УДК 62.50: 681.5.01

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ТРАЕКТОРИЙ СВОБОДНОГО ДВИЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СИСТЕМЫ В ФОРМЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ЦЕПОЧКИ ОДНОТИПНЫХ АПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗВЕНЬЕВ

Н.А. Вундер[a], О.С. Нуйя[a], Р.О. Пещеров[a], А.В. Ушаков[a]

[a] Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация
Адрес для переписки: 79214215187@ya.ru

Информация о статье
Поступила в редакцию 19.10.15, принята к печати 20.12.15
doi:10.17586/2226-1494-2016-16-1-68-75
Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Вундер Н.А., Нуйя О.С., Пещеров Р.О., Ушаков А.В. Исследование особенностей траекторий свободного движения непрерывной системы в форме последовательной цепочки однотипных апериодических звеньев // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2016. Т. 16. № 1. С. 68–75.

Аннотация
Констатируется, что в теории и практике проектирования систем управления нашла широкое использование модель их желаемого поведения, матрица состояния которой имеет биномиальное распределение Ньютона собственных чисел. Структурное представление таких систем в случае использования аппарата передаточных функций приводит к системе в форме последовательной цепочки однотипных апериодических звеньев первого порядка. Указывается, что такая модель желаемого поведения системы хорошо зарекомендовала себя в системе отношения «вход–выход», так что переходная характеристика системы характеризуется отсутствием перерегулирования, что особенно ценно при управлении уникальным технологическим оборудованием. Обращается внимание на то, что ситуация заметно меняется в случае, когда система управления с биномиальным распределением собственных чисел оказывается в ненулевом начальном состоянии. Такая ситуация может возникнуть в случае неожиданного отключения энергоснабжения электрических компонентов системы с последующим его восстановлением. Особенно остро стоит эта проблема для систем дистанционного онлайн-управления непрерывными техническими объектами в случае нарушения нормального функционирования канальной среды и его восстановления в дальнейшем. Система в форме последовательной цепочки однотипных апериодических звеньев первого порядка математически оказывается трехпараметрической с параметрами в виде модуля отрицательного вещественного числа, его кратности, равной размерности системы, и коэффициента передачи. Установлено, что в трехпараметрической системе, являющейся предметом исследования, выбросы могут иметь место при любых значениях модуля отрицательного собственного числа. Положения работы иллюстрированы результатами компьютерного эксперимента.

Ключевые слова
однотипные апериодические звенья, матрица состояния, модифицированная жорданова форма, кратность собственных чисел, свободное движение, норма, выброс

Благодарности
Работа поддержана правительством Российской Федерации (Грант 074-U01) и Министерством образования и науки Российской Федерации (Проект 14. Z50.31.0031).

RESEARCH OF FREE MOTION TRAJECTORIES FEATURES OF CONTINUOUS SYSTEM DEFINED AS A CONSECUTIVE CHAIN OF IDENTICAL FIRST-ORDER APERIODIC LINKS

N.A. Vunder[a], O.S. Nuyya[a], R.O. Pescherov[a], A.V. Ushakov[a]

[a] ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation
Corresponding author: Ushakov_AVG@yandex.ru

Article info
Received 19.10.15, accepted 20.12.15
doi:10.17586/2226-1494-2016-16-1-68-75
Article in Russian
For citation: Vunder N.A., Nuyya O.S., Pescherov R.O., Ushakov A.V. Research of free motion trajectories features of continuous system defined as a consecutive chain of identical first-order aperiodic links. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2016, vol. 16, no. 1, pp. 68–75.

Abstract
It is stated that the model of desired behavior has found a widespread usage in the theory and practice of control system design, with the state matrix having a binomial Newton placement of eigenvalues. A structural representation of these

systems in the case of the transfer functions approach application leads to a system defined as a consecutive chain of identical first-order aperiodic links. Such model of the desired system behavior has the transient response of the system, which is characterized by the absence of overshoot, that is particularly valuable in the unique technological equipment control. Situation varies considerably when the control system with a binomial placement of eigenvalues has a nonzero initial state. Such situation may arise in the case of an unexpected power fail interrupt of the system electrical components followed by its recovery. This problem is especially important for remote online control of continuous plant in the case of the normal functioning disruption of the channel environment and its restoration in the future. The system in a form of consecutive chain of identical first-order aperiodic links mathematically has a three-parametric set as a module of the negative real eigenvalue, its multiplicity equal to the system dimension and aperiodic link gain. It was found that the three-parametric system may have trajectory emissions at any of negative eigenvalue module. The paper results are illustrated by the computer experiment.

