



УДК 532.529

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФРАКЦИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА ПРЯМОМ УГЛЕ НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ

П.В. Булат^a, К.Н. Волков^{a,b}^a Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация^b Университет Кингстона, Лондон, SW15 3DW, Великобритания

Адрес для переписки: pavelbulat@mail.ru

Информация о статье

Поступила в редакцию 10.11.15, принята к печати 25.02.16

doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-2-354-362

Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Булат П.В., Волков К.Н. Численное моделирование дифракции ударной волны на прямом угле на неструктурированных сетках // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2016. Т. 16. № 2. С. 354–362. doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-2-354-362

Аннотация

Предмет исследования. Представлены результаты моделирования и исследования дифракции ударной волны различной интенсивности на плоском прямом угле. **Метод.** Численная модель построена на основе решения нестационарных уравнений Эйлера для невязкого сжимаемого газа. Для дискретизации уравнений Эйлера на неструктурированных сетках применен метод конечных объемов и явная схема WENO-типа, имеющая третий порядок точности. Конвективные потоки рассчитаны независимо по каждому направлению с помощью приближенного решения задачи Римана (метод HLLC). Интегрирование по времени проведено методом Рунге–Кутты третьего порядка. **Основные результаты.** Определена структура течения и его количественные характеристики. Для визуализации и интерпретации результатов численных расчетов применена процедура выделения и классификации газодинамических разрывов, основанная на использовании условий динамической совместности и методов цифровой обработки изображений. Результаты расчетов обработаны в виде численных теневых картин, шлирен-изображений и интерферограмм. Выполнено сравнение с данными оптических наблюдений. Продемонстрировано существенно лучшее совпадение с экспериментальными данными по сравнению со стандартными численными методами. Примененный численный метод повышенного порядка точности позволил получить численное решение, свободное от паразитных осцилляций на ударных волнах при минимальном размывании ударных волн по разностным ячейкам. **Практическая значимость.** Исследование ударно-волновых явлений представляет интерес для решения задач, связанных с воздействием ударных волн на элементы конструкции, функционированием импульсных газодинамических устройств, использованием ударных волн в технологических процессах. При сверхзвуковом обтекании угловых конфигураций возникают интерференционные и дифракционные явления, осложненные отрывом потока. Все это существенно осложняет расчет подобных явлений с помощью стандартных разностных методов. Не меньшую сложность представляет и задача интерпретации результатов, в частности, выделения газодинамических разрывов и идентификации их типов.

Ключевые слова

газовая динамика, численное моделирование, дифракция, ударная волна, волна разрежения, контактный разрыв

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (Соглашение № 14.575.21.0057, уникальный идентификатор прикладных научных исследований RFMEFI57514X0057).

NUMERICAL SIMULATION OF SHOCK WAVE DIFFRACTION OVER RIGHT ANGLE ON UNSTRUCTURED MESHES

P.V. Bulat^a, K.N. Volkov^{a,b}^a ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation^b Kingston University, London, SW15 3DW, UK

Corresponding author: pavelbulat@mail.ru

Article info

Received 10.11.15, accepted 25.02.16

doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-2-354-362

Article in Russian

For citation: Bulat P.V., Volkov K.N. Numerical simulation of shock wave diffraction over right angle on unstructured meshes. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2016, vol. 16, no. 2, pp. 354–362. doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-2-354-362

Abstract

Subject of Research. Numerical simulation results and investigation of shock wave diffraction of different intensity on the flat right angle are presented. **Method.** The numerical model is based on the solution of unsteady Euler equations for inviscid compressible gas. The finite volume method and explicit WENO-type difference scheme of the third-order of accuracy are used. Convective fluxes are calculated independently for each direction with the approximate Riemann solver (HLLC method). Time integration is performed with the Runge-Kutta method of the third order. **Main Results.** Flow structure and flow quantitative characteristics have been determined. To visualize and interpret the results of numerical calculations the procedure of identification and classification of gas-dynamic discontinuities has been applied based on the use of dynamic compatibility conditions and methods of digital image processing. The results of calculations have been presented in the form of numerical shadow pictures, schlieren images and interferograms, and compared with the optical observations. Significantly better agreement with the experimental data has been demonstrated as compared to conventional numerical methods. Application of numerical methods of high order accuracy has yielded a numerical solution which is free from non-physical oscillations on the shock waves with minimal smearing over difference cells. **Practical Relevance.** The study of shock-wave phenomena is of interest for the solution of problems related to the impact of shock waves on the design elements, the operation of pulsed gas-dynamic devices, the use of shock waves in technological processes. Supersonic flows around angle configurations lead to interference and diffraction phenomena complicated by flow separation. These effects make complex the calculation of such phenomena using conventional numerical methods. The problem of the results interpretation is not less complicated one, as well, in particular, identification of gas-dynamic discontinuities.

