



УДК 532.529

ПРОИЗВОЛЬНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛОСКИХ СВЕРХЗВУКОВЫХ ПОТОКОВ

П.В. Булат^a, К.Н. Волков^{a,b}^a Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация^b Университет Кингстона, Лондон, SW15 3DW, Великобритания

Адрес для переписки: Pavelbulat@mail.ru

Информация о статье

Поступила в редакцию 13.07.15, принята к печати 08.10.15

doi:10.17586/2226-1494-2015-15-6-1155-1168

Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Булат П.В., Волков К.Н. Произвольное взаимодействие плоских сверхзвуковых потоков // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2015. Т. 15. № 6. С. 1155–1168.

Аннотация

Предмет исследования. Рассматривается задача Римана о распаде произвольного разрыва параметров при столкновении под некоторым углом двух плоских потоков. Задача решается в точной постановке. К задаче о произвольном взаимодействии двух сверхзвуковых потоков может быть сведено большинство случаев интерференции как стационарных, так и нестационарных газодинамических разрывов, течения за которыми – сверхзвуковые. В зависимости от соотношения параметров в потоках исходящие разрывы могут быть или скачками уплотнения, или волнами разрежения. В некоторых случаях решение может отсутствовать вовсе. Важно уметь находить области существования соответствующих решений, так как вид образующихся ударно-волновых структур в этих областях заранее известен. Задача о распаде разрыва используется в численных методах типа метода Годунова. Обычно применяется приближенное решение, известное как решение Ошера, но в ряде задач, когда требуется высокая точность, необходимо решать эту задачу в точной постановке. **Основные результаты.** Рассмотрены области существования решений с различными типами ударно-волновой структуры. Аналитически определены границы существования решений с двумя исходящими скачками уплотнения, а также с исходящими скачком и волной разрежения. Выявлена область чисел Маха и углов, под которым взаимодействуют потоки, при которых решение отсутствует. Специфические течения с двумя исходящими волнами разрежения не рассматриваются. **Практическая значимость.** Результаты работы дополняют теорию интерференции стационарных газодинамических разрывов и могут быть использованы при разработке новых методов численного расчета с выделением разрывов.

Ключевые слова

волна разрежения, задача Римана, распад произвольного разрыва, скачок уплотнения, ударная волна, ударно-волновые структуры.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (Соглашение № 14.575.21.0057, уникальный идентификатор прикладных научных исследований RFMEFI57514X0057).

ARBITRARY INTERACTION OF PLANE SUPERSONIC FLOWS

P.V. Bulat^a, K.N. Volkov^b^a ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation^b Kingston University, London, SW15 3DW, UK

Corresponding author: pavelbulat@mail.ru

Article info

Received 13.07.15, accepted 08.10.15

doi:10.17586/2226-1494-2015-15-6-1155-1168

Article in Russian

For citation: Bulat P.V., Volkov K.N. Arbitrary interaction of plane supersonic flows. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2015, vol. 15, no. 6, pp. 1155–1168.

Abstract

Subject of study. We consider the Riemann problem for parameters at collision of two plane flows at a certain angle. The problem is solved in the exact statement. Most cases of interference, both stationary and non-stationary gas-dynamic discontinuities, followed by supersonic flows can be reduced to the problem of random interaction of two supersonic flows. Depending on the ratio of the parameters in the flows, outgoing discontinuities turn out to be shock waves, or rarefaction waves. In some cases, there is no solution at all. It is important to know how to find the domain of existence for the relevant

decisions, as the type of shock-wave structures in these domains is known in advance. The Riemann problem is used in numerical methods such as the method of Godunov. As a rule, approximate solution is used, known as the Osher solution, but for a number of problems with a high precision required, solution of this problem needs to be in the exact statement.

Main results. Domains of existence for solutions with different types of shock-wave structure have been considered. Boundaries of existence for solutions with two outgoing shock waves are analytically defined, as well as with the outgoing shock wave and rarefaction wave. We identify the area of Mach numbers and angles at which the flows interact and there is no solution. Specific flows with two outgoing rarefaction waves are not considered. **Practical significance.** The results supplement interference theory of stationary gas-dynamic discontinuities and can be used to develop new methods of numerical calculation with extraction of discontinuities.

Keywords

rarefaction wave, Riemann problem, shock wave, shock-wave structures.

Acknowledgements

The study has been financially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (agreement № 14.575.21.0057, the unique identifier of applied research RFMEFI57514X0057).

Введение

Рассматривается задача о распаде произвольного газодинамического разрыва (ГДР) в пространстве-времени размерностью, равной двум. Ставится задача аналитического определения типов исходящих разрывов и методики расчета параметров за ними. Напомним основные понятия и терминологию. Газодинамический разрыв нулевого порядка – область резкого, скачкообразного изменения газодинамических переменных [1]. Нестационарный разрыв, через который происходит перетекание потока, принято называть ударной волной, стационарный – скачком уплотнения [2, 3]. Существуют разрывы, через которые газ не протекает, а давление по его сторонам одинаковое, плотность же и некоторые другие параметры могут отличаться. Такой разрыв называется тангенциальным (линия скольжения), если его поверхность параллельна векторам скорости по его сторонам. В остальных случаях он называется контактным. Простая волна – область плавного изменения параметров, ограниченная с двух сторон разрывами первого порядка, на которых скачком изменяются первые производные газодинамических разрывов.

Если в пространстве-времени возник по какой-то причине разрыв параметров, то при изменении одного из параметров, например, времени или пространственной координаты, происходит его трансформация (распад) в ударно-волновую структуру (УВС), состоящую из нескольких волн и разрывов. При этом с кинематической точки зрения временные и пространственные координаты абсолютно равноправны и нет никакой разницы между распадом одномерного нестационарного и двумерного стационарного разрыва. При взаимодействии стационарных газодинамических разрывов также возникают задачи о распаде произвольного разрыва. Примером может служить случай столкновения под некоторым углом двух сверхзвуковых потоков газа [4], имеющих различные термодинамические переменные.

В 1926 г. Н.Е. Кочиным было выполнено общее исследование задачи о распаде произвольного разрыва [5] для политропных газов. Более полное исследование данной задачи в 1946–1953 гг. было проведено Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшицем [6], а в современных терминах – Т.А. Кобзевой и Н.Я. Моисеевым [7], В.Н. Усковым [8, 9], О. Igra [10]. На основе этих решений С.К. Годуновым был развит численный метод [11, 12] расчета гиперболических систем уравнений [13]. Несмотря на то, что метод известен уже давно, его положительные качества, такие как явное определение вида исходящих разрывов, в том числе и на неструктурированных сетках [14], привлекают к нему внимание, и метод продолжает активно совершенствоваться [15, 16].

Под ударно-волновыми системами (структурами) понимаются совокупности нескольких волн и разрывов, через которые последовательно проходят линии тока или траектории частиц в установившихся или нестационарных течениях. Ударно-волновые структуры (УВС) возникают в результате взаимодействия (пересечения, интерференции) волн или разрывов между собой, с тангенциальными, контактными разрывами, свободными или твердыми поверхностями. Различают образование УВС в результате взаимодействия догоняющих или встречных разрывов, распада или ветвления разрывов.

По отношению к точке, в которой образуется УВС, газодинамические разрывы делятся на приходящие (R_a) и исходящие (R_p). Причиной образования УВС являются приходящие в одну точку волны и разрывы. Исходящие волны (разрывы) представляют собой следствие взаимодействия приходящих волн (разрывов). У приходящих разрывов проекция вектора скорости на плоскость разрыва направлена к точке интерференции, а у исходящих – от нее (рис. 1).

Первые УВС были описаны в 1878 г. Э. Махом [17]. Он экспериментально зафиксировал бегущие ударные волны и возникающие из них УВС.

Существуют разные подходы к исследованию УВС и решению задачи об интерференции ГДР. В.Н. Усковым в 1979 г. был предложен подход на основе обобщенной УВС [18]. Обобщенная УВС составлена из всех возможных типов разрывов и волн: трех приходящих (1, 2, 5 на рис. 2), одного главного исходящего (4 на рис. 2), одного тангенциального и одного отраженного разрывов (3 на рис. 2). Последний может быть как скачком уплотнения, так и волной разрежения.