Keywords

identical first-order aperiodic links, state matrix, modified canonical Jordan form, multiplicity of eigenvalues, free motion, norm, overshoot

Acknowledgements

This work was supported by the Government of the Russian Federation, Grant 074-U01 and the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (Project 14. Z50.31.0031)

Введение. Постановка задачи

В теории и практике проектирования систем управления нашла широкое использование модель их желаемого поведения, матрица состояния которой имеет бинарное распределение Ньютона собственных чисел. Структурное представление таких систем в случае использования аппарата передаточных функций приводит к системе в форме последовательной цепочки однотипных апериодических звеньев первого порядка (АЗПП). Такая модель желаемого поведения системы хорошо зарекомендовала себя в системе отношения «вход–выход», так что переходная характеристика системы характеризуется отсутствием перерегулирования, что особенно ценно при управлении уникальным технологическим оборудованием. Особенностью динамики такой модели является появление заметного транспортного запаздывания [1], величиной которого можно управлять заданием величины характеристической частоты характеристического полинома.

Ситуация заметно меняется в случае, когда система управления с биномиальным распределением собственных чисел в виде последовательной цепочки однотипных АЗПП оказывается в ненулевом начальном состоянии. Такая ситуация может возникнуть при неожиданном отключении энергоснабжения электрических компонентов системы с последующим его восстановлением. Остро стоит эта проблема для систем дистанционного онлайн-управления [2] непрерывными техническими объектами в случае нарушения нормального функционирования канальной среды и его восстановления в дальнейшем.

Исследованию особенностей траекторий поведения системы для случая ненулевого начального состояния посвящены работы [3–8]. Математически системы, рассмотренные в указанных работах, были двухпараметрическими с параметрами в виде модуля отрицательного вещественного собственного числа и его кратности, равной размерности системы. Система в форме последовательной цепочки однотипных АЗПП математически оказывается трехпараметрической с параметрами в виде модуля отрицательного вещественного числа, его кратности, равной размерности системы, и коэффициента передачи, при этом все исследования, результаты которых приведены в работах [3–8], получены применительно к модифицированной жордановой форме матрицы состояния.

В работах [4–6] обнаружено системное явление, состоящее в том, что в апериодической системе (системе с вещественными собственными числами) при кратности собственных чисел, большей единицы, и значениях модуля собственных чисел, меньших единицы, возникает возможность появления заметных выбросов нормы вектора состояния в свободном движении, величина выброса растет с уменьшением модуля собственных чисел и с увеличением их кратности. В трехпараметрической системе, являющейся предметом исследования, выбросы могут иметь место при любых значениях модуля отрицательного собственного числа.

Аналитическое исследование свободного движения непрерывной системы в форме последовательной цепочки однотипных апериодических звеньев первого порядка

Рассматривается линейная непрерывная система в форме последовательной цепочки из n однотипных апериодических звеньев первого порядка, описываемая передаточной функцией $\Phi(s)$, имеющей представление

$$\Phi(s) = \left(\frac{k}{Ts+1}\right)^n = \left(\frac{\gamma}{s+\alpha}\right)^n, \qquad (1)$$

где k, T – соответственно коэффициент передачи и постоянная времени АЗПП; α – параметр АЗПП, задаваемый соотношением $\alpha = T^{-1}$; γ – приведенный коэффициент усиления, задаваемый соотношением $\gamma = k \cdot T^{-1}$.

Построим векторно-матричное представление непрерывной системы в форме последовательной цепочки однотипных АЗПП на основании представления (1) ее передаточной функции и поставим задачу исследования особенностей траекторий ее свободного движения. Тогда получим

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{J}(\alpha,\gamma)\mathbf{x}(t),\ \mathbf{x}(t)\big|_{t=0}=\mathbf{x}(0), \tag{2}$$

