

УДК 62.69

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ ЗАЗОРА РЕЛЬСОВОЙ ПЛЕТИ ПРИ ЕЕ РАЗРЫВЕ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЖЕСТКОСТИ ПОДРЕЛЬСОВОГО ОСНОВАНИЯ

Т.И. Зайцева<sup>a, b</sup>, А.М. Уздин<sup>c</sup>

<sup>a</sup> Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация

<sup>b</sup> АО «Аркадия», Санкт-Петербург, 195112, Российская Федерация

<sup>c</sup> Петербургский государственный университет путей сообщения, Санкт-Петербург, 190031, Российская Федерация

Адрес для переписки: [tania.zai1010@gmail.com](mailto:tania.zai1010@gmail.com)

### Информация о статье

Поступила в редакцию 12.03.15, принята к печати 29.02.16

doi:10.17586/2226-1494-2016-16-2-363-370

Язык статьи – русский

**Ссылка для цитирования:** Зайцева Т.И., Уздин А.М. Моделирование динамической величины зазора рельсовой плети при ее разрыве для различных значений жесткости подрельсового основания // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2016. Т. 16. № 2. С. 362–370. doi:10.17586/2226-1494-2016-16-2-363-370

### Аннотация

**Предмет исследования.** Рассмотрены вопросы безопасности эксплуатации бесстыкового рельсового пути в условиях динамических нагрузок. Исследована величина зазора, образующегося в рельсовой плети при ее возможном разрыве в условиях динамических нагрузок от движущегося поезда и при изменяющейся температуре. Возникающие деформации увязаны с переменной жесткостью основания рельсового пути (балласта). **Методы.** Исследованы продольные колебания в полубесконечном стержне в условиях динамических нагрузок и в процессе температурного расширения стержня конечной длины на упруго-демпфированном основании. Колебательный процесс в полубесконечном стержне на упругом основании смоделирован при помощи расширенного уравнения продольных колебаний, учитывающего реакцию основания, выполняющего роль демпфера. Для определения состояния модели после затухания колебаний использован предельный переход по времени. При решении задачи о температурном расширении стержня конечной длины на упругом основании использовано уравнение равновесия для малого фрагмента, учитывающее температурную нагрузку и силы упругости как самого стержня, так и основания.

**Основные результаты.** Рассчитана максимальная величина динамического смещения конца стержня при различных значениях параметров. Получены распределения смещений и напряжений по длине стержня для различных вариантов распределения жесткости в упругом основании. При возникновении случайного разрыва в рельсе величина его зазора после затухания колебаний устанавливается на уровне 5–7 см. Показано, что амплитуда этих колебаний может достигать 10–12 см. Наличие ограниченной зоны изменения жесткости подрельсового основания не вызывает существенной деформации рельсовых плетей, но может приводить к росту зазора при ее разрыве.

**Практическая значимость.** Предложенные модели могут быть использованы при расчете и проектировании бесстыковых рельсовых путей.

### Ключевые слова

зазор, разрыв, жесткость, напряженно-деформированное состояние, рельсовая плеть, жесткость подрельсового основания

### Благодарности

Исследования поддержаны грантами для молодых ученых Санкт-Петербурга серия ПСП №12118 (2012 г.) и № 13156 (2013 г.).

## MODELING OF RAIL BAR DYNAMIC GAP AT ITS BREAK FOR DIFFERENT STIFFNESS VALUES OF RAIL BASE

T.I. Zaitseva<sup>a, b</sup>, A.M. Uzdin<sup>c</sup>

<sup>a</sup> ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

<sup>b</sup> “Arcadia”, JSC, Saint Petersburg, 195112, Russian Federation

<sup>c</sup> Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University, Saint Petersburg, 190031, Russian Federation

Corresponding author: [fellics@yandex.ru](mailto:fellics@yandex.ru)

### Article info

Received 12.03.15, accepted 29.02.16

doi:10.17586/2226-1494-2016-16-2-363-370

Article in Russian

**For citation:** Zaitseva T.I., Uzdin A.M. Modeling of rail bar dynamic gap at its break for different stiffness values of rail base. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2016, vol. 16, no. 2, pp. 362–370. doi:10.17586/2226-1494-2016-16-2-363-370

