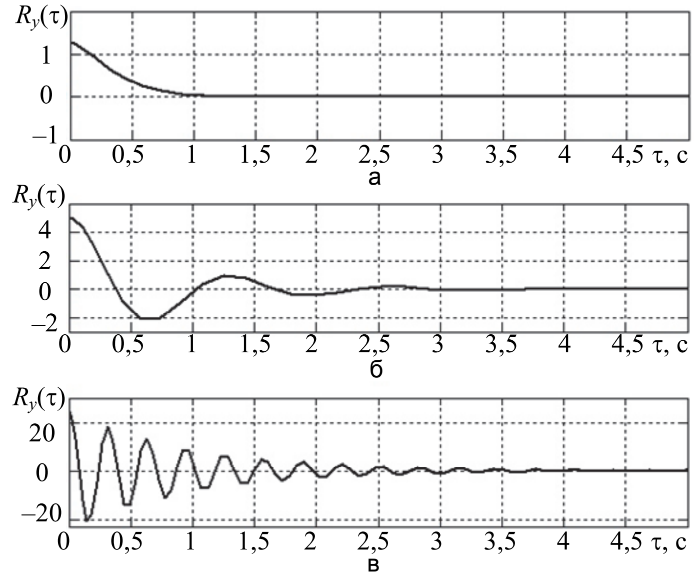

Рис. 1. Графики корреляционных функций при $\varsigma = 1$ (а); $\varsigma = 0,25$ (б); $\varsigma = 0,05$ (в)

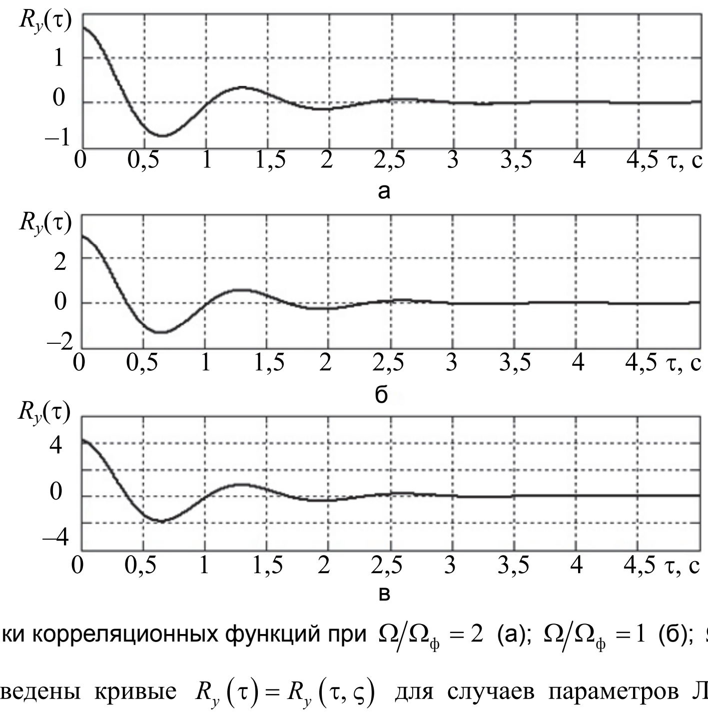

Рис. 2. Графики корреляционных функций при $\Omega/\Omega_ф = 2$ (а); $\Omega/\Omega_ф = 1$ (б); $\Omega/\Omega_ф = 0,5$ (в)

На рис. 1 приведены кривые $R_y(\tau) = R_y(\tau, \varsigma)$ для случаев параметров ЛНС $\Omega = 5\,c^{-1}$ и $\varsigma = 1$ (рис. 1, а), $\varsigma = 0,25$ (рис. 1, б), $\varsigma = 0,05$ (рис. 1, в). На рис. 2 приведены кривые $R_y(\tau) = R_y\left(\tau, \Omega/\Omega_ф\right)$ для случаев параметров ЛНС $\Omega = 5\,c^{-1}$ и $\Omega/\Omega_ф = 2$ (рис. 2, а), $\Omega/\Omega_ф = 1$ (рис. 2, б), $\Omega/\Omega_ф = 0{,}5$ (рис. 2, в). Из графиков видно, что с уменьшением коэффициента затухания ς системы (29) заметно увеличивается интервал корреляции τ_k (28), что следует иметь в виду в случае необходимости организации дополнительной обработки [14, 15] стохастического сигнала на выходе системы.