где $\mathbf{x}(0),\mathbf{x}(t)$ – вектора соответственно начального и текущего состояний системы; $\mathbf{x}(0),\mathbf{x}(t)\in R^n$; $\mathbf{J}(\alpha,\gamma)$ – ее $(n\times n)$-матрица состояния, имеющая вид

$$\mathbf{J}(\alpha,\gamma)=\begin{bmatrix}\alpha & \gamma & 0 & \dots & 0\\ 0 & \alpha & \gamma & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha\end{bmatrix}. \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что матрица $\mathbf{J}(\alpha,\gamma)$ (3) может быть представлена в аддитивно декомпозированном виде

$$\mathbf{J}(\alpha,\gamma)=diag\left\{\lambda_i=\alpha; i=\overline{1,n}\right\}+\mathbf{J}(0,\gamma)=\alpha\mathbf{I}+\mathbf{J}(0,\gamma)=\alpha\mathbf{I}+\gamma\mathbf{J}(0), \tag{4}$$

где $\mathbf{J}(0)$ – нильпотентная матрица [9] индекса $\nu=n$, $\mathbf{I}$ – единичная $(n\times n)$ матрица.

Отметим, что представления (4) матрицы $\mathbf{J}(\alpha,\gamma)$ обладают свойством мультипликативной коммутативности в том смысле, что

$$\alpha\mathbf{I}\cdot\gamma\mathbf{J}(0)=\gamma\mathbf{J}(0)\cdot\alpha\mathbf{I}.$$

Найдем решение системы (2) $\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}(t,\mathbf{x}(0))$, которое в исходной записи [10] имеет вид

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}(t,\mathbf{x}(0))=\exp\left\{\mathbf{J}(\alpha,\gamma)t\right\}\mathbf{x}(0). \tag{5}$$

Если в (5) воспользоваться представлением (4), то на основании [4, 11] функционального свойства матричной экспоненты $e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t}=e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}$, выполняемого при $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$, где следует положить $\mathbf{A}=\alpha\mathbf{I}$, а $\mathbf{B}=\gamma\mathbf{J}(0)$, можно получить цепочку матричных соотношений

$$\mathbf{x}(t)=\exp\left\{\mathbf{J}(\alpha,\gamma)t\right\}\mathbf{x}(0)=\exp\left\{\left(\alpha\mathbf{I}+\gamma\mathbf{J}(0)\right)t\right\}\mathbf{x}(0)=\exp(\alpha\mathbf{I}t)\exp\left(\mathbf{J}(0)\gamma t\right)\mathbf{x}(0)=e^{\alpha t}\exp\left(\mathbf{J}(0)\gamma t\right)\mathbf{x}(0). \tag{6}$$

Следует заметить, что в выражении (6) матричная экспонента $\exp\left(\mathbf{J}(0)\gamma t\right)$ представляется конечным числом членов ее разложения в силу нильпотентности матрицы $\mathbf{J}(0)$ индекса $\nu=n$, что позволяет записать

$$\exp\left(\mathbf{J}(0)\gamma t\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\left(\mathbf{J}(0)\right)^k(\gamma t)^k.$$

Утверждение 1. Степенная матричная функция $\left(\mathbf{J}(0)\right)^k$ имеет представление

$$\left(\mathbf{J}(0)\right)^k=\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{(n-k)\times k} & \mathbf{I}_{(n-k)\times(n-k)}\\ \mathbf{0}_{k\times k} & \mathbf{0}_{k\times(n-k)}\end{bmatrix}. \qquad \square$$

Доказательство утверждения 1 строится на базе индукции представления степенной матричной функции $\left(\mathbf{J}(0)\right)^k$ по размерности *n* матрицы $\mathbf{J}(0)$ и показателя степени *k*.

Пусть $n=2$, тогда

при $k=1=n-1$: $\left(\mathbf{J}(0)\right)^1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{(2-1)\times1} & \mathbf{I}_{(2-1)\times(2-1)}\\ \mathbf{0}_{1\times1} & \mathbf{0}_{1\times(2-1)}\end{bmatrix}$;

при $k=2=n$: $\left(\mathbf{J}(0)\right)^2=\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{(2-1)\times1} & \mathbf{I}_{(2-1)\times(2-1)}\\ 0_{1\times1} & \mathbf{0}_{1\times(2-1)}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

Пусть $n=3$, тогда:

при $k=1=n-2$: $\left(\mathbf{J}(0)\right)^1=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{(3-1)\times1} & \mathbf{I}_{(3-1)\times(3-1)}\\ \mathbf{0}_{1\times1} & \mathbf{0}_{1\times(3-1)}\end{bmatrix}$;