**Abstract**

**Subject of Research.** The paper deals with questions of operation safety for continuous welded rail track under dynamic loads. We study the gap value formed in the rail bar in view of its possible break under the conditions of dynamic loads caused by the moving train and varying temperatures. Occurring strains are linked to a variable stiffness of the rail track base (ballast). **Methods.** We studied longitudinal oscillations in a semi-infinite rod under dynamic loads and in the process of thermal expansion of the finite length rod on the elastic-damped foundation. Oscillatory processes in a semi-infinite rod on an elastic foundation was modeled using the extended equation of longitudinal vibrations, taking into account the reaction of the foundation, performing the role of a damper. To determine the state of the model after the damping of oscillations we used the time limiting transition. In solving the problem of thermal expansion of the finite length rod on the elastic foundation we used equilibrium equation for small fragment, which takes into account the thermal load and the elastic force of both the rod and the foundation. **Main Results.** We have calculated the maximum value of the dynamic displacement of the rod end at different values of parameters. We have obtained the distributions of stresses and displacements along the rod length for different stiffness distribution in the elastic foundation. In the event of accidental break in the rail, the gap value after the damping of oscillations is set at the level of 5-7 cm. We have shown that the amplitude of these oscillations can reach 10-12 cm. The availability of limited stiffness change zones in the rail base causes no significant deformation of rail bars, but can lead to the growth of the gap in the rail bar break. **Practical Relevance.** The proposed model can be used in the calculation and design of continuous welded rail tracks.

**Keywords**

gap, break, stiffness, strained deformed state, rail bar, rail base stiffness

**Acknowledgements**

The research was supported by the grants for Saint Petersburg young scientists of PSP series No. 12118 (2012) and No. 13156 (2013).

**Введение**

Бесстыковой путь является в настоящее время основным видом пути на строящихся железных дорогах. Для высокоскоростных линий такой путь считается единственно возможным [1]. Опыт эксплуатации бесстыкового пути показывает, что при разрыве рельса верхнего строения пути на щебеночном балласте при соблюдении всех требований укладки и креплений возникают зазоры до 6–8 см [2]. Эти зазоры допустимы и не вызывают схода поезда с рельсов.

В литературе [3] имеются оценки статической величины зазора, которая остается после разрыва и прохода поезда. Разрыв рельса происходит обычно под движущимся составом. В момент разрыва динамические смещения концов рельса превышают статические [4]. До настоящего момента нет решения динамической задачи о колебаниях рельса в момент разрыва.

Ограничение возможности применения бесстыкового пути связано также с влиянием жесткости подрельсового основания на напряженно-деформированное состояние рельсовой плети. При высокой жесткости подрельсового основания и жестком креплении рельсовой плети в ней возникают значительные напряжения, которые могут привести к разрыву (зимой) или выпучиванию (летом). При малой жесткости пути и возможности проскальзывания по подкладкам напряжения в рельсе снижаются [5]. Однако при этом возникает опасность большого зазора при случайном разрыве рельсовой плети, что нарушает безопасность движения [6–8]. В этой связи нами впервые предпринята попытка увязать величину образующихся в местах разрыва рельсовой плети зазоров под действием динамических нагрузок и температурных колебаний с жесткостью рельсового основания (балласта). В частности, рассматривается балласт с жесткой вставкой.

**Постановка задачи исследования динамических свойств**

Для построения математических моделей и решения соответствующих уравнений применим классические методы строительной механики и теории дифференциальных уравнений. Динамическая задача решается с применением преобразований Лапласа.

Для оценки динамических смещений рельса под действием нагрузки рассмотрим полубесконечный стержень, лежащий на сплошном упруго-демпфирующем основании (рис. 1).

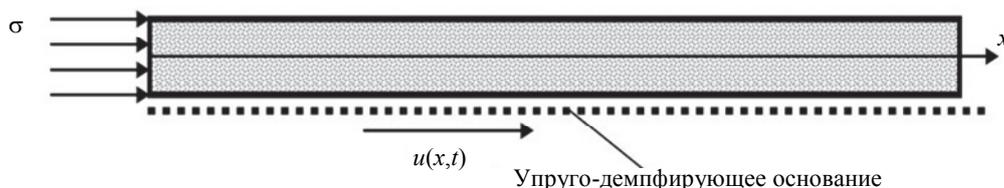


Рис. 1. Расчетная модель рельса на упруго-демпфирующем основании (балласте), направленная вдоль оси абсцисс  $x$

На конце стержня в момент разрыва скачкообразно возникает напряжение  $\sigma$ , равное температурному напряжению разрыва в рельсе. Для термоупрочненных рельсов бесстыкового пути напряжение разрыва составляет 400 МПа. Упруго-демпфирующая среда моделирует свойства балласта и характеризуется