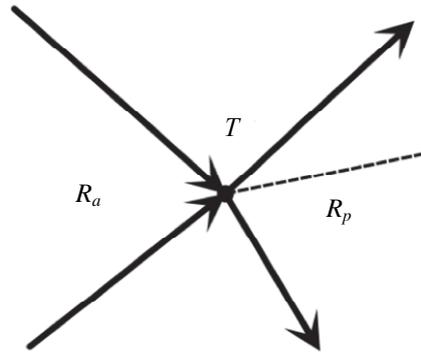


Рис. 1. Приходящие R_a и исходящие R_p разрывы, T – точка интерференции

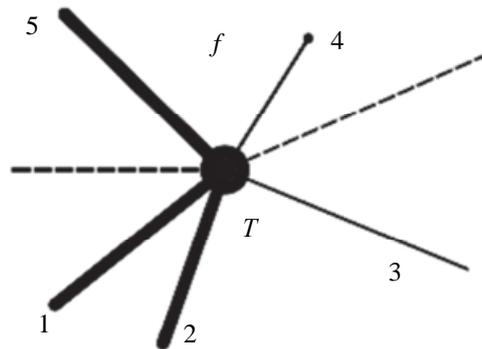


Рис. 2. Обобщенная ударно-волновая структура:

1, 2 – приходящие скачки уплотнения одного направления; 3 – отраженный разрыв (скачок или волна); 4 – главный исходящий разрыв; 5 – приходящий встречный скачок уплотнения. Пунктиром показаны тангенциальные разрывы, f – поток, проходящий через главный скачок уплотнения, g – поток, проходящий через отраженный разрыв, T – точка интерференции

Формула интерференции в общем виде может быть записана как

$$\sum_k R_a^k \rightarrow \sum_k R_p^k. \quad (1)$$

Если в конкретной задаче нулевого порядка (1) отсутствуют некоторые из приходящих разрывов ($\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$ или $\bar{\sigma}_5$), то интенсивность такого разрыва следует считать равной нулю. Например, взаимодействие догоняющих скачков уплотнения (разрывов одного направления) можно представить в виде

$$\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 \rightarrow \bar{r}_3 + \hat{t} + \bar{\sigma}_4. \quad (2)$$

Тангенциальный разрыв разделяет два потока, прошедших через разрывы 1 и 2 (догоняющие приходящие скачки уплотнения) и отраженный 3.

Для встречных скачков уплотнения из (1) имеем

$$\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_5 \rightarrow \bar{\sigma}_3 + \hat{t} + \bar{\sigma}_4. \quad (3)$$

Учитывая направление движения взаимодействующих волн (спутные (\vec{W}) и встречные (\vec{W}) по отношению к исходному потоку), получаем два класса задач об их взаимодействии: приходящие волны одного ($\vec{W} + \vec{W}$ или $\vec{W} + \vec{W}$) или различных ($\vec{W} + \vec{W}$) направлений (см., например, (3)) Как при интерференции, так и при рефракции волн встречаются оба класса задач. Очевидно, что волны разных направлений пересекаются всегда, а возможность взаимодействия волн одного направления (2) нуждается в дополнительном анализе.

Данная классификация является неполной, так как не включает простые волны. Пропущен и центр центрированной волны сжатия, который также является разрывом [19, 20] и может присутствовать в обобщенной УВС в качестве одного из приходящих разрывов. УВС могут объединяться в более сложные системы, состоящие из тройных конфигураций ударных волн, объединенных мостообразными скачками (рис. 3).

Задача о распаде произвольного разрыва играет важную роль в современной газовой динамике, позволяет выполнять классификацию УВС и решать конкретные задачи, например, при анализе течения в окрестности кромки сопла [21] и во многих других практически важных случаях [22]. В.Н. Усков с помощью схемы обобщенной УВС и метода анализа распада произвольного разрыва последовательно решил следующие задачи:

- регулярное отражение скачка и ударной волны от стенки;
- интерференция встречных и догоняющих скачков;
- рефракция скачка уплотнения на тангенциальном разрыве;
- рефракция одномерной ударной волны на контактном разрыве;
- нерегулярное отражение скачка от стенки, оси и плоскости симметрии.

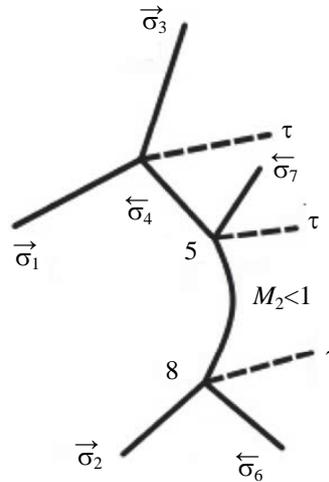


Рис. 3. Пример объединения нескольких ударно-волновых структур в одну более сложную конфигурацию. M_2 – число Маха; σ_1, σ_2 – исходные приходящие скачки уплотнения, ветвящиеся на исходящие скачки σ_3, σ_4 и σ_5, σ_6 ; две тройные точки объединены в общую конфигурацию мостообразным скачком переменной интенсивности 5–8, с образованием исходящего скачка σ_7 , тангенциального разрыва τ , стрелки показывают направление разрыва: поток на скачке разворачивается против часовой стрелки (\rightarrow) и по часовой стрелке (\leftarrow)

Кроме этого, с использованием общего уравнения интерференции и обобщенной УВС были решены задачи расчета аэродинамических коэффициентов сверхзвуковых профилей крыла [23], а также решена задача о расчете параметров тройных конфигураций (ТК) стационарных скачков уплотнения [24], введено разделение ТК на конфигурации трех основных типов: ТК-1, ТК-2, ТК-3 и двух переходных. И наконец, в 1990 г. совместно с А.Л. Старых было выполнено комплексное исследование областей существования различных решений общего уравнения интерференции ГДР [25].

Постановка задачи

Задача о расчете любой ударно-волновой структуры сводится к определению характеристик исходящих разрывов по известным параметрам течения в областях f и g перед ними (рис. 2), а также определению типов исходящих разрывов. Ниже данная задача решается в наиболее общей постановке. Рассматриваются все возможные случаи и допустимые виды УВС. Задача о расчете любой ударно-волновой структуры сводится к определению характеристик исходящих разрывов по известным параметрам течения в областях f и g перед ними.

Расчет взаимодействия произвольных сверхзвуковых потоков f и g , с заданными газодинамическими функциями Φ_i строится на основе выполнения условий динамической совместности на тангенциальном разрыве $\hat{\tau}$, разделяющем исходящие разрывы (УДС- $\hat{\tau}$):

$$\hat{p}_f = \hat{p}_g, \quad \hat{\theta}_f = \hat{\theta}_g. \quad (4)$$

Произвольный разрыв, характеризующий различие газодинамических функций в областях f и g , можно определить двумя параметрами:

$$J_0 = p_g / p_f, \quad \beta_g = \beta_f - \beta_0, \quad (5)$$

которые являются известными или заданными величинами. Очевидно, УДС- $\hat{\tau}$ (4) выполняются, если

$$J_g = J_0 / J_f, \quad \beta_g = \beta_f - \beta_0, \quad (6)$$

где β_g и β_f – углы поворота потока на исходящих разрывах. Разности $[\Phi_i^\circ] = \Phi_{if}^\circ - \Phi_{ig}^\circ$ характеризуют различие параметров в областях f и g .

Если $[\Phi_i^\circ] \neq 0$, то возникает газодинамический разрыв нулевого порядка, и решение любой из задач об интерференции разрывов сводится к задаче о распаде произвольного стационарного разрыва. Разрыв нулевого порядка, определенный формулами (6), может быть изображен в виде вектора, отложенного из начала координат в точку с координатами $\{\Lambda = \ln J; \beta\}$. Это позволяет первое из уравнений (5) записать

как сумму $\Lambda_0 = \Lambda_g + \Lambda_f$, а решение обобщенного уравнения интерференции представить в виде векторов $\vec{r}_f = \vec{r}_0 + \vec{r}_g$ (рис. 4).