при $k = 2 = n-1$:

$$\left(\mathbf{J}(0)\right)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(3-1)\times 1} & \mathbf{I}_{(3-1)\times(3-1)} \\ \mathbf{0}_{1\times 1} & \mathbf{0}_{1\times(3-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(3-2)\times 2} & \mathbf{I}_{(3-2)\times(3-2)} \\ \mathbf{0}_{2\times 2} & \mathbf{0}_{2\times(3-2)} \end{bmatrix};$$

при $k = 3 = n$: $\left(\mathbf{J}(0)\right)^3 = \left(\mathbf{J}(0)\right)^2 \cdot \mathbf{J}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(3-2)\times 2} & \mathbf{I}_{(3-2)\times(3-2)} \\ \mathbf{0}_{2\times 2} & \mathbf{0}_{2\times(3-2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Пусть $\forall n$ – целое положительное и при этом для $\forall(k-1)$ – целого положительного и $k < n$ справедливо представление

$$\left(\mathbf{J}(0)\right)^{k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-k+1)\times(k-1)} & \mathbf{I}_{(n-k+1)\times(n-k+1)} \\ \mathbf{0}_{(k-1)\times(k-1)} & \mathbf{0}_{(k-1)\times(n-k+1)} \end{bmatrix},$$

тогда для $\forall k < n$

$$\left(\mathbf{J}(0)\right)^{k} = \left(\mathbf{J}(0)\right)^{k-1}\left(\mathbf{J}(0)\right)^{1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-k+1)\times(k-1)} & \mathbf{I}_{(n-k+1)\times(n-k+1)} \\ \mathbf{0}_{(k-1)\times(k-1)} & \mathbf{0}_{(k-1)\times(n-k+1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-1)\times 1} & \mathbf{I}_{(n-1)\times(n-1)} \\ \mathbf{0}_{1\times 1} & \mathbf{0}_{1\times(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-k)\times k} & \mathbf{I}_{(n-k)\times(n-k)} \\ \mathbf{0}_{k\times k} & \mathbf{0}_{k\times(n-k)} \end{bmatrix}.$$

Утверждение 1 доказано. ■

Поставим задачу исследования свободного движения системы (2) в скаляризованной форме. Скаляризацию вектора решения (6) осуществим на основе использования согласованных [12] векторных и матричных норм, в результате чего на основе (4) получим цепочку соотношений с учетом факта мультипликативной коммутативности [12] матричных компонентов аддитивного представления (4)

$$\left\|\mathbf{x}(t)\right\| = \left\|e^{\alpha t}\exp\left\{\mathbf{J}(0)\gamma t\right\}\mathbf{x}(0)\right\| \le e^{\alpha t}\left\|\exp\left\{\mathbf{J}(0)\gamma t\right\}\right\| \cdot \left\|\mathbf{x}(0)\right\|. \quad (7)$$

Выражение (7) позволяет для нормы $\left\|\mathbf{x}(t)\right\|$ ввести в рассмотрение ее оценку сверху [13] $\sup\left(\left\|\mathbf{x}(t)\right\|\right)$, которая при $\left\|\mathbf{x}(0)\right\| = 1$ получает представление

$$\sup\left(\left\|\mathbf{x}(t)\right\|\right)\Big|_{\left\|\mathbf{x}(0)\right\|=1} = e^{\alpha t}\left\|\exp\left\{\mathbf{J}(0)\gamma t\right\}\right\|. \quad (8)$$

В (7) и (8) компонент $\exp\left\{\mathbf{J}(0)\gamma t\right\}$ с учетом изложенного ранее имеет представление

$$\exp\left(\mathbf{J}(0)\gamma t\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\left(\mathbf{J}(0)\right)^k(\gamma t)^k = \mathbf{I}_{n\times n} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-k)\times k} & \mathbf{I}_{(n-k)\times(n-k)} \\ \mathbf{0}_{k\times k} & \mathbf{0}_{k\times(n-k)} \end{bmatrix}(\gamma t)^k =$$
$$= \mathbf{I}_{n\times n} + \sum_{k=1}^{n-1}\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-k)\times k} & diag\left\{r_{jj} = \frac{1}{k!}(\gamma t)^k;\ j = \overline{1, n-k}\right\} \\ \mathbf{0}_{k\times k} & \mathbf{0}_{k\times(n-k)} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Из (9) видно, что столбцовая норма $\left\|\exp\left\{\mathbf{J}(0)\gamma t\right\}\right\|_1$, определяемая последним столбцом матричной экспоненты $\exp\left\{\mathbf{J}(0)\gamma t\right\}$, записанной в форме (9), ее строчная норма $\left\|\exp\left\{\mathbf{J}(0)\gamma t\right\}\right\|_\infty$, определяемая первой строкой экспоненты (9), и оценка спектральной нормы $\left\|\exp\left\{\mathbf{J}(0)\gamma t\right\}\right\|_2$, задаваемая [14] мажорирующим неравенством