двумя показателями – погонной жесткостью  $k$  и погонным демпфированием  $B$ . Погонная жесткость определяет силу, действующую на один погонный метр рельса от его единичного смещения, и измеряется в  $\text{kH/m}^2$ . Аналогично, погонное демпфирование определяет силу, действующую на один погонный метр рельса при его движении с единичной скоростью. Рассматриваемая задача до настоящего времени не решена, и на практике считают, что динамическая величина зазора в 1,5–2 раза больше статической. Уравнение колебаний рассматриваемой системы имеет вид [9]

$$\rho F u_{tt}(x,t) = E F u_{xx}(x,t) - k u(x,t) - B u_t(x,t), \quad (1)$$

где  $\kappa = \sqrt{\frac{K}{F\rho}}$ ,  $K$  – жесткость балласта;  $B = \frac{\gamma\kappa}{\omega}$ ;  $E F u_{xx}(x,t)$  – изменение усилий по длине стержня;  $E$  – модуль упругости рельса;  $\rho$  – плотность стали;  $F$  – площадь поперечного сечения рельса;  $\gamma$  – коэффициент неупругого сопротивления;  $\omega$  – частота колебаний;  $u(x,t)$  – смещение точек стержня с координатой  $x$  в момент времени  $t$ ;  $u_t(x,t)$  – скорость точек стержня с координатой  $x$  в момент времени  $t$ ;  $u_{tt}(x,t)$  – ускорение точек стержня с координатой  $x$  в момент времени  $t$ . Уравнение (1) рассматривается при нулевых начальных условиях,

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0,$$

и при следующих граничных условиях:

$$u_x = \frac{\sigma}{E} \eta(t), \quad u(\infty, t) = 0,$$

где  $\sigma$  – напряжение при разрыве рельсовой плети;  $\eta$  – единичная функция Хэвисайда.

Решение уравнения (1) при  $x = 0$ , т.е. смещения торца рельса, описаны формулой

$$u(0,t) = \frac{\sigma}{E} s \int_0^t e^{-\nu t} J_0(\delta t) dt, \quad (2)$$

где  $s = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  – скорость распространения волны в рельсе;  $\nu = \frac{\beta}{2}$ ;  $J_0$  – функция Бесселя;  $\delta = \kappa - \frac{\beta^2}{4}$ ,

$\beta = \frac{B}{\rho F}$  – погонная вязкость.

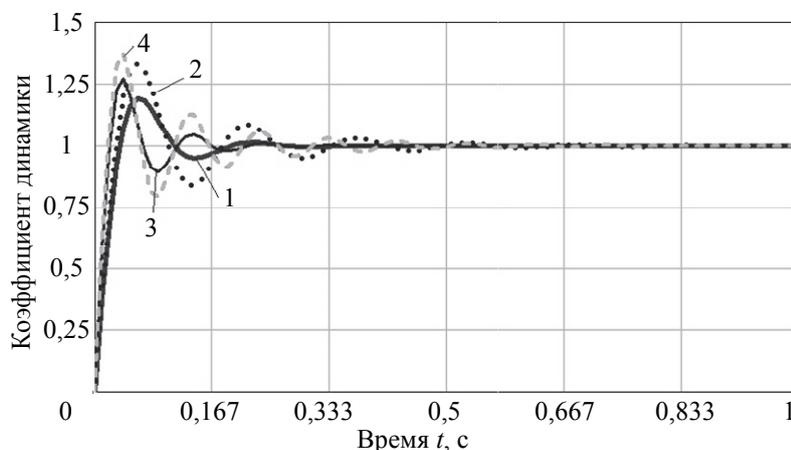


Рис. 2. Изменение коэффициента динамики во времени при различных значениях  $K$  и  $b$ :  
 $K_{\min} = 1000 \text{ кН/м}^2$ ,  $b_{\max} = 25 \text{ с}^{-1}$  (1);  $K_{\min} = 1000 \text{ кН/м}^2$ ,  $b_{\min} = 10 \text{ с}^{-1}$  (2);  $K_{\max} = 2500 \text{ кН/м}^2$ ,  $b_{\max} = 25 \text{ с}^{-1}$  (3);  
 $K_{\max} = 2500 \text{ кН/м}^2$ ,  $b_{\min} = 10 \text{ с}^{-1}$  (4)

Для оценки коэффициента динамики рассмотрим статическую величину зазора. При этом уравнение для оценки смещения при разрыве рельса имеет вид

$$E F u_{xx} - k u = 0. \quad (3)$$

Решение уравнения (3) при  $x = 0$  имеет вид

$$u_{st}(0) = \frac{\sigma}{\lambda E}, \quad (4)$$

где  $\lambda = -\sqrt{\frac{\kappa}{E F}}$ .