Keywords

gas dynamics, numerical simulation, diffraction, shock wave, rarefaction wave, contact discontinuity

Acknowledgements

The study was sponsored by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (agreement No 14.575.21.0057, unique applied research identifier RFMEFI57514X0057)

Введение

Исследование ударно-волновых явлений представляет интерес для решения задач газовой динамики, связанных с воздействием ударных волн на элементы конструкции, функционированием импульсных газодинамических устройств, использованием ударных волн в технологических процессах. При сверхзвуковом обтекании угловых конфигураций возникают интерференционные и дифракционные явления, осложненные отрывом потока. Отрыв потока вносит значительные поправки как при определении силовых нагрузок на элементы конструкции, так и при оценке тепловых нагрузок к поверхности.

Течения, которые реализуются при продольном обтекании внешнего двугранного угла, образованного пересечением двух плоских поверхностей, изучены достаточно хорошо как экспериментальными методами, так и при помощи средств численного моделирования. Они являются частным случаем течения в окрестности обратного уступа, которые еще называются течениями с внезапным расширением. Актуальность данной задачи, которая обычно связывается с проблемой донного давления, обычно проявляется при анализе сопел с донным экраном, эжекторов, донных срезов ракет, камеры Эйфеля аэродинамической трубы, истечения сверхзвукового потока из сопла Лавала в цилиндрический канал, и некоторых других случаев. Обзор проблемы в случае, когда течение уже сформировано, приведен в работах [1–3]. В настоящей работе приводится анализ течения, связанного с дифракцией ударной волны на обратном уступе, которое возникает при формировании течения, например, при запуске сопла, выстреле из ударной трубы или ствола артиллерийского орудия и т.п.

Дифракция ударной волны на плоском прямом угле относится к одной из тестовых и хорошо исследованных задач нестационарной газовой динамики, получившей широкое распространение в практике численных расчетов после появления работы [4]. Задача о дифракции ударной волны на обратном уступе не только используется для проверки новых методологических концепций, но и представляет практический интерес [5]. В частности, развитие колебательных ударно-волновых процессов в каналах с внезапным расширением во многом обуславливается протеканием начального этапа – дифракцией ударной волны на обратном уступе. Взаимодействие ударной волны с вихрями, образующимися в зоне свободной дифракции, приводит к возникновению многочисленных газодинамических разрывов. В течении за уступом со временем развиваются процессы взаимодействия ударной волны и вихря, ударной волны и сдвигового слоя, возникают различные типы отражения пристенной ударной волны, а также вторичная ударная волна.

Теоретические решения, описывающие отрыв нестационарного сверхзвукового потока газа при обтекании выпуклого угла, построены в работе [6]. Используется предположение о квазиодномерности потока в пристеночной области перехода от стационарного течения к нестационарному. Нестационарная двумерная задача сводится к двум задачам о взаимодействии одномерных потоков газа, изучаемых в рамках теории распада произвольного разрыва. Для двух видов задач, отличающихся начальными и граничными условиями, определяются границы перехода от безотрывного течения газа к отрывному в зависимости от числа Маха набегающего потока и величины раствора угла.

Широкий набор данных физического эксперимента по дифракции ударных волн на уступах различной формы приводится в работах [5, 7–9].

Результаты численных исследований дифракции ударной волны на прямом угле приводятся в работах [10, 11] на структурированных сетках. Рассматриваются невязкие отрывные течения, реализующиеся при нестационарном обтекании плоского прямого угла сверхзвуковым потоком газа, когда к вершине угла, помимо веера волны разрежения, примыкают контактный разрыв и сдвиговый слой смешения.

Наличие большого объема экспериментальных и численных данных делает возможным отработку новых методологических концепций и подходов к решению задач газовой динамики, основанных на использовании неструктурированных сеток и схем высокого порядка точности, что и является целью настоящего исследования.

Опыт использования стандартных методик численного счета продемонстрировал недостаточность их точности для анализа столь сложных течений. Значительное размазывание разрывов по ячейкам не только затрудняет его анализ, но и приводит к результатам, качественно отличающимся от результатов экспериментов, поэтому уже довольно длительное время ведется поиск более эффективных методик моделирования, которые позволили бы достаточно точно смоделировать течение с отрывом, вихрями и ударными волнами. Так, прямое численное моделирование на основе метода кусочно-параболической реконструкции проводится в работе [12]. Схемы высокого порядка точности, основанные на расщеплении вектора потока, и различные подходы к приближенному решению задачи о распаде произвольного разрыва сравниваются в работе [13] (используются структурированные сетки). Расчеты на основе последовательности вложенных структурированных сеток проводятся в работе [14], а в работе [15] для расчетов используется подход, основанный на адаптации структурированной сетки к решению. Описание дифракции ударной волны на прямом угле при помощи решения уравнения Больцмана дается в работе [16]. Дифракция ударных волн на острых и тупых углах, а также генерация завихренности обсуждаются в работах [17, 18].