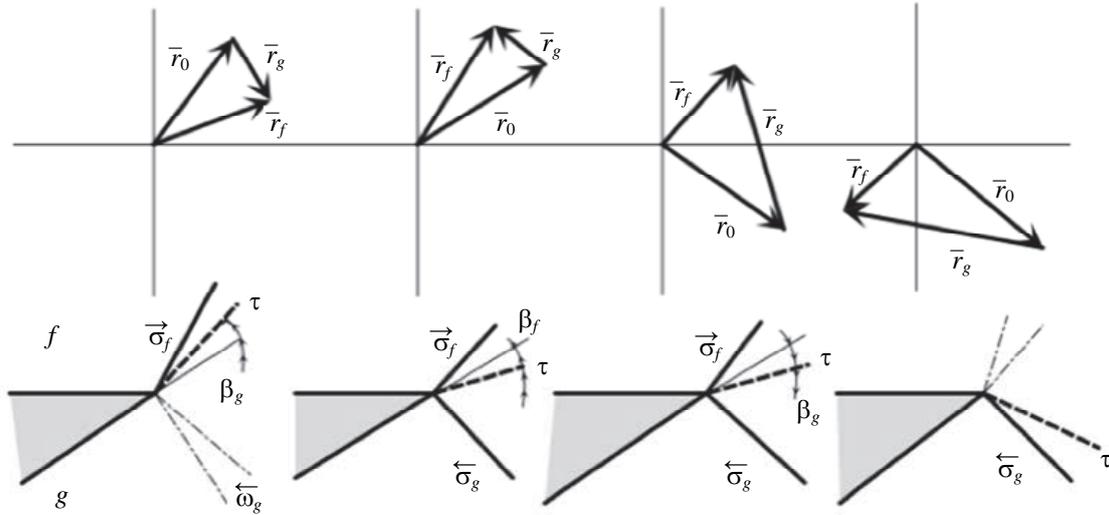


Рис. 4. Схемы распада произвольного стационарного разрыва ($\vec{\omega}_g$ и $\vec{\omega}_f$ – волны разрежения)

Рассмотрим столкновение под некоторым углом β_{1-2} двух сверхзвуковых потоков газа, имеющих различные термодинамические переменные – давление p и скорость u (рис. 5). Пусть для определенности $p_1 \geq p_2$, тогда исходящий разрыв R_1 в зависимости от соотношения величин $p_1 u_1, p_2 u_2$ может быть или волной разрежения, или скачком уплотнения. Другой разрыв σ_2 – всегда скачок уплотнения. Понятно, что ничто не мешает поменять исходящие разрывы R_1 и σ_2 местами и ввести обозначение R_2 и σ_1 , считая, что $p_1 \leq p_2$.

Важно уметь однозначно определять области существования УВС различных типов и строить эффективные алгоритмы решения этой важной задачи.

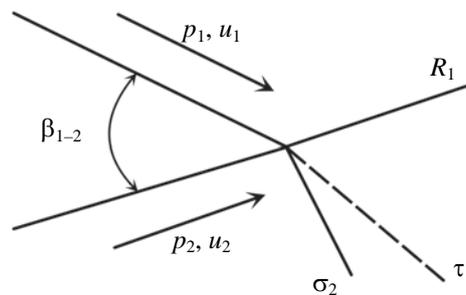


Рис. 5. Интерференция двух плоских сверхзвуковых потоков : $u_{1,2}$ – скорость, $p_{1,2}$ – давление, β_{1-2} – угол между потоками 1 и 2, σ_2 – исходящий скачок уплотнения, τ – тангенциальный разрыв

Задача о распаде произвольного стационарного разрыва ставится следующим образом: по заданным значениям газодинамических переменных до разрывов 1 и 2 определить газодинамические параметры за этими разрывами. Решение данной задачи строится на основе выполнения традиционных условий динамической совместности на тангенциальном разрыве τ , заключающихся в равенстве статических давлений и коллинеарности векторов скоростей по сторонам τ :

$$\hat{p}_1 = \hat{p}_2, \quad \beta_{1-2} - \beta_1 = \beta_2. \quad (7)$$

Здесь \hat{p}_1 и \hat{p}_2 – давления за разрывами 1 и 2, β_1 и β_2 – углы поворота потока. Для определенности будем считать, что статическое давление p_1 перед R_1 больше или равно статическому давлению p_2 перед σ_2 . Вводя интенсивность взаимодействия J_{1-2} , а также интенсивности J_1 и J_2 разрывов 1 и 2:

$$J_{1-2} = \frac{p_1}{p_2}, \quad J_1 = \frac{\hat{p}_1}{p_1}, \quad J_2 = \frac{\hat{p}_2}{p_2}, \quad (8)$$

условия (7) можно переписать в виде

$$J_1 J_{1-2} = J_2, \quad \beta_0 - \beta_f = \beta_g, \quad (9)$$

при этом $J_{1-2} \geq 1$. На скачке уплотнения зависимость $\beta(J)$ имеет вид

$$\beta(J) = \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{(1+\varepsilon)M^2 - (J+\varepsilon)}{J+\varepsilon} \frac{(1-\varepsilon)(J-1)}{(1+\varepsilon)M^2 - (1-\varepsilon)(J-1)}} \right]. \quad (10)$$

На изэнтропной волне разрежения, в отличие от (10), угол поворота потока рассчитывается по формуле

$$\beta = \omega(M) - \omega(M_1). \quad (11)$$

Здесь $\omega(M)$ – функция Прандтля–Майера:

$$\omega(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} (M^2 - 1)} \right) - \operatorname{arctg} \sqrt{M^2 - 1}, \quad (12)$$

где M и M_1 – числа Маха до и за волной, $\varepsilon = (\gamma-1)/(\gamma+1)$, γ – показатель адиабаты. Связь чисел Маха в (11) и (12) M и M_1 устанавливается с помощью общего для изэнтропных и ударных волн соотношения

$$\mu/\mu_1 = JE, \quad (13)$$

где $\mu = 1 + \varepsilon(M^2 - 1)$, $E = \rho/\rho_1$. Значения E и J связаны адиабатами Рэнкина–Гюгонио на ударных волнах (E_D) и Лапласа–Пуассона на изэнтропных волнах (E_R):

$$E_D = (1 + \varepsilon J)/(J + \varepsilon), \quad E_R = J^{-1/\gamma}. \quad (14)$$

Следовательно, значение M_1 в (11) выражается с учетом (13), (14) через интенсивность J волны по формуле $\mu_1 = \mu J^{-1/\eta}$, где $(\eta = (1 + \varepsilon)/2\varepsilon)$.

Таким образом, (9) представляет собой систему из двух уравнений относительно двух неизвестных: J_1 и J_2 . Так как интенсивности J_1 и J_2 связаны зависимостью $J_2 = J_{1-2} J_1$, систему (9) можно свести к одному уравнению относительно интенсивности $J \equiv J_2$:

$$\beta_2(J, M_2, \gamma_1) = -\beta_1(J/J_{1-2}, M_1, \gamma_1) + \beta_{1-2}. \quad (15)$$

Зная интенсивность волны, можно по известным значениям газодинамических переменных до волны определить любые газодинамические параметры за ней.

Определение областей существования

Анализ решения системы (15) удобно производить на плоскости сердцевидных кривых $\Lambda = \ln J(\beta)$, которые также называются ударными полярами. Каждая такая кривая имеет вершину в точке, соответствующей максимальной интенсивности скачка $J_m = (1 + \varepsilon)M^2 - \varepsilon$. Принято также выделять две точки, важные для анализа области существования решений о распаде разрыва. Первая из них – интенсивность J_l , отвечающая максимальному углу поворота потока на одиночном скачке уплотнения:

$$J_l = \frac{M^2 - 2}{2} + \sqrt{\left(\frac{M^2 - 2}{2} + (1 + 2\varepsilon)(M^2 - 1) + 2 \right)}. \quad (16)$$

Угол поворота потока на скачке с интенсивностью J_l определяется из соотношения

$$\beta_l(J_l) = \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\left(\frac{1 - E_l}{1 - \varepsilon} \right) \frac{(1 - E_l)}{2\sqrt{E_l}}} \right), \quad (17)$$

где $E_l = E_D(J_l)$ – выражение адиабаты Рэнкина–Гюгонио (8).