Коэффициент динамики показывает, во сколько раз динамическое смещение превышает статическое – отношение  $u(0,t)$  (2) к  $u_{st}(0)$  (4). В общем виде

$$\mu(t) = \lambda s \int_0^t e^{-\nu t} J_0(\delta t) dt .$$

На рис. 2 приведены зависимости изменения коэффициента динамики во времени при различных значениях  $K$  и  $b$ . Величина жесткости балласта  $K$  меняется в пределах 1000–2500 кН/м<sup>2</sup>. Нижняя граница относится к свежееуложенному балласту в летнее время, а верхняя граница – к смерзшемуся старому балласту. Характеристика затухания  $b$  меняется в пределах 10–25 с<sup>-1</sup> [10, 11].

Оценка динамических смещений рельса при разрыве для различных значений жесткости и затухания балласта показала, что во всех случаях коэффициент динамики не превосходит 1,5. Наименьшие его значения имеют место для свежееуложенного балласта. Наибольшее значение коэффициента динамики имеет место для старого смерзшегося балласта и составляет 1,38.

### Оценка температурных деформаций

Запишем уравнение температурной деформации рельсовой плети бесстыкового пути на упругом основании при наличии вставки в основание с другой характеристикой жесткости. При укладке бесстыкового пути на отдельных участках происходит изменение жесткости подрельсового основания [12, 13]. Это может быть связано с наличием искусственных сооружений в теле насыпи, смерзанием балласта и т.п. В данной постановке задачи рассмотрим влияние изменения жесткости подрельсового основания на напряженно-деформированное состояние рельсовой плети при изменении ее температуры [14].

Схема для расчета фрагмента рельсовой плети показана на рис. 3. Плеть имеет общую длину  $L$ , равную обычно 850 м, и лежит на упругом основании. На определенной длине плети имеется участок большей или меньшей жесткости. В результате этого плетью можно разделить на три участка длиной  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$ ;  $L_1 + L_2 + L_3 = L$ .

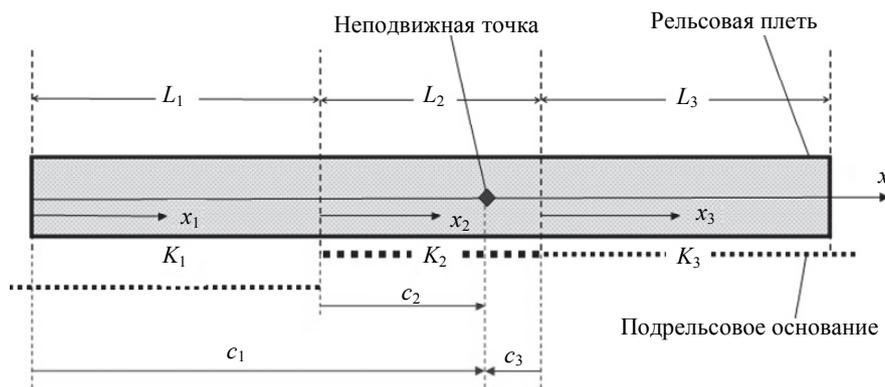


Рис. 3. Схема для расчета фрагмента рельсовой плети, направленная вдоль оси абсцисс  $x$ .  $L_i, x_i, K_i, c_i$  – соответственно длина, координата, жесткость и координата неподвижной точки для  $i$ -го участка

Уравнение деформации рельсовой плети запишем в виде

$$EFu'' - \kappa u = \kappa \alpha T(x - c) , \quad (5)$$

где  $EF$  – продольная жесткость пути;  $u$  – перемещение стержня по его длине;  $u''$  – скорость изменения усилий по длине стержня;  $\kappa \alpha T(x - c)$  – реакция подрельсового основания при нагреве рельсовой плети;  $\alpha$  – коэффициент температурного удлинения рельсовой плети,  $T$  – температура нагрева;  $x$  – координата рассматриваемой точки в принятой системе координат,  $c$  – координата неподвижной точки.