Неструктурированные сетки применяются в работах [19] и [20] для моделирования дифракции ударной волны на обратной ступеньке в рамках двух- и трехмерной постановки задачи. Для дискретизации основных уравнений в работе [19] применяется метод Галеркина с разрывными базисными функциями на сетках с различной формой ячеек. В работе [20] дискретизация нестационарных уравнений Эйлера проводится при помощи схемы MUSCL, а для решения задачи Римана используется метод HLLC. Результаты численных расчетов обсуждаются для чисел Маха, равных 1,7 и 3. Решение двумерной задачи на неструктурированных сетках, состоящих из ячеек треугольной формы, дается в работе [21] на основе схемы расщепления вектора потока и метода AUSM. Результаты расчетов приводятся для случаев дифракции слабой и сильной ударной волны.

Случаи смешанного взаимодействия интерференционных и дифракционных течений, которые реализуются, например, при обтекании областей сопряжения различных геометрических элементов конструкции, изучаются в работе [22], а дифракция детонационных волн – в работе [23]. Численные расчеты проводятся при помощи уравнений Эйлера и схем высокого порядка точности, реализуемых на вложенных структурированных сетках.

Плоские и осесимметричные течения, возникающие при распространении ударной волны в плоском и круглом канале с внезапным расширением, рассматриваются в работе [24] на основе данных физического и численного эксперимента. Генерация завихренности обусловливается тем, что градиенты давления и плотности в области отрыва потока оказываются непараллельными [25]. Выделение и классификация газодинамических разрывов, образующихся при дифракции ударной волны на плоском прямом угле, даются в работе [26].

В настоящей работе численное моделирование дифракции слабой и сильной ударной волны на обратном уступе проводится при помощи схем WENO-типа, реализованных на неструктурированных сетках. Результаты численных расчетов, обработанных в виде теневых картин, ширен-изображений и интерферограмм, сравниваются с данными оптических наблюдений и результатами, имеющимися в литературе.

Метод расчета

Структура течения. Характерные черты течения при прохождении обратного уступа ударной волной, а также ударно-волновые структуры, возникающие при дифракции ударной волны различной интенсивности при внезапном изменении сечения плоского канала, показывает рис. 1. Структура формирующегося течения зависит от интенсивности падающей ударной волны [6, 21]. В случае дифракции слабой ударной волны (weak shock) течение за фронтом ударной волны является дозвуковым, а при дифракции сильной ударной волны (strong shock) – сверхзвуковым. При дифракции слабой ударной волны (рис. 1, а) структура течения характеризуется наличием отраженной акустической волны, которая распространяется вверх по потоку, дифрагированной (преломленной) ударной волны, распространяющейся вниз по потоку, и вихря, закручивающегося в спираль в окрестности угловой точки. При дифракции сильной ударной волны (рис. 1, б) структура течения становится более сложной и включает веер волны разрежения, регулярное и нерегулярное взаимодействие ударных волн, а также контактные разрывы.

Детальная классификация возможных режимов течения и возникающих ударно-волновых структур дается в работе [5].

В рамках невязкой постановки задачи отрыв связывается с формированием вихревой пелены или тангенциального разрыва, которые свертываются в виде спирали [6]. При этом происходит перестройка течения в окрестности вершины угла таким образом, что поток разворачивается в веере волны разрежения на меньший угол, возникает слой смешения и контактный разрыв. Интенсивность ударной волны, которая до отрыва тормозит поток, частично гасится волной разрежения, а сильные энтропийные возмущения, вызванные ударной волной, не исчезают при взаимодействии и распространяются в слое смешения, формируя вихрь. В центре вихря имеет место минимум давления и плотности и максимум энтропии. Газ разворачивается вокруг вихря по часовой стрелке и движется в области вершины с малой дозвуковой скоростью. Над слоем смешения газ движется от вершины со сверхзвуковой скоростью.