$$\left\|\exp\left\{\mathbf{J}(0)\gamma t\right\}\right\|_2 \le \left\{\left\|\exp\left\{\mathbf{J}(0)\gamma t\right\}\right\|_1 \cdot \left\|\exp\left\{\mathbf{J}(0)\gamma t\right\}\right\|_\infty\right\}^{1/2},$$

совпадают и определяются выражением

$$\left\|\exp\left\{\mathbf{J}(0)\gamma t\right\}\right\|_p = 1 + \gamma t + (1/2)(\gamma t)^2 + \ldots + \left(1/(n-1)!\right)(\gamma t)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(1/k!)(\gamma t)^k, (p = 1, 2, \infty).$$

Таким образом, введенная норма матричной экспоненты $\left\|\exp\left\{\mathbf{J}(\alpha,\gamma)t\right\}\right\|$ позволяет для оценки $\sup\left(\left\|\mathbf{x}(t)\right\|\right)$ сверху (8) нормы $\left\|\mathbf{x}(t)\right\|$ записать

$$\sup\left(\left\|\mathbf{x}(t)\right\|\right)=\left\|\exp\left\{\mathbf{J}(\alpha,\gamma)t\right\}\right\|=e^{\alpha t}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1/(k!)\right)(\gamma t)^k . \qquad (10)$$

Дальнейшие исследования системы (2) будем проводить с использованием $\sup\left(\left\|\mathbf{x}(t)\right\|\right)$ оценки сверху $\left\|\mathbf{x}(t)\right\|$, определяемой выражением (10). Поставим задачу оценки знака скорости изменения $\sup\left(\left\|\mathbf{x}(t)\right\|\right)$ в момент $t=0$ как синдрома характера развития процессов в системе в функции от параметров этого решения (α,γ,n).

Утверждение 2. Значение $\alpha=-\gamma$ собственного числа $\lambda=\alpha$ матрицы $\mathbf{J}(\alpha,\gamma)$ кратности $\mu=n$ сепарирует решения системы (2) по факту наличия или отсутствия отклонений от монотонной сходимости ее процессов по переменной $\sup\left(\left\|\mathbf{x}(t)\right\|\right)$. □

Доказательство утверждения 2. Дифференцирование выражения (10) по переменной t дает

$$\frac{d}{dt}\sup\left(\left\|\mathbf{x}(t)\right\|\right)=\frac{d}{dt}\left\{e^{\alpha t}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1/(k!)\right)(\gamma t)^k\right\}=\alpha e^{\alpha t}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1/(k!)\right)(\gamma t)^k+e^{\alpha t}\gamma\sum_{k=0}^{n-2}\left(1/(k!)\right)(\gamma t)^k . \qquad (11)$$

Выражение (11) для значения $t=0$ позволяет записать

$$\left.\frac{d}{dt}\sup\left(\left\|\mathbf{x}(t)\right\|\right)\right|_{t=0}=\left.\left\{\alpha e^{\alpha t}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1/(k!)\right)(\gamma t)^k+e^{\alpha t}\gamma\sum_{k=0}^{n-2}\left(1/(k!)\right)(\gamma t)^k\right\}\right|_{t=0}=\alpha+\gamma ,$$

что делает справедливыми три отношения порядка [15]:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\dfrac{d}{dt}\sup\left(\left\|\mathbf{x}(t)\right\|\right)\right|_{t=0}<0,\ \text{при}\ \alpha<0\,\&\,|\alpha|>\gamma\\ \left.\dfrac{d}{dt}\sup\left(\left\|\mathbf{x}(t)\right\|\right)\right|_{t=0}=0,\ \text{при}\ \alpha=-\gamma\\ \left.\dfrac{d}{dt}\sup\left(\left\|\mathbf{x}(t)\right\|\right)\right|_{t=0}>0,\ \text{при}\ \alpha<0\,\&\,|\alpha|<\gamma\end{array}\right\}.$$

■

Сделаем к доказанному утверждению следующие примечания.