Уравнение (5) рассматривается для каждого участка рельсовой плети в местной системе координат  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  соответственно. Положение точки  $c$  фиксировано, а  $c_i$  принимают соответствующие значения при записи уравнений для каждого участка. Температурное удлинение рельса происходит в разные стороны относительно точки  $x = c$ . Положение точки  $c$  определяется из условия равновесия рельсовой плети.

Для однородного основания это условие имеет вид  $\int_0^L \kappa \alpha T(x - c) dx = 0$ . Для плети, имеющей более жесткую или более податливую вставку в основание, уравнение усложнится [15]:

$$\sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \kappa_i \alpha T(x_i - c_i) dx_i = 0 .$$

Представим уравнение (5) следующим образом:

$$u'' - \kappa u = \kappa \alpha T(x - c), \quad (6)$$

где  $\kappa = \frac{K}{EF}$ ,  $u$  – смещение рельса.

Уравнение (6) рассматривается при следующих граничных условиях:

- напряжения на правом и левом торце стержня равны нулю,  $\sigma|_{x=0} = 0$ ,  $\sigma|_{x=L_3} = 0$ ;
- смещение на конце первого участка совпадает со смещением в начале второго;
- смещение на конце второго участка совпадает со смещением в начале третьего  $u|_{x=0} = u|_{x=L_1}$ ,  $u|_{x=L_1} = u|_{x=L_2}$ ;
- напряжение на конце первого участка совпадает с напряжением в начале второго;
- напряжение на конце второго участка совпадает с напряжением в начале третьего,  $\sigma|_{x=0} = \sigma|_{x=L_1}$ ,  $\sigma|_{x=L_1} = \sigma|_{x=L_2}$ .

Решение уравнения (6) имеет вид

$$u = C_{1i} e^{\kappa x} + C_{2i} e^{-\kappa x} - \alpha T(x - c),$$

где  $C_{1i}$ ,  $C_{2i}$  – постоянные, которые определяются из условий на границах участков ( $i$  – номер участка).

Напряжение рельсовой плети определяется как  $\sigma = u' \cdot E$  и представимо в виде

$$\sigma = ((C_{1i} e^{\kappa x} + C_{2i} e^{-\kappa x}) \kappa - \alpha T) E.$$

На рис. 4–8 приведены эпюры смещений и напряжений в рельсовой плети при различных значениях жесткости балласта и при нагреве рельса на 40 К.

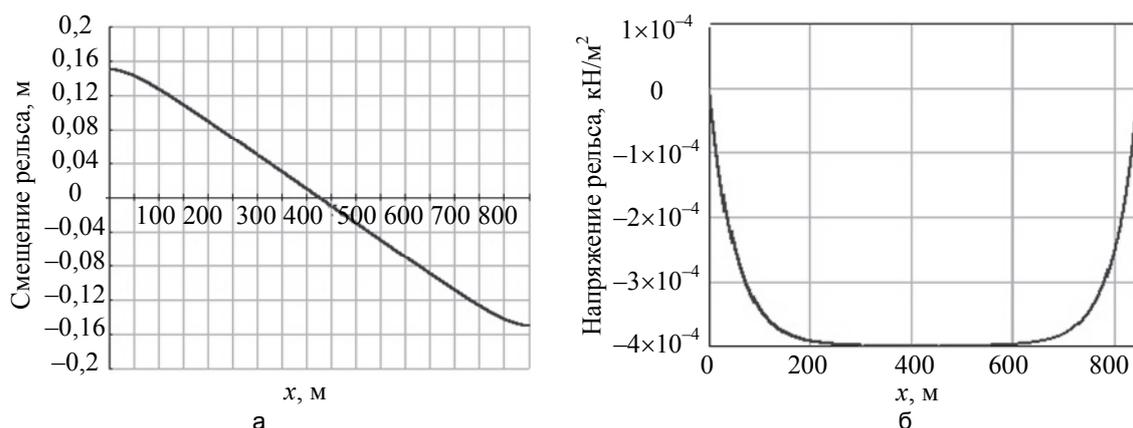


Рис. 4. Изменение смещений рельса (а) и напряжений в нем (б) по длине рельсовой плети  $x$  при отсутствии вставки. Жесткость подрельсового основания на всем промежутке длины рельса  $0,02 \text{ кН/м}^2$