Вторая особая точка на ударной поляре связана с понятием огибающей сердцевидных кривых, ограничивающей на плоскости $\Lambda - \beta$ область существования одиночного скачка уплотнения. Огибающая находится из условия

$$\frac{\partial \beta}{\partial M} = 0, \quad J_e = M^2 - 1, \quad \beta_e(J) = \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - E_e}{2\sqrt{E_e}} \right), \quad (18)$$

где $E_e = E_D(J_e)$ – выражение адиабаты Рэнкина–Гюгонио (14). Из уравнений (18) видно, что огибающая существует только для $M \geq \sqrt{2}$.

Кривые $J_l(\beta_l)$ и $J_e(\beta_e)$ (рис. 6), задаваемые формулами (16)–(18) соответственно, разбивают первый квадрант плоскости $\Lambda - \beta$ на три подобласти (1, 2, 3 на рис. 2), в которых исходящий разрыв 2 является скачком (I) и, в зависимости от числа Маха M_2 – либо скачком, либо волной (II, III).

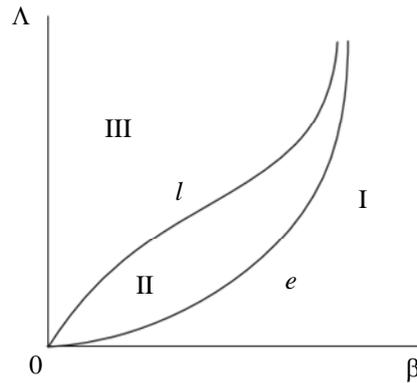


Рис. 6. Область существования решений: l – кривая, соответствующая предельному углу поворота на скачке; e – кривая, соответствующая огибающей сердцевидных кривых; I – исходящий разрыв 2 – скачок уплотнения; II – исходящий разрыв 2 в зависимости от значения числа Маха – или скачок уплотнения, или волна разрежения; III – или скачок уплотнения, или волна разрежения

Таким образом, анализ областей существования разных УВС, возникающих при распаде разрыва в точке взаимодействия под заданным углом двух плоских сверхзвуковых потоков, состоит в построении на плоскости ударных поляр $\Lambda(\beta)$ кривых $\Lambda_l(\beta_l)$, $\Lambda_e(\beta_e)$ и нахождении особого числа Маха, делящего область II на две подобласти.

Рассмотрим различные варианты решений на плоскости поляр при заданном M . Если построить поляру 1 ($M=M_1$) из начала координат, а поляру 2 ($M=M_2$), отвечающую волне 2, из точки с координатами $\{\Lambda_{1-2}, \beta_{1-2}\}$, то в точке пересечения поляр будут выполнены оба условия (9). Следовательно, точки пересечения указанных кривых отображают на плоскости сердцевидных кривых математическое решение задачи.

Как видно из рис. 7, в точке распада разрыва возможно возникновение двух различных ударно-волновых структур: с отраженным разрывом – скачком уплотнения и отраженным разрывом – волной разрежения. Очевидно, что разделяет эти два случая структура, в которой исходящий разрыв 2 вырождается в разрывную характеристику. Ниже подробно рассмотрены оба случая.

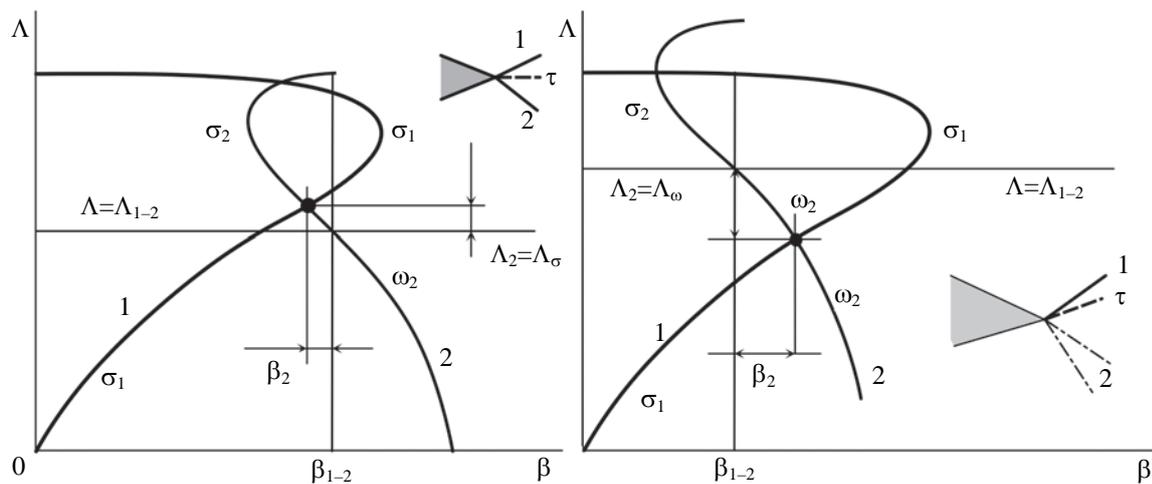


Рис. 7. Два возможных случая распада произвольного разрыва на плоскости ударных поляр

Случай, когда отраженный разрыв – скачок уплотнения

Пусть разрыв R_1 является скачком уплотнения σ_1 . Тогда нужно определить область существования решений для УВС, состоящих из двух скачков и тангенциального разрыва. Построим поляру, отвечающую скачку уплотнения σ_2 и числу Маха $M=M_2$, из начала координат $\{\Lambda = 0, \beta = 0\}$, а поляру, отвечающую волне R_1 (в данном случае скачок уплотнения σ_1), построим из точки с координатами $\{\Lambda_{1-2}, \beta_{1-2}\}$. Тогда точка пересечения поляр («O» на рис. 8) будет соответствовать выполнению условий динамической совместности и математическому решению задачи (на рис. 8, а).

Множество таких точек, построенное при заданных $\{\Lambda_{1-2}, \beta_{1-2}\}$ для различных M_1 и M_2 , образует область существования решения. Для того чтобы ее найти, нужно построить огибающую e_1 поляр 1 и

огibaющую e_2 поляра 2 (рис. 8, б). Любая точка O пересечения поляр, лежащая внутри области, ограниченной двумя огibaющими e_1 и e_2 (затонирована голубым цветом на рис. 8), принадлежит области существования решений.

Для заданного угла взаимодействия потоков β_{1-2} и заданного отношения давлений Λ_{1-2} в этих потоках существуют два предельных числа Маха M_{1e} и M_{2e} , ограничивающих сверху область чисел Маха в потоках 1 и 2, в которой решение отсутствует. Очевидно, что они соответствуют касанию поляры 1 с огibaющей поляры e_2 и, наоборот, касанию поляры 2, выпущенной из точки $\{\Lambda_{1-2}, \beta_{1-2}\}$, с огibaющей поляры e_1 .

На рис. 8 показаны две такие поляры M_{1e} и M_{2e} . Таким образом, для чисел Маха $M_1 < M_{1e}$ решение отсутствует при любых значениях M_2 . И наоборот, для чисел Маха $M_2 < M_{2e}$ решение отсутствует при любых значениях M_1 . Условия $M_1 > M_{1e}$ и $M_2 > M_{2e}$ являются необходимыми, но не достаточными для существования решения.