Примечание 1. При $\alpha<0\,\&\,|\alpha|>\gamma$, $\left.\frac{d}{dt}\sup\left(\left\|\mathbf{x}(t)\right\|\right)\right|_{t=0}<0$ процесс по оценке сверху $\sup\left(\left\|\mathbf{x}(t)\right\|\right)$ нормы $\left\|\mathbf{x}(t)\right\|$ сходится к нулю и мажорируется при $\left\|\mathbf{x}(0)\right\|=1$ экспонентой в форме $\sup\left(\left\|\mathbf{x}(t)\right\|\right)\le e^{(\alpha+\gamma)t}$.

Примечание 2. В случае $\alpha=-\gamma$, $\left.\frac{d}{dt}\sup\left(\left\|\mathbf{x}(t)\right\|\right)\right|_{t=0}=0$, но при $t>0$ в силу (11) устанавливается отрицательная скорость, определяемая выражением

$$\left.\frac{d}{dt}\sup\left(\left\|\mathbf{x}(t)\right\|\right)\right|_{\alpha=-\gamma}=\left.\left\{\alpha e^{\alpha t}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1/(k!)\right)(\gamma t)^k+e^{\alpha t}\gamma\sum_{k=0}^{n-2}\left(1/(k!)\right)(\gamma t)^k\right\}\right|_{\alpha=-\gamma}=-\gamma\left(1/(n-1)!\right)e^{-\gamma t}(\gamma t)^{(n-1)} .$$

Примечание 3. В случае $\alpha<0\,\&\,|\alpha|<\gamma$, $\left.\frac{d}{dt}\sup\left(\left\|\mathbf{x}(t)\right\|\right)\right|_{t=0}>0$ процесс по оценке сверху $\sup\left(\left\|\mathbf{x}(t)\right\|\right)$ нормы $\left\|\mathbf{x}(t)\right\|$ решения системы (2) на начальном отрезке времени расходится, достигая максимума в момент t_M, определяемый соотношениями

$$t_M=\arg\left\{\frac{d}{dt}\sup\left(\left\|\mathbf{x}(t)\right\|\right)=0\right\}=\arg\left\{(\gamma+\alpha)\sum_{k=0}^{n-2}\left(1/k!\right)(\gamma t)^k+\alpha\left(1/(n-1)!\right)(\gamma t)^{(n-1)}=0\right\},$$

а далее сходится к нулю. В этом случае оценка сверху $\sup\left(\left\|\mathbf{x}(t)\right\|\right)$ нормы $\left\|\mathbf{x}(t)\right\|$ решения системы (2) обнаруживает отклонение от монотонно сходящегося процесса, величина которого зависит от значения $\alpha{:}\left(\alpha<0\,\&\,|\alpha|<\gamma\right)$ кратного вещественного собственного числа и значения n его кратности, численно определяемое выражением

$$\max_t\sup\left(\left\|\mathbf{x}(t)\right\|\right)=\left.\sup\left(\left\|\mathbf{x}(t)\right\|\right)\right|_{t=t_M}=e^{\alpha t_M}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1/(k!)\right)(\gamma t_M)^k ,$$

где t_M является решением алгебраического уравнения

$$\left(1+\gamma\alpha^{-1}\right)\sum_{k=0}^{n-2}\left(1/k!\right)\left(\gamma t_M\right)^k+\left(1/(n-1)!\right)\left(\gamma t_M\right)^{(n-1)}=0\,.$$

Завершая теоретическую часть работы, авторы считают необходимым сформулировать позитивное положение, состоящее в том, что при любом отрицательном значении $\lambda=\alpha$ и при кратности $\mu=n$ процессы в системе (2) являются сходящимися так, что выполняется условие

$$\lim_{t\to\infty}\sup\left(\left\|\mathbf{x}(t)\right\|\right)=0\,.$$

Это положение опирается на тот факт, что в степенном разложении экспоненты $e^{\alpha t}$ бесконечное число членов, в то время как в $\sum_{k=0}^{n-1}\left(1/(k!)\right)(\gamma t)^k$ их конечное число. Таким образом, всегда найдется такой момент времени, начиная с которого доминирование члена $\sum_{k=0}^{n-1}\left(1/(k!)\right)(\gamma t)^k$ над $e^{\alpha t}$ прекращается.