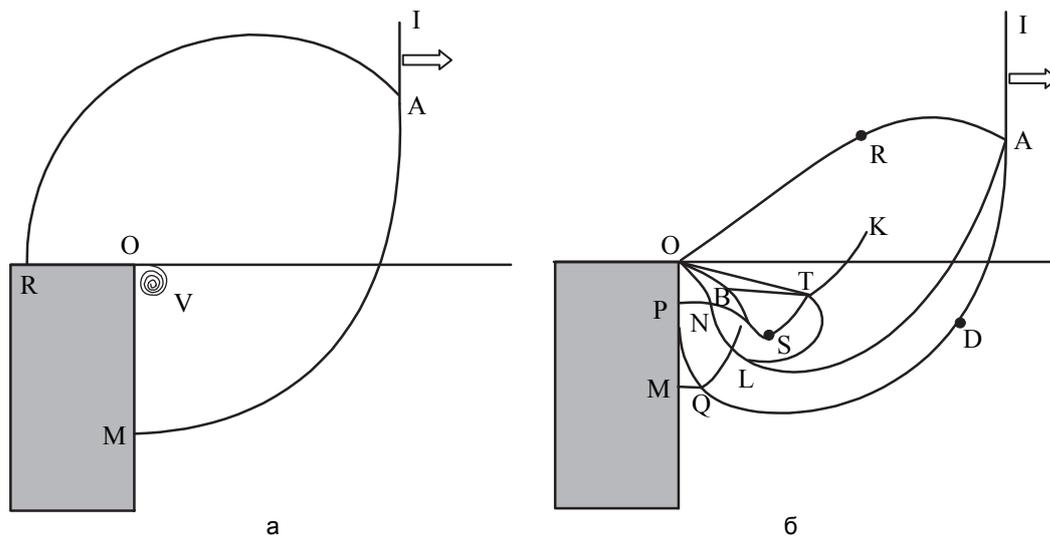


Рис. 1. Схема течения при дифракции слабой (а) и сильной (б) ударной волны на прямом угле. IA – падающая ударная волна, AM – дифрагированная ударная волна, AO – отраженная акустическая волна, AL – контактная поверхность, TS – волна торможения, OS – линия отрыва, ТВ – косая ударная волна, ТК – вторичный скачок, NP – пристенный скачок, Q – тройная точка, V – вихрь, R и D – точки искривления фронта

Сдвиговый слой, образующийся при отрыве потока от поверхности узкой части канала, сворачивается в вихрь. Вблизи вихря формируется вторичный скачок, который позволяет согласовать условия за искривленной ударной волной и расширяющимся течением. Кроме того, вторичный скачок, как и вихрь, позволяет согласовать условия, возникающие за проходящей и искривленной ударной волной. К точке пересечения падающего плоского скачка и крайней характеристики веера волны разрежения примыкает искривленная контактная поверхность, которая отделяет газ, прошедший через проходящую плоскую ударную волну, от газа за дифрагированной волной. Перечисленные особенности (контактная поверхность и вторичный скачок) наиболее ярко выражены при достаточно больших числах Маха ($M > 1,5-2$) [6]. После достижения фронтом ударной волны стенки широкой части канала и его отражения происходит формирование сильной поперечной волны.

Расчетная область и граничные условия. Рассматривается плоский канал, состоящий из узкой и широкой частей, симметричный относительно оси x . По узкой части канала слева направо распространяется плоская ударная волна с числом Маха, равным M_1 . Исследуются процесс перехода ударной волны из узкой части канала в широкую часть и ее последующее распространение по широкой части канала. В связи с симметрией расчетной области расчеты проводятся в нижней половине канала, показанной на рис. 2. Начало декартовой системы координат располагается в левом нижнем углу. Длина узкой части канала полагается равной L . Поперечный размер узкой части канала составляет L , а поперечный размер широкой части канала – $2,3L$. В результате ступенька имеет ширину и высоту, равные L и $1,3L$. В начальный момент времени фронт ударной волны располагается при $x_s=0,1L$.

На фронте ударной волны используются условия Рэнкина–Гюгонно. Давление p и плотность газа ρ перед (индекс 1) и позади (индекс 2) фронта ударной волны связаны при помощи соотношений

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\varepsilon(p_2/p_1) + 1}{\varepsilon + (p_2/p_1)},$$

где $\varepsilon = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$, γ – показатель адиабаты. Скорость потока u за фронтом ударной волны находится из соотношения

$$\frac{u_2}{u_1} = 1 - \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{(\gamma + 1)M_1^2}.$$

Расчеты проводятся для двух чисел Маха падающей ударной волны, равных 1,3 (дифракция слабой ударной волны, вариант 1) и 2,4 (дифракция сильной ударной волны, вариант 2). Параметры на фронте плоской ударной волны приводятся в таблице.

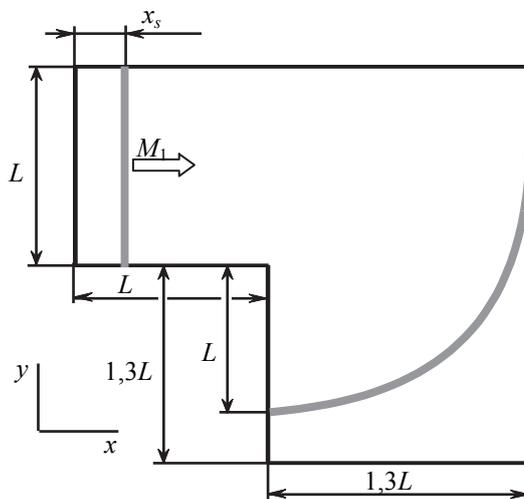


Рис. 2. Расчетная область

Вариант	Число Маха M_1	Число Маха M_2	Перепад давлений p_2/p_1	Перепад плотностей ρ_2/ρ_1
1	1,3	0,406	1,805	1,516
2	2,4	1,157	6,553	3,212