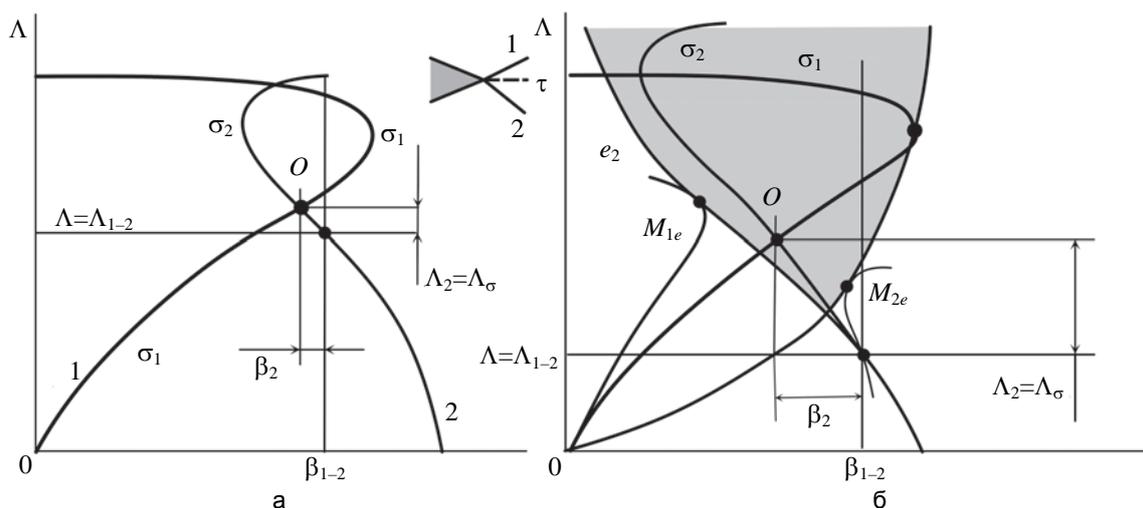


Рис. 8. Область существования решения с двумя исходящими скачками уплотнения при заданных угле взаимодействия потоков β_{1-2} и отношении давлений Λ_{1-2} : графическое решение (точка O), соответствующее взаимодействию сверхзвуковых потоков (а); точка лежит внутри области, образованной двумя огibaющими e_1 и e_2 (б). 1 – поляра, соответствующая скачку σ_1 ; 2 – поляра, соответствующая скачку σ_2 ; e_1 – огibaющая поляра семейства 1, построенных при различных числах Маха M_1 ; e_2 – огibaющая поляра семейства 2, построенных при различных числах Маха M_2 ; M_{1e} – предельное число Маха, при котором поляра 1 имеет общие точки с огibaющей e_2 и решение задачи о распаде разрыва существует; M_{2e} – предельное число Маха, при котором поляра 2 имеет общие точки с огibaющей e_1 и решение задачи о распаде разрыва существует; O – точка, соответствующая решению

Если угол β_{1-2} больше суммы максимально возможных для данного газа углов разворота на скачках 1, 2

$$\beta_{\text{lim}}(\gamma) = \arctg \frac{1 - \varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon}}, \quad (19)$$

то огibaющие e_1 и e_2 не пересекаются ни при каких числах Маха и решение отсутствует. Уравнение (19) соответствует касанию огibaющих e_1 и e_2 . В точках касания двух кривых выполняется условие равенства ординат и равенства нулю разности частных производных. Для точки касания поляры 1 с огibaющей e_2 это приводит к следующей системе уравнений:

$$J_1 = J_{1-2} J_e; J_e = J_2; \quad \beta_e(J_1) = \beta_{1-2} + \beta_2(M_{2e}, J_2); \quad (20)$$

$$\frac{\partial \beta_e(J_1)}{\partial \Lambda_1} - \frac{\partial \beta_2(M_2, J_2)}{\partial \Lambda_2} = 0$$

$$\frac{\partial \beta_e(J_1)}{\partial \Lambda_1} = \frac{J_1(1 - \varepsilon)}{(J_1 + 1)\sqrt{(J_1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon J_1)}}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \beta_2(M_2, J_2)}{\partial \Lambda_2} = \frac{\chi}{2\gamma J} \sqrt{\frac{\varepsilon}{A(J + \varepsilon)}} \times \frac{B + A(1 + \varepsilon)}{\mu(J + \varepsilon) - J(1 + \varepsilon J)(1 - \varepsilon)},$$

$$A = \mu(1 + \varepsilon) - (1 + \varepsilon J), \quad (22)$$

$$B = A(J + \varepsilon) - \varepsilon(1 + \varepsilon J)(J - 1); \mu = 1 + \varepsilon(M^2 - 1).$$

Для поляры 2 и огибающей e_1 точка касания находится аналогично, только индексы 1 в выражениях для всех производных нужно поменять на 2.

Пусть теперь число Маха $M_2 > M_{2e}$, и решение возможно. Найдем диапазон чисел Маха M_1 , при котором задача имеет решение. При небольших числах Маха поляры 1 и 2 не пересекаются (рис. 9), и решение отсутствует. По мере увеличения числа Маха наступает момент, когда поляры 1 и 2 касаются в точке ($M_1 = M_{1l}$). При дальнейшем увеличении M кривые пересекаются в двух точках, нижняя соответствует физически реализуемому решению. Далее с ростом M_1 две точки пересечения сливаются в одну ($M_1 = M_{2l}$), и при $M_1 > M_{2l}$ поляры больше уже не пересекаются. Диапазон (M_{1l}, M_{2l}) является областью существования решения задачи об интерференции плоских сверхзвуковых потоков. Аналогично определяется диапазон (M_{1l}, M_{2l}) для числа M_2 (рис. 9).

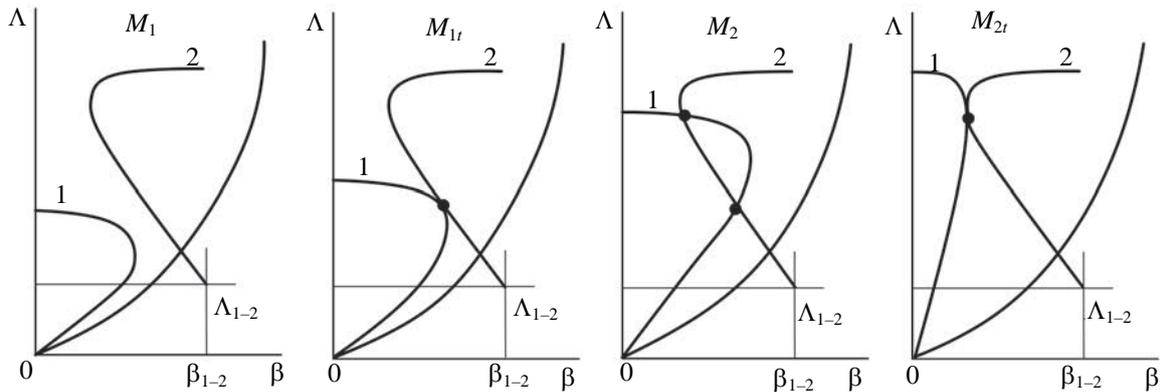


Рис. 9. Картина решения на плоскости поляр при различных числах Маха. $M_1 < M_{1l} < M_2 < M_{2l}$