Компьютерное исследование траекторий свободных движений непрерывной системы в форме последовательной цепочки однотипных апериодических звеньев

Компьютерное исследование траекторий свободных движений непрерывной системы в форме последовательной цепочки однотипных апериодических звеньев в виде оценки сверху $\sup\left(\left\|\mathbf{x}(t)\right\|\right)$ нормы $\left\|\mathbf{x}(t)\right\|$ для случая $\left\|\mathbf{x}(0)\right\|=1$ ставит своей задачей проверить особенность этих траекторий. Она состоит в том, что, при отрицательных значениях собственного числа, чем больше величина γ превышает величину модуля собственного числа $|\alpha|$ и чем больше его кратность, равная размерности n, тем больше величина его отклонения над уровнем $\left\|\mathbf{x}(0)\right\|$. Результаты компьютерных исследований особенностей траекторий свободного движения системы вида (2) порядка $n=4$ представлены на рис. 1, 2 для различных вариаций значений модуля собственного числа $|\alpha|$ и приведенного коэффициента усиления γ.

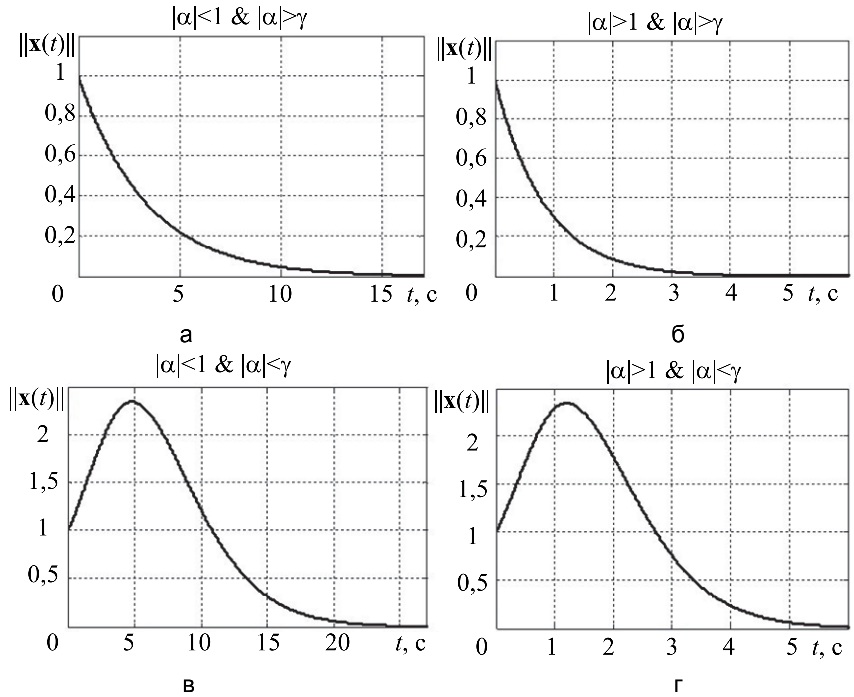

Рис. 1. Кривые процессов $\left\|\mathbf{x}(t)\right\|$ системы вида (2) порядка $n=4$ для случаев $|\alpha|<1\&|\alpha|>\gamma$ (а); $|\alpha|>1\&|\alpha|>\gamma$ (б); $|\alpha|<1\&|\alpha|<\gamma$ (в); $|\alpha|>1\&|\alpha|<\gamma$ (г)

Приведенные кривые подтверждают высказанные ранее положения о сходимости процессов при любом сочетании отрицательных собственных значений α и его кратностей.

Процессы $\left\|\mathbf{x}(t)\right\|$ обнаруживают отклонения траекторий, нарастающие с увеличением γ.

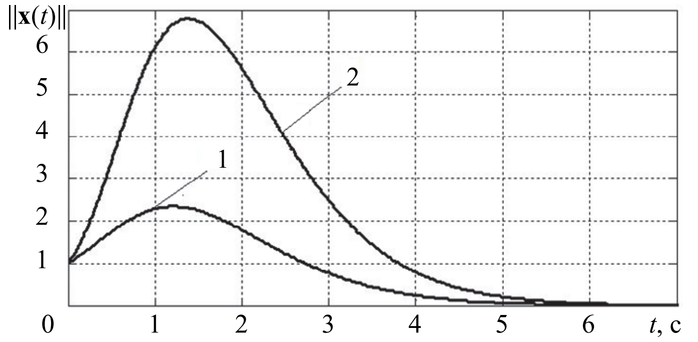

Рис. 2. Кривые процессов $\|\mathbf{x}(t)\|$ для системы вида (2) порядка $n = 4$ для случаев: $|\alpha| < \gamma \,\&\, |\alpha| - \text{fix}$ и $\gamma = \gamma_1$ (кривая 1); $\gamma = \gamma_2$ (кривая 2) при условии $\gamma_1 < \gamma_2$