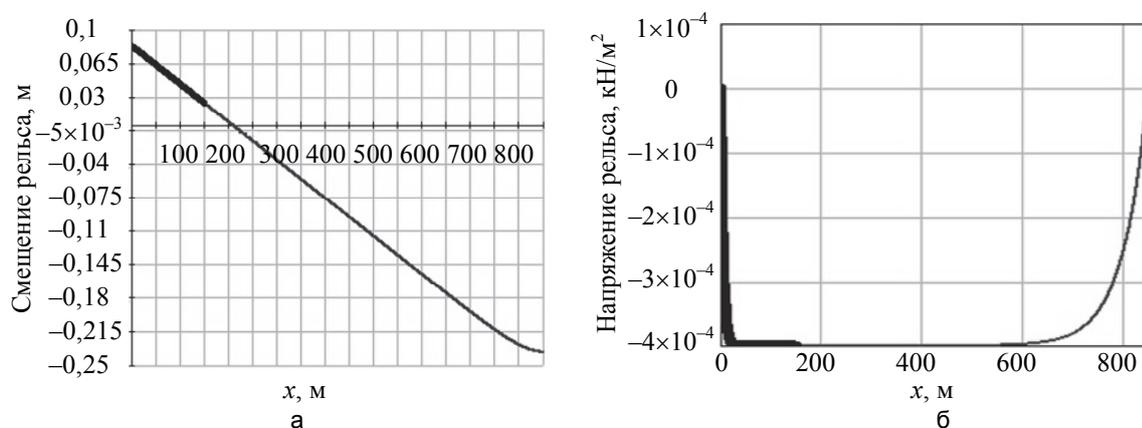


Рис. 5. Изменение смещений рельса (а) и напряжений в нем (б) по длине рельсовой плети  $x$  при наличии на краю жесткой вставки длиной 150 м (синий цвет на графике) в основание рельсовой плети. Жесткость подрельсового основания на участке вставки  $0,2 \text{ кН/м}^2$ , жесткость подрельсового основания на участках без вставки  $0,02 \text{ кН/м}^2$

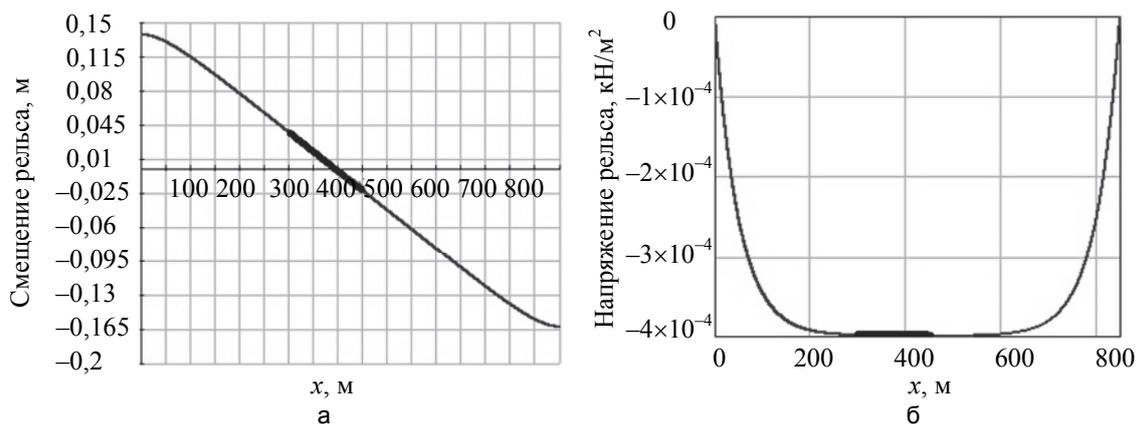


Рис. 6. Изменение смещений рельса (а) и напряжений в нем (б) по длине рельсовой плети  $x$  при наличии в середине жесткой вставки длиной 150 м (темный участок на графике) в основание рельсовой плети. Жесткость подрельсового основания на участке вставки  $0,2 \text{ кН/м}^2$ , жесткость подрельсового основания на участках без вставки  $0,02 \text{ кН/м}^2$