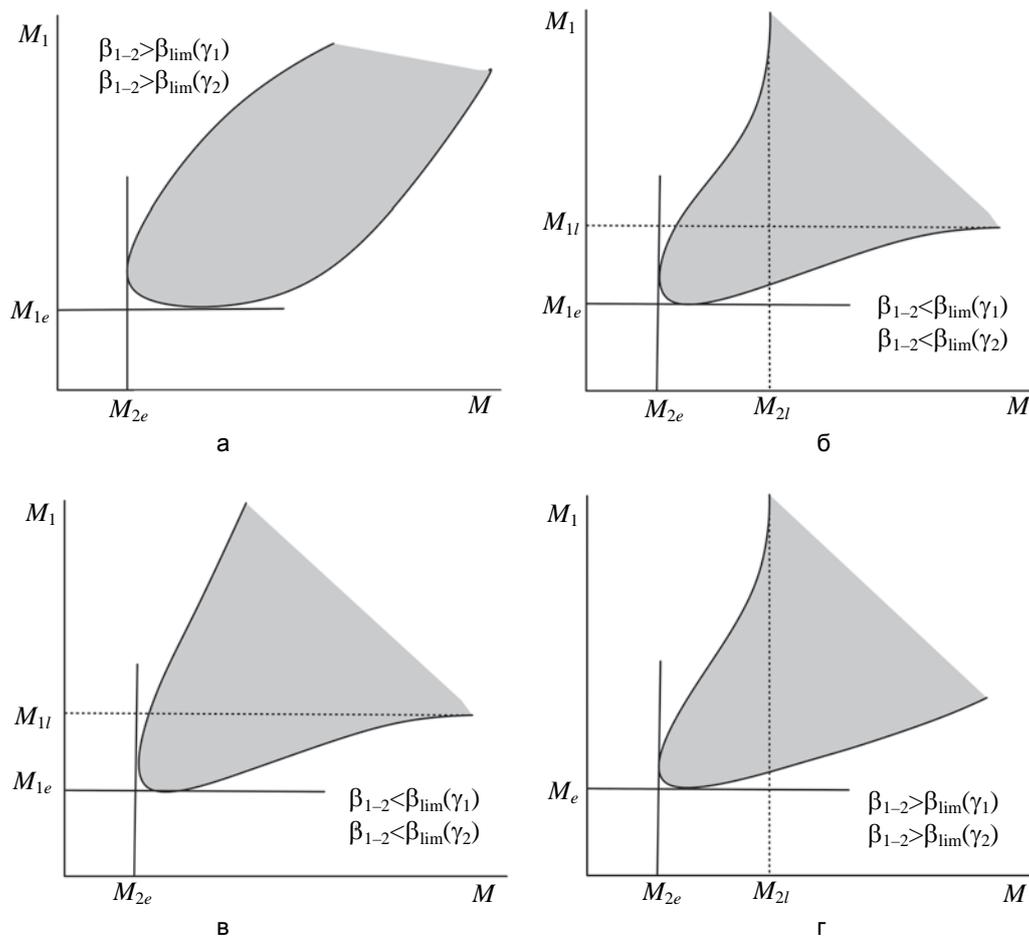


Рис. 10. Области существования решения для задачи распада произвольного разрыва с образованием двух исходящих скачков уплотнения (а–г)

Очевидно, что если угол взаимодействия β_{1-2} больше предельного для заданного γ угла β_{lim} , вычисляемого по формуле (2), то поляр 2 никогда не пересекается с осью ординат, и число Маха M_{2l} всегда существует. И наоборот, если β_{1-2} меньше предельного для заданного γ угла β_{lim} , то существует такое число Маха M_l , при котором поляр 2 касается оси ординат. В данном случае $M_{2l} \rightarrow \infty$, а при $M_{2l} > M_l$ решение существует при любых M_1 . Число M_l определяется по формуле

$$M_l = \frac{1}{J_2 + 2\varepsilon + 1} \sqrt{(J_2 + 2\varepsilon + 1)((J_2 - 1)^2 + 2(J_2 + \varepsilon))}. \quad (23)$$

Особые числа M_{1l}, M_{2l} определяются из системы уравнений, отвечающих условию касания двух поляр, которая имеет два решения, соответствующих M_{1l}, M_{2l} :

$$\begin{aligned} J_1 &= J_{1-2} J_2, \\ \beta_1(M_1, J_1) - \beta_2(M_2, J_2), \\ \frac{\partial \beta_1(M_1, J_1)}{\partial \Lambda_1} - \frac{\partial \beta_2(M_2, J_2)}{\partial \Lambda_2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Частные производные в (24) вычисляются с помощью формул (22) с подстановкой соответствующих величин $J_1, J_2, \beta_1, \beta_2$. Результаты анализа приведены на рис. 10.

Основная сложность в отыскании областей существования решения заключается в решении двух нелинейных систем уравнений (20)–(22) и (23, 24). Если заранее известно, что взаимодействие регулярное, то задача упрощается, так как характер изменения переменных – монотонный, и система уравнений решается любым стандартным численным методом, например, методом касательных.

Случай, когда отраженный разрыв – волна разрежения

Как было сказано выше, на плоскости всех возможных решений (рис. 6) существуют две области II и III, в которых отраженный разрыв может быть волной разрежения, причем тип отраженного разрыва необходимо еще определить, так как он может быть и скачком уплотнения. Рассмотрим алгоритм нахождения решения в области II. Решению задачи с отраженным скачком и волной разрежения соответствует пересечение ударной поляр 1, выпущенной из начала координат, с полярой разрежения, выпущенной из точки 1–2 (рис. 11, а). Видно, что этому могут соответствовать две различные поляры, так как и при небольших числах M_1 , и при больших M_2 ударные поляры (показаны пунктиром) не могут пересекаться с полярой волны разрежения, следовательно, область существования решения должна быть ограничена сверху и снизу двумя разными числами Маха M_{min} и M_{max} . Это может произойти в том случае, если ударные поляры, построенные для M_{min} и M_{max} , пересекаются в точке 1–2.

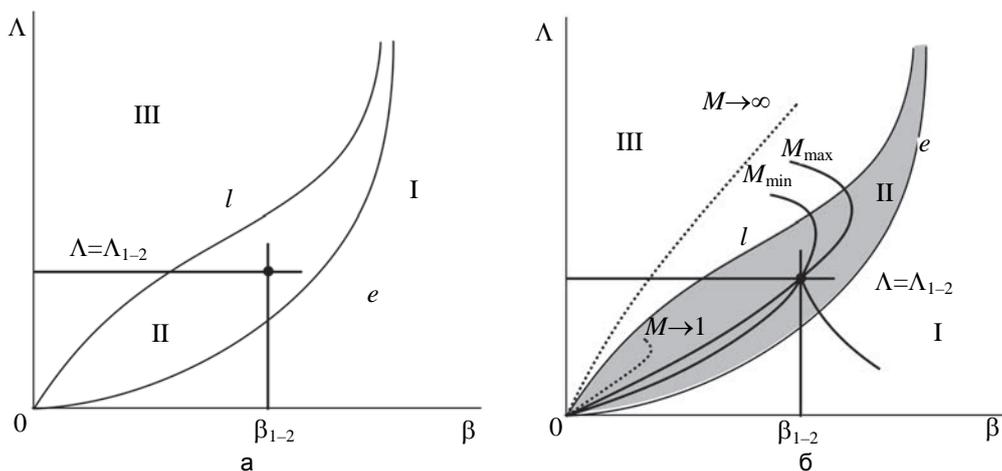


Рис. 11. Определение граничных чисел Маха $\{M_{min}, M_{max}\}$, при которых в области II разрыв 1 является волной разрежения: решение на плоскости поляр, при котором отраженный разрыв может быть скачком уплотнения или волной разрежения (а); к определению граничных чисел Маха M_{min} и M_{max} , между которыми возможно существование решения с отраженным разрывом – волной разрежения (б)

Найдем эти граничные числа Маха. Если воспользоваться известными соотношениями для интенсивности ударной поляр J , числа Маха и угла поворота потока β ,

$$J = (1 + \varepsilon) M^2 \sin^2 \sigma - \varepsilon, \quad \text{tg} \beta = \text{ctg} \sigma \frac{(1 - \varepsilon)(J - 1)}{J_m + \varepsilon - (1 - \varepsilon)(J - 1)}, \quad (25)$$

то, полагая в (25) числа Маха равными M_{min} и M_{max} и приравнивая значения интенсивностей, получим следующее уравнение:

$$M^2 = \frac{(1-\varepsilon)(J_{1-2}-1)}{1+\varepsilon} \left(1+a \pm \sqrt{a^2-b}\right),$$

$$a = \frac{(1-\varepsilon)(J_{1-2}-1)}{2\text{tg}\beta(J_{1-2}+\varepsilon)}, b = \frac{1+\varepsilon J}{\text{tg}\beta_{1-2}(J_{1-2}+\varepsilon)}. \tag{26}$$

Решая получившееся квадратное уравнение относительно M с учетом (26), получаем два корня: M_{\min} и M_{\max} . Область, ограниченная прямыми $M_1=M_{\min}$ и $M_2=M_{\max}$, соответствует области существования решения с исходящими скачком и волной разрежения (рис. 12).