Таблица. Условия на фронте ударной волны

На входной (левой) границе задаются условия поддерживающего поршня для ударной волны (параметры для конечного равновесного состояния). На выходной (правой) границе ставятся условия гладкого продолжения течения, заключающиеся в приравнивании нулю производных искомых функций по нормали к границе. На нижней границе расчетной области используются условия отражения. Решение задачи о распаде разрыва в граничных ячейках, прилегающих к линии симметрии или неподвижной стенке, проводится с использованием фиктивных ячеек. В фиктивных ячейках плотность, давление и тангенциальная скорость остаются такими же, как и в граничных ячейках, а нормальная скорость имеет противоположный знак. Расчет проводится до достижения фронтом ударной волны правой границы области (безразмерное время $t_f = 2$), поэтому условия на правой границе отвечают невозмущенному течению. Рабочей средой является вычислительный газ с отношением удельных теплоемкостей, равным 1,4. В качестве характерного масштаба длины выбирается ширина ступеньки, а в качестве характерной скорости – скорость звука в невозмущенной области потока.

Расчетные сетки. Для построения сетки расчетная область представляется в виде объединения трех прямоугольников (четвертый прямоугольник, расположенный в левом нижней части области, представляет собой ступеньку и исключается из рассмотрения). Построение сетки поясняет рис. 3. В каждом блоке сетки строится структурированная сетка, состоящая из прямоугольных ячеек. Для построения грубой сетки (сетка 1) каждая из ячеек структурированной сетки делится на две треугольные ячейки (рис. 2, а). Подробная сетка (сетка 2) строится при помощи деления пополам ячеек грубой сетки (рис. 2, б).

Каждый блок исходной структурированной сетки содержит 50×50 ячеек. Для сетки 1 количество ячеек базовой сетки увеличивается в 2 раза, а для сетки 2 – в 4 раза.

Численный метод. Численная модель строится на основе решения нестационарных уравнений Эйлера для невязкого сжимаемого газа [27].

Для дискретизации уравнений Эйлера применяется метод конечных объемов и явная схема WENO-типа, имеющая третий порядок точности. Примеры использования WENO-схем для моделирования сверхзвуковых течений невязкого сжимаемого газа на неструктурированных сетках даются в работах [28, 29]. Конвективные потоки рассчитываются независимо по каждому направлению с помощью при-

ближенного решения задачи Римана (метод HLLC). Интегрирование по времени проводится методом Рунге–Кутты третьего порядка.

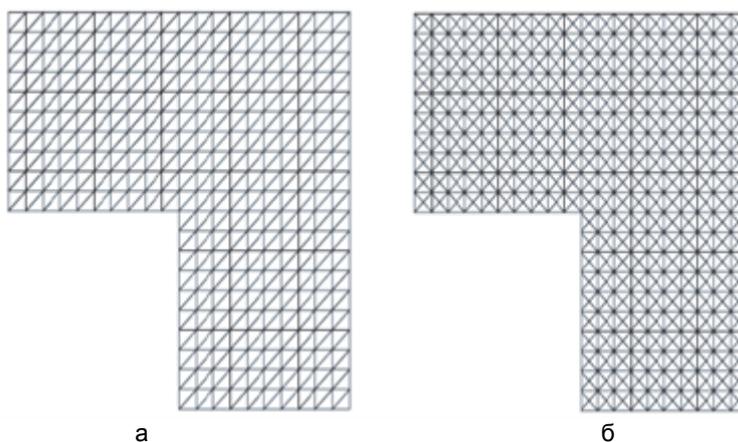


Рис. 3. Грубая (а) и подробная (б) разностные сетки

Выделение разрывов. Процедура идентификации газодинамических разрывов (их тип и положение) занимает значительную часть времени исследования и не лишена субъективности. Метод, предложенный в работе [30], позволяет ускорить время такой обработки и повысить достоверность исследования.

В центре каждой ячейки сетки вычисляется градиент плотности и его ориентация. Точки с градиентом плотности, большим среднего значения градиентов плотности во всей области, являются точками разрыва. Производится классификация газодинамических разрывов, рассматривая в ближайших точках дискретные аналоги условий на сильных разрывах. В результате каждая точка относится к одному из видов разрывов: ударной волне (нормальной или косой), тангенциальному разрыву, чисто контактному разрыву, волне сжатия [26, 30].

После выхода начальной ударной волны из узкой части канала она с течением времени полностью дифрагирует, и в затопленном пространстве распространяется головная ударная волна. Другими элементами течения являются контактная поверхность, отделяющая газ, приведенный в движение ударной волной до дифракции, от газа, приведенного в движение дифрагированной ударной волной, и вторичная ударная волна (волна торможения), обращенная вверх по потоку, в которой газ, ускоренный в волне разрежения, тормозится до скорости, соответствующей скорости потока за дифрагированной волной.