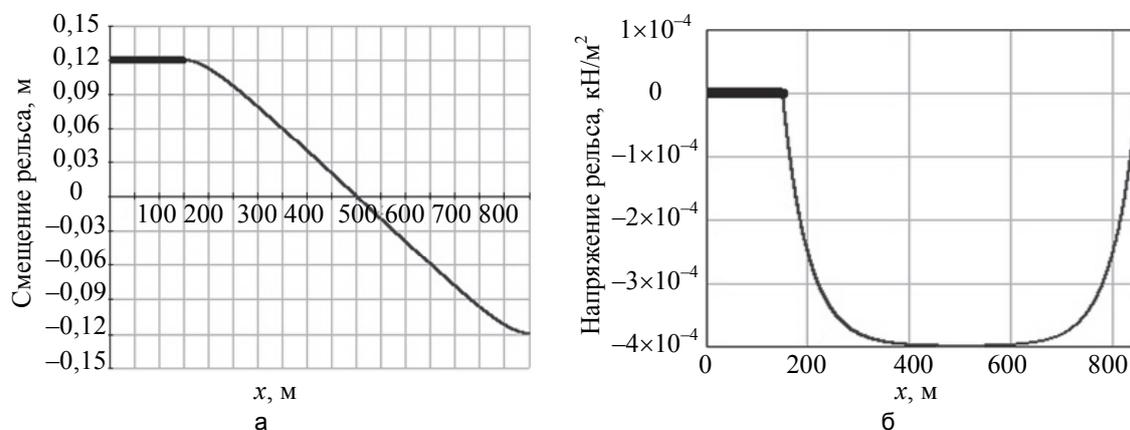


Рис. 7. Изменение смещений рельса (а) и напряжений в нем (б) по длине рельсовой плети  $x$  при наличии на краю гибкой вставки длиной 150 м (темный участок на графике) в основание рельсовой плети. Жесткость подрельсового основания на участке вставки  $0,0000002 \text{ кН/м}^2$ , жесткость подрельсового основания на участках без вставки  $0,02 \text{ кН/м}^2$

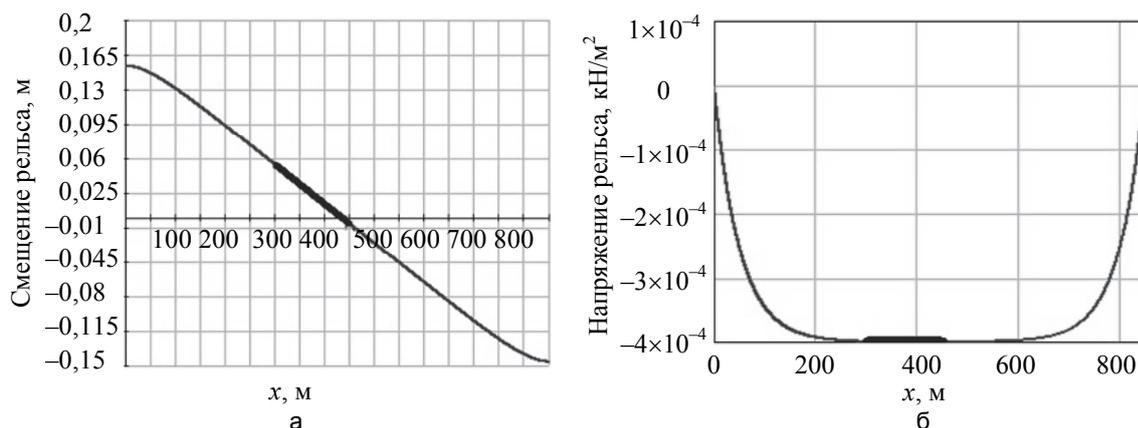


Рис. 8. Изменение смещений рельса (а) и напряжений в нем (б) по длине рельсовой плети  $x$  при наличии в середине гибкой вставки длиной 150 м (темный участок на графике) в основание рельсовой плети. Жесткость подрельсового основания на участке вставки  $0,0000002 \text{ кН/м}^2$ , жесткость подрельсового основания на участках без вставки  $0,02 \text{ кН/м}^2$

Для последующих сравнений на рис. 4 показано изменение смещений и напряжений при отсутствии вставки в основание рельсовой плети. Можно видеть, что смещения уменьшаются по краям (рис. 4, а), что может привести к разрыву. Во избежание этого используют уравнительные (укороченные) рельсы.

Рис. 5, 6 иллюстрирует изменение смещений и напряжений при наличии жесткой вставки длиной 150 м в основание на краю и в середине рельсовой плети. Темным цветом показаны участки графиков, соответствующие наличию вставки. На участке вставки возникает область резкого падения напряжения (рис. 5, б). Можно утверждать, что наличие жесткой вставки у края подрельсового основания приводит к увеличению смещения другого края рельса (рис. 5, а). Если же вставка расположена в середине, то изменение жесткости подрельсового основания не приводит к существенным изменениям.