Заключение

Показано, что формирование корреляционных функций линейных непрерывных систем может быть осуществлено с использованием фундаментальных матриц их решений, дополненных матричными уравнениями Ляпунова для вычисления стационарных матриц дисперсий, позволяющих конструировать «начальные» условия этих решений.

Литература

1. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974. 696 с.
2. Иванов В.А., Медведев В.С., Чемоданов Б.К., Ющенко А.С. Математические основы теории автоматического управления: Учеб. пособие: В 3 т. / под ред. Б.К. Чемоданова. 3-е изд. Т. 3. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2009. 352 с.
3. Kwakernaak H., Sivan R. Linear Optimal Control Systems. Wiley-Interscience, 1972. 608 p.
4. Davis M.H.A. Linear Estimation and Stochastic Control. London: Chapman and Hall Ltd., 1977. 224 p.
5. Oppenheim A.V., Schafer R.W. Digital Signal Processing. New Jersey: Prentice Hall, 1975. 585 p.
6. Golub G.H., Van Loan C.F. Matrix Computations. 4th ed. Johns Hopkins University Press, 2012. 790 p.
7. Генин Л.Г., Свиридов В.Г. Введение в статистическую теорию турбулентности. М.: МЭИ, 2007. 100 с.
8. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. СПб.: Профессия, 2003. 752 с.
9. Oksendal B. Stochastic Differential Equations: An Introduction with Application. 6th ed. Berlin: Springer, 2003. 379 p.
10. Ушаков А., Дударенко Н., Слита О. Современная теория многомерного управления: аппарат пространства состояний. Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. 428 с.
11. Dudarenko N.A., Ushakov A.V. Matrix formalism of the degeneration control problem of multichannel dynamical systems under vector stochastic exogenous impact of the colored noise type // Journal of Automation and Information Sciences. 2013. V. 45. N 6. P. 36–47. doi: 10.1615/JAutomatInfScien.v45.i6.40
12. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976. 424 с.
13. Дударенко Н.А., Полинова Н.А., Ушаков А.В. Фундаментальная матрица линейной непрерывной системы в задаче оценки ее транспортного запаздывания // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2014. № 5 (93). С. 32–37.
14. Typysev V.A., Stepanov O.A., Loparev A.V., Litvinenko Y.A. Guaranteed estimation in the problems of navigation information processing // Proc. IEEE Int. Conf. on Control Applications (CCA'09). St. Petersburg, 2009. Art. 5281081. P. 1672–1677. doi: 10.1109/CCA.2009.5281081
15. Лопарев А.В., Степанов О.А., Тупысев В.А., Тосикова Т.П. Синтез алгоритмов обработки навигационной информации с гарантированным качеством оценивания. Труды XVI международной конференции по интегрированным навигационным системам. Санкт-Петербург, 2009. С. 207–210.

Вундер Нина Александровна – аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, polinova_nina@mail.ru

Надькина Екатерина Александровна – магистрант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, nadkina.katya@gmail.com

Ушаков Анатолий Владимирович – доктор технических наук, профессор, профессор, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, 79214215187@ya.ru

Чугина Юлия Владимировна – аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, chugina.yulya@mail.ru

Nina A. Vunder – postgraduate, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, polinova_nina@mail.ru

Ekaterina A. Nad'kina – master student, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, nadkina.katya@gmail.com

Anatoliy V. Ushakov – D.Sc., Professor, Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, 79214215187@ya.ru

Julia V. Chugina – postgraduate, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, chugina.yulya@mail.ru