Результаты расчетов и их анализ

Распределения плотности во времени в фиксированной точке пространства, расположенной в окрестности прямого угла, показывает рис. 4 в момент времени $t=1,12$ (вариант 1). Результаты расчетов на сетках 1 и 2 достаточно сильно отличаются друг от друга. Использование сетки 1 приводит к недооценке максимума плотности в окрестности угловой точки (приблизительно на 20%), а также к более пологому профилю плотности. При дальнейшем измельчении сетки 2 распределение плотности остается практически неизменным.

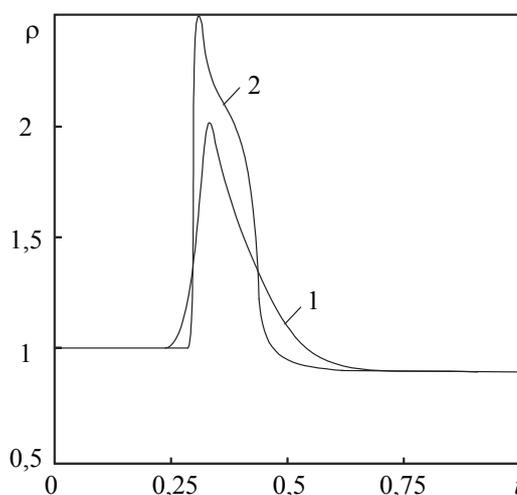


Рис. 4. Распределения плотности во времени, полученные на сетках 1 (линия 1) и 2 (линия 2)

Численные распределения плотности сравниваются с экспериментальными теньевыми картинками поля течения, взятыми из работы [31], на рис. 5 (при $M_1=1,3$, плотность изменяется от 0,792 до 1,522) и на рис. 6 (при $M_1=2,4$, плотность изменяется от 0,158 до 3,221). Приводится около 50 линий уровня. Сгущение линий уровня показывает местоположение фронта дифрагированной ударной волны. Число Маха дифрагированной волны на уровне вертикальной стенки прямого угла составляет 1,13, что хорошо согласуется с данными физического эксперимента [32], которые дают значение 1,15. Фронт падающей и дифрагированной ударной волны размывается приблизительно на 4 ячейки сетки. При этом расчеты на грубой сетке не позволяют воспроизвести мелкие детали течения в области, занятой вихрем (окрестность угловой точки), и поэтому не приводятся.

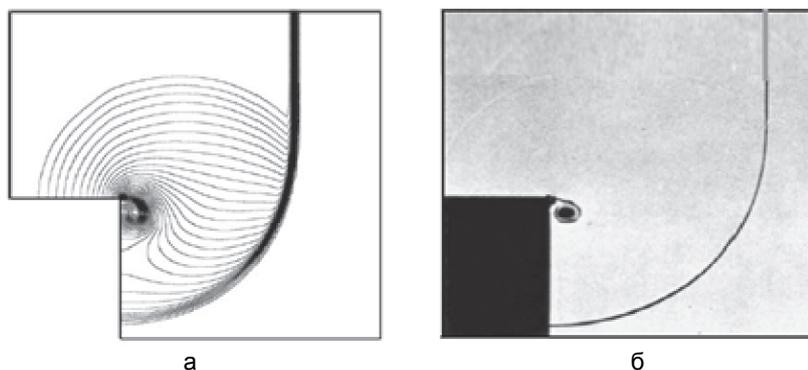


Рис. 5. Линии уровня плотности (а) и теньевая фотография (б) при $M_1=1,3$

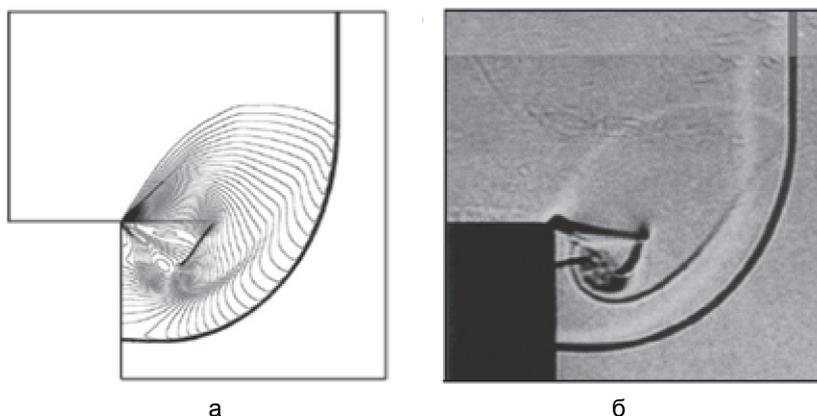


Рис. 6. Линии уровня плотности (а) и теньевая фотография (б) при $M_1=2,4$

Сравнение численной и экспериментальной интерферограмм, соответствующих варианту 1, показывает рис. 7. Дифракция слабой ударной волны приводит к формированию волны разрежения и вихря в окрестности угловой точки. Различие между экспериментальными и численными изображениями объясняется, в частности, влиянием вязкости (в расчетах используются уравнения Эйлера).