Для случая гибкой вставки длиной 150 м на краю рельсовой плети (рис. 7, а) край рельса на участке вставки имеет постоянные смещения, в то время как другой край смещается несущественно. Напряжения на участке вставки отсутствуют, максимальные напряжения совпадают со значениями при отсутствии вставки (рис. 4). Когда гибкая вставка располагается в середине рельсовой плети (рис. 8), смещения краев и напряжения изменяются незначительно.

### Заключение

Предложена математическая модель для исследования продольных колебаний рельсовой плети в условиях динамических нагрузок, обусловленных прохождением поезда, и в процесс температурного расширения с учетом наличия упругого основания (балласта) с постоянной по длине и переменной (наличие вставки) жесткостью.

Проведенное математическое моделирование позволяет сделать следующие практические выводы:

- при колебаниях конца рельсовой плети в момент ее разрыва возможная величина зазора может достигать величины 10–12 см, в то время как статический зазор составляет величину 5–7 см;
- наличие ограниченной зоны изменения жесткости подрельсового основания не приводит к существенному изменению деформации рельсовых плетей, но может приводить к росту зазора при разрыве рельсовой плети.

Полученные результаты могут быть использованы при расчете и проектировании бесстыковых рельсовых путей.

### Литература

1. Боченков М.С. Зазоры при изломе рельсовой плети // Труды ЦНИИ МПС. 1962. Вып. 244. С. 164–172.
2. Першин С.П. О напряженно-деформированном состоянии рельсов при изменении температуры // Вестник ЦНИИ МПС. 1967. №5. С. 25–28.
3. Панькин И.А. Температурные перемещения и напряжения в рельсах // Труды НИИТа. 1972. Вып. 413. С. 21–35.
4. Андреев Г.Г. Температурные напряжения в бесстыковом пути на мостах // Путь и путевое хозяйство. 1977. №12. С. 34–35.
5. Воробьев Э.В., Новакович В.И. Особенности устройства и работы бесстыкового пути // Путь и путевое хозяйство. 2003. № 4. С.15–19.
6. Крюков Е.П. Брус в упругой среде, сопротивляющийся продольным смещениям // Сообщение ЦНИИСа №137. М., 1958. С. 86.
7. Анисимов В.М. Бесстыковой путь на мостах // Путь и путевое хозяйство. 1964. №8. С. 32.
8. Новакович М.В. Зазор при учете времени эксплуатации // Путь и путевое хозяйство. 2000. №11. С. 15.
9. Лалин В.В., Денисов Г.В. Динамическое поведение бесконечных стержневых элементов на упруго-вязком основании под действием точечного источника возмущения // Научный вестник Воронежского ГАСУ. Строительство и архитектура. 2013. №2. С. 105–113.
10. Новакович В.И., Григорьева И.А. Рельсы для бесстыкового пути // Путь и путевое хозяйство. 2001. №9. С. 28–32.
11. Takagi R. High - speed railways. The last 10 years // Japan Railways & Transport Review. 2005. N 3. P. 4–7.
12. Перегудова М.В., Виногоров Н.П. Бесстыковой путь на мостах // Путь и путевое хозяйство. 2009. №3. С. 26–28.
13. Бешлиу В.А. Оценка допустимой величины зазора при разрыве рельсовой плети с точки зрения безопасности движения поездов // Природные и техногенные риски. Безопасность сооружений. 2012. №3. С. 56–57.
14. Zhanga G.-D., Guo B.-Z.. On the spectrum of Euler-Bernoulli beam equation with Kelvin – Voigt damping // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2011. V. 374. N 1. P. 210–229. doi: 10.1016/j.jmaa.2010.08.070
15. Зайцева Т.И., Уздин А.М. Влияние изменения жесткости подрельсового основания на напряженно-деформированное состояние рельсовой плети // Природные и техногенные риски. Безопасность сооружений. 2012. № 3. С. 53–55.

*Зайцева Татьяна Игоревна*

– ассистент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация; инженер, АО «Аркадия», Санкт-Петербург, 195112, Российская Федерация, tania.zai1010@gmail.com

- Уздин Александр Моисеевич* – доктор технических наук, профессор, профессор, Петербургский государственный университет путей сообщения, Санкт-Петербург, 190031, Российская Федерация, uzdin@mail.ru
- Tatiana I. Zaitseva* – assistant, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation; engineer, “Arcadia”, JSC, Saint Petersburg, 195112, Russian Federation, tania.zai1010@gmail.com
- Alexander M. Uzdin* – D.Sc., Professor, Professor, Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University, Saint Petersburg, 190031, Russian Federation, uzdin@mail.ru