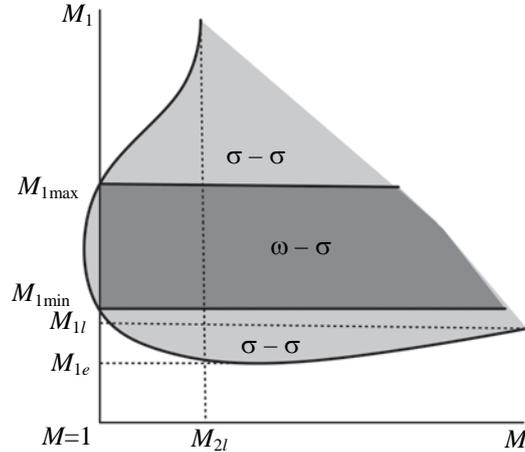


Рис. 12. Область существования решения с исходящим скачком уплотнения и волной разрежения (темная область). $(\sigma - \sigma)$ – исходящие разрывы – скачки уплотнения; $(\omega - \sigma)$ – решение с исходящими волной разрежения и скачком уплотнения

При $\beta_{1-2} = \beta_l(J_{1-2}, \gamma_2)$ кривая, ограничивающая область существования решения, соответствующая $J_{l_{\min}} = J_{2l}$, вырождается в прямую $M_2 = M_{2l} = M_{2\min}$. Этому соответствует случай, когда точка 1–2 лежит на предельной прямой $J_2=J_{2l}$. После того, как граничные числа Маха M_{\min} и M_{\max} определены, можно найти решения для случая пересечения конкретной ударной поляры, соответствующей числу Маха M_2 , и поляры разрежения, соответствующей числу Маха M_1 . Этому соответствует пересечение поляр, что выражается уравнением

$$\beta_{1-2} - (\beta_l(M_2, J) + \beta_1(M_1, J/J_{1-2})) = 0, \tag{27}$$

где $J=J_{2l}(M_2)$. Соотношение (27) представляет собой неявное уравнение, связывающее M_1 и M_2 . Задавая M_2 , можно получить функцию $M_1=M_1(M_2)$. Вид этой кривой показан на рис. 8. Областям, закрашенным светло-серым тоном $(\sigma - \sigma)$, соответствует решение с двумя исходящими скачками уплотнения. Серая область $(\omega - \sigma)$ – решение с исходящими волной разрежения и скачком уплотнения.

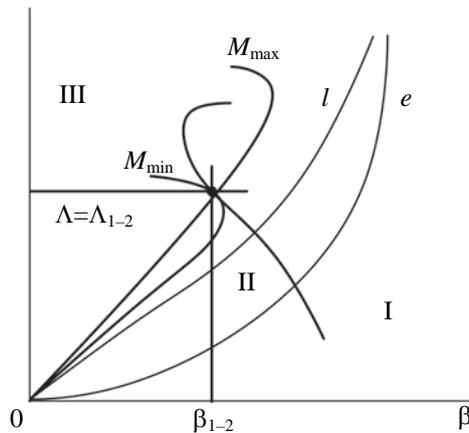


Рис. 13. Определение граничных чисел Маха $\{M_{\min}, M_{\max}\}$, при которых в области III разрыв 1 является волной разрежения

Рассмотрим теперь решение в области III (рис. 6). В этой области отраженный разрыв также может быть или волной разрежения, или скачком уплотнения, но области существования существенно отличаются от рассмотренного выше случая. Через каждую точку данной области, как и в предыдущем случае, проходят две ударные поляры. Однако в области III ударная поляра, соответствующая меньшему числу

Маха M_2 , проходит через заданную точку сильной ветвью, а поляра, соответствующая большему числу Маха – слабой (рис. 13). Из этого следует вывод, что поляра, соответствующая меньшему числу Маха M_2 , может касаться выпущенной из точки 1–2 поляры σ_1 . Возможно касание и участком поляры ω_1 , т.е. полярой разрежения. Таким образом, область III распадается на две подобласти: с двумя исходящими скачками, с исходящим скачком и волной разрежения. Очевидно, что смена одного вида отраженного разрыва на другой происходит при $J_1=1$.

Найдем линию на плоскости Λ – β , отвечающую условию смены типа отраженного разрыва. Условие касания поляр выражается системой уравнений

$$\begin{aligned} &\beta_1(M_1, J_1) - \beta_2(M_2, J_2), \\ &\frac{\partial \beta_1(M_1, J_1)}{\partial \Lambda_1} - \frac{\partial \beta_2(M_2, J_2)}{\partial \Lambda_2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Частные производные в (28) вычисляются по формулам

$$\frac{\partial \beta_2(M_2, J_2)}{\partial \Lambda_2} = \frac{\chi}{2\gamma J} \sqrt{\frac{\varepsilon}{A(J+\varepsilon)}} \times \frac{B + A(1+\varepsilon)}{\mu(J+\varepsilon) - J(1+\varepsilon J)(1-\varepsilon)},$$

$$A = \mu(1+\varepsilon) - (1+\varepsilon J), \quad (29)$$

$$B = A(J+\varepsilon) - \varepsilon(1+\varepsilon J)(J-1); \mu = 1 + \varepsilon(M^2 - 1).$$

При $J_1=1$ система (28)–(29) сводится к кубическому относительно $x=(M_2)^2$ уравнению $A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 = 0$, где

$$\begin{aligned} A_3 &= -(1-\varepsilon)(J_{1-2} + \varepsilon)^3, \\ A_2 &= ((1+\varepsilon) + (J_{1-2} + \varepsilon))^2 J_{1-2}^2 (1+\varepsilon)^2 + 2(1-\varepsilon^2)(J_{1-2}^2 - 1)(J_{1-2} + \varepsilon)^2 + (J_{1-2} + \varepsilon)^4, \\ A_1 &= -2(1+\varepsilon)^2 J_{1-2}^2 ((1+\varepsilon) + (J_{1-2} + \varepsilon))((J_{1-2}^2 - 1) + 2(J_{1-2} + \varepsilon)) - \\ &- (1-\varepsilon)(J_{1-2}^2 - 1)(J_{1-2} + \varepsilon)(3(J_{1-2} + \varepsilon)^2 - (1+\varepsilon J_{1-2})^2), \\ A_0 &= ((J_{1-2}^2 - 1) + 2(J_{1-2} + \varepsilon))^2 J_{1-2}^2 (1+\varepsilon)^2 + (J_{1-2} + \varepsilon)^2 (1-\varepsilon)^2 (J_{1-2}^2 - 1)^2. \end{aligned} \quad (30)$$

Задавая J_{1-2} , из уравнения (30) находим M_2 , затем из (25) – угол разворота потока β . Изменяя J_{1-2} в пределах $\{1-\infty\}$, получим линию смены типа решений на плоскости Λ – β , которая разделяет подобласти с различными типами исходящего разрыва 1. В подобласти, заключенной между линией смены решений и линией l , при числах Маха $M < M_{1\max}$ возможны (рис. 14, а) как два исходящих скачка ($\sigma - \sigma$), так и скачок плюс волна разрежения ($\omega - \sigma$). В подобласти, лежащей выше линии смены решений (рис. 14, б), возможно только одно решение – скачок и волна разрежения. При числах $M > M_{1\max}$ всегда имеет место решение с двумя исходящими скачками ($\sigma - \sigma$).

Приближенные методы решения задачи о распаде произвольного разрыва позволяют находить решение за один итерационный шаг, но при небольших числах Маха «теряют» часть решений, соответствующих исходящим скачку уплотнения и волне разрежения. На рис. 14, а, этому соответствует область $M_1 \subset \{M_{1e}, M_{1\max}\}$.

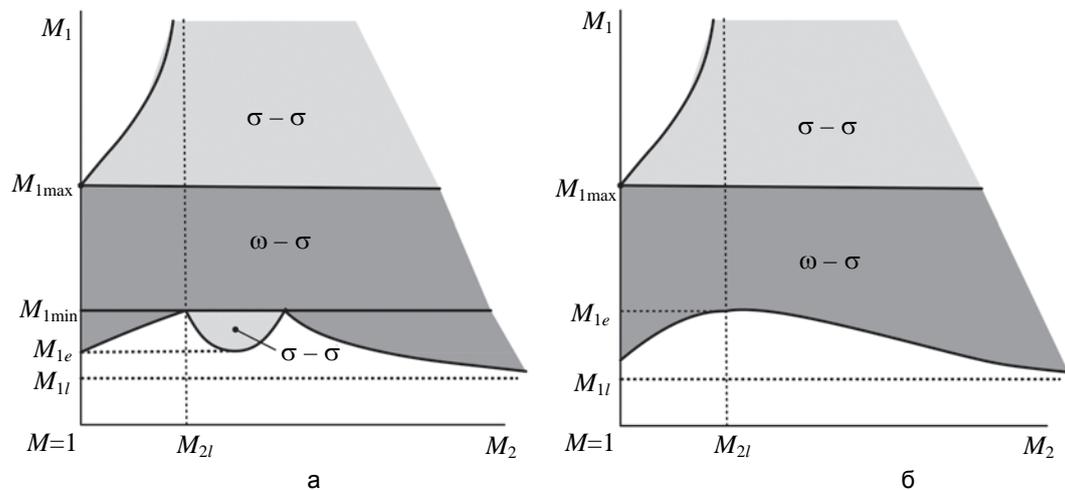


Рис. 14. Область существования решения с исходящим скачком уплотнения и волной разрежения (темная область). Области существования решений с различными типами исходящих разрывов для участка III плоскости Λ – β (рис. 13), заключенной между линией смены типа решения и линий l (а); области, лежащей (рис. 13) выше линии смены типа решения (б)