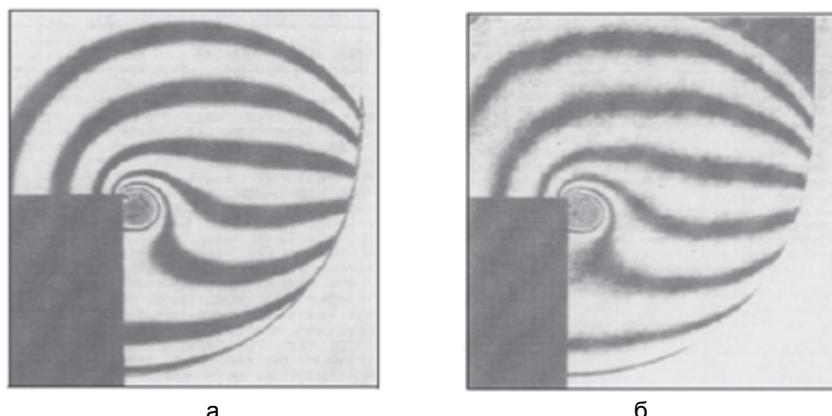


Рис. 7. Численная (а) и экспериментальная (б) интерферограммы при $M_1=1,3$

При $M_1=1,3$ ударно-волновая структура потока, состоящая из вертикальной падающей ударной волны, искривленной дифрагированной волны, а также круговой волны разрежения, увеличивает свои

размеры линейно со временем. Вязкий отрыв на углу порождает закручивающуюся вихревую пелену. При увеличении числа Маха падающей ударной волны до $M_1=2,4$ размер волновой картины продолжает линейно расти со временем, но сама по себе эта картина становится более сложной, чем при малых числах Маха. Поток в окрестности угла является сверхзвуковым, поэтому возмущения не распространяются вверх по потоку.

Заключение

Проведено численное моделирование течения невязкого сжимаемого газа при сверхзвуковом обтекании плоского прямого угла. Дискретизация уравнений, описывающих нестационарное течение невязкого сжимаемого газа, проводится на неструктурированных сетках при помощи метода конечных объемов и схем WENO-типа.

Результаты расчетов по структуре течения, реализующегося при дифракции ударной волны на обратном уступе, хорошо согласуются как с предшествующими численными расчетами, полученными по различным численным методикам, так и с известной из литературы схемой течения, а также с экспериментальными теневыми картинками и интерферограммами.

Литература

1. Засухин О.Н., Булат П.В., Продан Н.В. Развитие методов расчета донного давления // *Фундаментальные исследования*. 2012. № 6–1. С. 273–279.
2. Засухин О.Н., Булат П.В., Продан Н.В. История экспериментальных исследований донного давления // *Фундаментальные исследования*. 2011. № 12–3. С. 670–674.
3. Засухин О.Н., Булат П.В., Продан Н.В. Колебания донного давления // *Фундаментальные исследования*. 2012. № 3–1. С. 204–207.
4. Takayama K., Inoue O. Shock wave diffraction over a 90 degree sharp corner // *Shock Waves*. 1991. V. 1. N 4. P. 301–312. doi: 10.1007/BF01418886
5. Bazhenova T.V., Gvozdeva L.G., Nettleton M.A. Unsteady interactions of shock waves // *Progress in Aerospace Sciences*. 1984. V. 21. N C. P. 249–331. doi: 10.1016/0376-0421(84)90007-1
6. Тугазаков Р.Я. Влияние нестационарных эффектов на отрыв сверхзвукового потока газа с кормовой кромки обтекаемого тела // *Ученые записки ЦАГИ*. 2004. Т. XXXV. № 1–2. С. 21–31.
7. Skews B.W. The perturbed region behind a diffracting shock wave // *Journal of Fluid Mechanics*. 1967. V. 29. N 4. P. 705–719. doi: 10.1017/S0022112067001132
8. Skews B.W., Law C., Muritala A., Bode S. Shear layer behavior resulting from shock wave diffraction // *Experiments in Fluids*. 2012. V. 52. N 2. P. 417–424. doi: 10.1007/s00348-011-1233-9
9. Gnani F., Lo K.H., Zare-Behtash H., Kontis K. Experimental investigation on shock wave diffraction over sharp and curved splitters // *Acta Astronautica*. 2014. V. 99. N 1. P. 143–152. doi: 10.1016/j.actaastro.2014.02.018
10. Hillier R. Computation of shock wave diffraction at a ninety degrees convex edge // *Shock Waves*. 1991. V. 1. N 2. P. 89–98. doi: 10.1007/BF01414904
11. Sun M., Takayama J. The formation of a secondary shock wave behind a shock wave diffracting at a convex corner // *Shock Waves*. 1997. V. 7. N 5. P. 287–295.
12. Genin F., Fryxell B., Menon S. Simulation of detonation propagation in turbulent gas-solid reactive mixtures // *Proc. 41st AIAA/ASME/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*. Tucson, AZ, 2005. Art. 2005-3967.
13. Ray M.P., Puranik B.P., Bhandarkar U.V. Development and assessment of several high-resolution schemes for compressible Euler equations // *International Journal of Computational Methods*. 2014. V. 11. N 1. Art. 1350049. doi: 10.1142/S0219876213500497
14. Quirk J.J. A cartesian grid approach with hierarchical refinement for compressible flows // *ICASE Technical Report No. 94-31017*, 1994.
15. Keats W.A., Lien F.-S. Two-dimensional anisotropic Cartesian mesh adaptation for the compressible Euler equations // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2004. V. 46. N 11. P. 1099–1125. doi: 10.1002/flid.780
16. Yang J.-Y., Muljadi B.P. Simulation of shock wave diffraction over 90° sharp corner in gases of arbitrary statistics // *Journal of Statistical Physics*. 2011. V. 145. N 6. P. 1674–1688. doi: 10.1007/s10955-011-0355-z
17. Reeves J.O., Skews B.W. Unsteady three-dimensional compressible vortex flows generated during shock wave diffraction // *Shock Waves*. 2012. V. 22. N 2. P. 161–172. doi: 10.1007/s00193-012-0353-3
18. Srivastava R.S. On the vorticity distribution over a normal diffracted shock for small and large bends // *Shock Waves*. 2013. V. 23. N 5. P. 525–528. doi: 10.1007/s00193-013-0434-y
19. Kontzialis C.V. Positivity-preserving limiters for discontinuous Galerkin discretizations on unstructured meshes // *Proc. 20th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*. Honolulu, USA, 2011. Art. 2011-3836.
20. Speares W., Berzins M. A 3D unstructured mesh adaptation algorithm for time-dependent shock-dominated problems // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 1997. V. 25. N 1. P. 81–104.