Заключение

Цепочка однотипных апериодических звеньев порождает трехпараметрическую системную задачу с кратными собственными числами, в которой значение модуля собственного числа, его кратность и значения приведенного коэффициента усиления оказываются важными параметрическими факторами. Системная ситуация, когда значение отрицательного собственного числа по модулю меньше приведенного коэффициента усиления при ненулевых начальных условиях, наделяет процессы системы по норме вектора состояния весьма специфическими свойствами в виде заметных отклонений от монотонного их развития, которые могут приводить к нежелательным последствиям разрушительного характера.

Литература

1. Дударенко Н.А., Полинова Н.А., Ушаков А.В. Фундаментальная матрица линейной непрерывной системы в задаче оценки ее транспортного запаздывания // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2014. № 5 (93). С. 32–37.
2. Liholetova E.S., Nuiya O.S., Peshcherov R.O., Ushakov A.V. Factors of the channel medium, problem of digital remote control of continuous technological resources // Proc. 3rd Int. Conf. on Circuits, Systems, Communications, Computers and Applications. Florence, 2014. P. 68–72.
3. Burke J.V., Lewis A.S. and Overton M.L. Optimal stability and eigenvalue multiplicity // Foundations of Computational Mathematics. 2001. V. 1. N 2. P. 205–225. doi: 10.1007/s102080010008
4. Ushakov A.V., Akunov T.A., Dudarenko N.A., Polinova N.A. Factor multiplicity of the eigenvalues of the state matrix in the system dynamics // Proc. 18th Int. Conf. on Applied Mathematics. Budapesht, Hungary, 2013. P. 58–62.
5. Акунов Т.А., Дударенко Н.А., Полинова Н.А., Ушаков А.В. Исследование колебательности процессов в апериодических непрерывных системах, порождаемой фактором кратности собственных чисел // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2013. № 3 (85). С. 55–61.
6. Полинова Н.А., Акунов Т.А., Дударенко Н.А. Кратность собственных чисел матрицы состояния апериодической системы как причинный фактор появления выбросов в траекториях по норме вектора состояния свободного движения и системного вырождения // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014). Москва, 2014. С. 173–182.
7. Поляк Б.Т., Тремба А.А. Аналитическое решение линейного дифференциального уравнения с одинаковыми корнями характеристического полинома // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014). Москва, 2014. С. 212–217.
8. Polyak B.T., Smirnov G.V. Large deviations in continuous-time linear single-input control systems // Proc. 19th IFAC World Congress on International Federation of Automatic Control (IFAC 2014). Cape Town, South Africa, 2014. P. 5586–5591.
9. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 375 с.
10. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. 4-е изд. М.: МЦНМО, 2012. 380 с.
11. Moler C., Van Loan C. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later // SIAM Review. 2003. V. 45. N 1. P. 3–49.
12. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1973. 575 с.
13. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. 8-е изд. М.: Физматлит, 2003. Т. 1. 680 с.
14. Golub G.H., Van Loan C.F. Matrix Computations. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1996. 728 p.
15. Калужнин Л.А. Введение в общую алгебру. М.: Наука, 1973. 448 с.

Вундер (Полинова) Нина Александровна	–	аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, polinova_nina@mail.ru
Нуйя Ольга Святославовна	–	кандидат технических наук, доцент, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, olga.nuyya@gmail.com
Пещеров Руслан Олегович	–	аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, rpeshcherov@mail.ru
Ушаков Анатолий Владимирович	–	доктор технических наук, профессор, профессор, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, 79214215187@ya.ru

Nina A. Vunder	–	postgraduate, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, polinova_nina@mail.ru
Olga S. Nuyya	–	PhD, Associate professor, Associate professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, olga.nuyya@gmail.com
Ruslan O. Peshcherov	–	postgraduate, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, rpeshcherov@mail.ru
Anatoliy V. Ushakov	–	D.Sc., Professor, Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, 79214215187@ya.ru