Заключение

Рассмотрена задача о нахождении областей существования решения при взаимодействии плоских сверхзвуковых потоков, когда исходящими разрывами могут быть два скачка уплотнения или скачок уплотнения и волна разрежения. Применяемые в разностных схемах типа Годунова приближенные методы решения задачи о распаде произвольного разрыва основаны на предположении, что поляры пересекаются своими слабыми ветвями. В большинстве случаев это действительно так, и численные методы работают надежно. Существует ряд тонких задач, таких, в которых подобное упрощение недопустимо. В таких случаях необходимо уметь точно и без каких-либо упрощений выделять случаи с двумя исходящими скачками, а также с исходящими скачком и волной разрежения. Это существенно усложняет алгоритм, так как вычисление границ подобластей решений сводится к системе трансцендентных уравнений. Компенсацией за сложность алгоритма является то, что не происходит потеря решений.

References

1. Uskov V.N., Bulat P.V., Arkhipova L.P. Gas-dynamic discontinuity conception. *Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology*, 2014, vol. 8, no. 22, pp. 2255–2259.
2. Uskov V.N., Bulat P.V. Shock and detonation wave in terms of view of the theory of interaction gasdynamic discontinuities. *Life Science Journal*, 2014, vol. 11, no. 8, pp. 307–310.
3. Bulat P.V. Shock and detonation wave in terms of view of the theory of interference gasdynamic discontinuities. Part I. The geometric meaning of the equations of gas dynamics of supersonic flows. *Fundamental'nye Issledovaniya*, 2013, no. 10–9, pp. 1951–1954. (In Russian)
4. Kozhemyakin A.O., Omel'chenko A.V., Uskov V.N. Oblique interaction of supersonic flows. *Fluid Dynamics*, 1999, vol. 34, no. 4, pp. 551–557.
5. Kochine N. Determination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie a la surface de separation de deux liquides de profodeur finie. *Mathematische Annalen*, 1927, vol. 98, pp. 582–615.
6. Landau L.D., Lifshits E.M. *Mechanics of Continua*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003, 736 p. (In Russian)
7. Kobzeva T.A., Moiseev N.Ya. A method of undetermined coefficients for solving Riemann problem. *VANT. Ser.: Mat. Mod. Fiz. Proc.*, 2003, no 1, pp. 3–9.
8. Zapryagaev V.I., Uskov V.N., Gaponov S.A., Maslov A.A., Glaznev V.N. *Struinye i Nestatsionarnye Techeniya v Gazovoi Dinamike* [Jet and unsteady flow in gas dynamics]. Novosibirsk, SO RAN Publ., 2000.
9. Uskov V.N. *Begushchie Odnomernye Volny* [Running One-Dimensional Waves]. St. Petersburg, BGTU "Voenmekh" Publ., 2000, 220 p.
10. Igra O. One-dimensional interactions. In *Handbook of Shock Waves. V2. Shock wave interactions and propagation*. Eds. G. Ben-Dor, O. Igra., T. Elperin. Academic Press, 2001, 924 p.
11. Godunov S.K. A finite difference method for the computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Sbornik: Mathematics*, 1959, vol. 47, no. 8–9, pp. 357–393.
12. Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov M.Ya., Kraiko A.N. *Chislennoe Reshenie Mnogomernykh Zadach Gazovoi Dinamiki* [Numerical Solution of Multi-Dimensional Problems in Gas Dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 400 p.
13. Kulikovskii A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu. *Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems*. Chapman & Hall/CRC Press, 2001, 560 p.
14. Volkov K.N. Application and implementation of high-resolution difference schemes for solution of gas dynamics problems on unstructured meshes. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2014, no. 6, pp. 153–162. (In Russian)
15. Volkov K.N. Raznostnye skhemy rascheta potokov povyshennoi razreshayushchei sposobnosti i ikh primenenie dlya resheniya zadach gazovoi dinamiki [High-resolution difference schemes of flux calculation and their application to solving gas dynamics problems]. *Vychislitel'nye Metody i Programirovanie*, 2005, vol. 6, no. 1, pp. 146–167.
16. Bulat P.V., Volkov K.N., Sil'nikov M.V., Chernyshev M.V. Analysis of finite-difference schemes based on exact and approximate solution of Riemann problem. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2015, no. 1, p. 139–148.
17. Mach E. Uber den verlauf von funkenwellen in der ebene und im raume [Over the course of radio waves in the plane and in space]. *Sitzungsbr. Akad. Wiss. Wien*, 1878, vol. 78, pp. 819–838.
18. Uskov V.N. Interference gas dynamic and tangential discontinuities. *Fluid Dynamics*, 1979, no. 4, pp. 191–197. (In Russian)
19. Uskov V.N., Bulat P.V., Arkhipova L.P. Classification of gas-dynamic discontinuities and their interference problems. *Research Journal of Applied Sciences*, 2014, vol. 8, no. 22, pp. 2248–2254.
20. Bulat P.V., Bulat M.P., Discontinuity of gas-dynamic variables in the center of the compression wave. *Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology*, 2014, vol. 8, no. 23, pp. 2343–2349.
21. Uskov V.N. Analysis of the shock-wave structures in a non-uniform steady flow. In *Fundamental'nye Problemy Fiziki Udarnykh Voln* [Fundamental Problems of Shock Waves Physics], 1987, vol. 2, 166–169.

22. Bulat P.V., Bulat M.P. Definition of the existence region of the solution of the problem of an arbitrary gas-dynamic discontinuity breakdown at interaction of flat supersonic jets with formation of two outgoing compression shocks. *Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology*, 2015, vol. 9, no. 1, pp. 65–70.
23. Uskov V.N., Chernyshov M.V. Theoretical analysis of the aerodynamic coefficients polygonal profiles in supersonic flow. *Mekhanika i Protsessy Upravleniya: Trudy XXXI Ural'skogo Seminara* [Proc. XXXI Ural Workshop on Mechanics and Control]. Ekaterinburg, 2001, pp. 187–191. (In Russian)
24. Uskov V.N., Shakhova O.A. K raschetu troinnoi konfiguratsii udarnykh voln [The calculation of a triple configuration shock waves]. *Gidroaeromekhanika i Teoriya Uprugosti*, 1976, vol. 21, no. 7, pp. 13–18.
25. Uskov V.N., Starykh A.L. Analiz oblastei sushchestvovaniya reshenii uravnenii interferentsii statsionarnykh gazodinamicheskikh razryvov Analiz oblastey sushchestvovaniya resheniy uravneniy interferentsii statsionarnykh gazodinamicheskikh razryvov [Analysis of the regions of solutions existence of the interference of stationary gas-dynamic discontinuities]. *Nestatsionarnye Techeniya Gazov s Udarnymi Volnami*, 1990, pp. 359–372.

Буллат Павел Викторович

– кандидат физико-математических наук, кандидат экономических наук, заведующий международным научным подразделением «Лаборатория механики и энергетических систем», Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Pavelbulat@mail.ru

Волков Константин Николаевич

– доктор физико-математических наук, научный сотрудник, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация; лектор, Университет Кингстона, Лондон, SW15 3DW, Великобритания, k.volkov@kingston.ac.uk

Pavel V. Bulat

– PhD, Scientific supervisor of International laboratory, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, pavelbulat@mail.ru

Konstantin N. Volkov

– D.Sc., Researcher, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation; Senior Lecturer, Kingston University, London, KT12EE, UK, k.volkov@kingston.ac.uk