21. Ripley R.C., Lien F.-S., Yovanovich M.M. Numerical simulation of shock diffraction on unstructured meshes // Computers and Fluids. 2006. V. 35. N 10. P. 1420–1431. doi: 10.1016/j.compfluid.2005.05.001
22. Skews B.W. Shock wave diffraction on multi-facetted and curved walls // Shock Waves. 2005. V. 14. N 3. P. 137–146. doi: 10.1007/s00193-005-0266-5
23. Banks J.W., Henshaw W.D., Schwendeman D.W., Kapila A.K. A study of detonation propagation and diffraction with compliant confinement // Combustion Theory and Modeling. 2010. V. 12. N 4. P. 769–808. doi: 10.1080/13647830802123564
24. Abate G., Shyy W. Dynamic structure of confined shocks undergoing sudden expansion // Progress in Aerospace Sciences. 2002. V. 38. N 1. P. 23–42. doi: 10.1016/S0376-0421(01)00016-1
25. Shyy W., Krishnamurty V. Compressibility effect in modeling complex turbulent flows // Progress in Aerospace Sciences. 1997. V. 33. N 9–10. P. 587–645.
26. Bazarov S.B. Image processing in CFD // Proc. 8th International Conference on Computer Graphics and Visualization (GRAPHICON 1998). Moscow, Russia, 1998. P. 258–264.
27. Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н., Козелков А.С., Тетерина И.В. Разностные схемы в задачах газовой динамики на неструктурированных сетках. М.: Физматлит, 2014. 412 с.
28. Булат П.В., Волков К.Н. Моделирование сверхзвукового течения в канале со ступенькой на неструктурированных сетках при помощи WENO-схем // Инженерно-физический журнал. 2015. Т. 88. № 4. С. 848–855.
29. Булат П.В., Волков К.Н. Применение WENO-схем для моделирования взаимодействия отраженной ударной волны с пограничным слоем // Инженерно-физический журнал. 2015. Т. 88. № 5. С. 1163–1170.
30. Ворожцов Е.В. Классификация разрывов течения газа как задача распознавания образов: Препринт № 2386. Новосибирск: ИТПМ, 1986.
31. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир, 1986. 184 с.
32. Liang S.M., Chen H. Flow visualization of numerically simulated blast waves discharging from open-ended duct // AIAA Journal. 2003. V. 41. N 12. P. 2420–2428.

- | | |
|-------------------------------------|---|
| Булат Павел Викторович | – кандидат физико-математических наук, кандидат экономических наук, заведующий международным научным подразделением, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, pavelbulat@mail.ru |
| Волков Константин Николаевич | – доктор физико-математических наук, научный сотрудник, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация; лектор, Университет Кингстона, Лондон, SW15 3DW, Великобритания, k.volkov@kingston.ac.uk |
| Pavel V. Bulat | – PhD, Scientific supervisor of International laboratory, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, pavelbulat@mail.ru |
| Konstantin N. Volkov | – D.Sc., Researcher, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation; Senior Lecturer, Kingston University, London, KT12EE, UK, k.volkov@kingston.ac.uk |