УДК 62.50:681.5.01

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТРИЧНЫХ КОМПОНЕНТОВ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕССА УПРАВЛЕНИЯ В АЛГОРИТМАХ РАЗМЕЩЕНИЯ МОД МАТРИЦЫ СОСТОЯНИЯ ПРОЕКТИРУЕМОЙ СИСТЕМЫ

Н.А. Вундер[a], А.В. Ушаков[a]

[a] Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация
Адрес для переписки: 79214215187@ya.ru

Информация о статье
Поступила в редакцию 05.11.15, принята к печати 25.12.15
doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-2-371-374
Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Вундер Н.А., Ушаков А.В. Алгебраические свойства матричных компонентов моделей процесса управления в алгоритмах размещения мод матрицы состояния проектируемой системы // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2016. Т. 16. № 2. С. 371–374. doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-2-371-374

Аннотация

Предмет исследования. Рассмотрена задача наделения проектируемой системы требуемым размещением мод ее матрицы состояния. **Методы.** Задача решена с использованием векторно-матричного формализма метода пространства состояния с доминированием внимания на алгебраических свойствах матрицы управления объекта. **Основные результаты.** Получены алгебраические условия, накладываемые на матричные компоненты модели объекта управления и системы, которые позволили создать алгоритмы решения поставленной задачи без обязательного обращения к матричному уравнению Сильвестра и формуле Аккермана. **Практическая значимость.** Расширена пользовательская база алгоритмического обеспечения процедур синтеза систем управления на заданные показатели качества.

Ключевые слова
размещение мод матрицы, образ матрицы управления, алгоритмы синтеза

Благодарности
Работа поддержана правительством Российской Федерации (грант 074-U01) и Министерством образования и науки Российской Федерации (проект 14. Z50.31.0031).

ALGEBRAIC PROPERTIES OF MATRIX COMPONENTS OF CONTROL PLANT MODELS IN PLACEMENT STATE MATRIX MODES OF SYSTEM ALGORITHMS FOR DESIGNED SYSTEM

N.A. Vunder[a], A.V. Ushakov[a]

[a] ITMO University, 197101, Saint Petersburg, Russian Federation
Corresponding author: 79214215187@ya.ru

Article info
Received 05.11.15, accepted 25.12.15
doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-2-371-374
Article in Russian

For citation: Vunder N.A., Ushakov A.V. Algebraic properties of matrix components of control plant models in placement state matrix modes of system algorithms for designed system. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2016, vol. 16, no. 2, pp. 371–374. doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-2-371-374

Abstract

Subject of Research. The paper deals with the problem of required placement of state matrix modes in the system being designed.**Methods.**The problem has been solved with the use of vector matrix formalism of state space method with the dominant attention at the algebraic properties of the object control matrix. **Main Results.** Algebraic conditions have been obtained imposed on the matrix components of control plant and system models, which has helped to create the algorithms for solving the tasks without necessarily resorting to matrix Sylvester equation and Ackermann's formula. **Practical Relevance.** User's base of algorithms for synthesis procedures of control systems with specified quality indices has been extended.

Keywords
matrix modes placement, control matrix image, synthesis algorithms

Acknowledgements
This work was supported by the Government of the Russian Federation, Grant 074-U01 and the Ministry of Education and Science (Project 14. Z50.31.0031).

Проблема размещения мод матрицы состояния проектируемой системы имеет достаточно богатую библиографию и алгоритмическое обеспечение [1–5]. Тем не менее, формализм метода пространства состояний [1, 4, 5], базирующийся на алгебраических свойствах векторно-матричных компонентов [6] модельных представлений процессов управления, еще не исчерпал всех своих возможностей. Использованию одной из них для построения алгоритмов управления, позволяющих осуществлять желаемое размещение мод матрицы состояния проектируемой системы, посвящается настоящая работа.

Зададим объект управления (ОУ), проектируемую систему (ПС) с желаемым размещением мод ее матрицы состояния и сигнал управления (СУ), с помощью которого ОУ преобразуется в ПС, системой соотношений

$$\text{ОУ: } \dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t);\ \mathbf{x}(0);\ \mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\mathbf{x}(t). \tag{1}$$

$$\text{ПС: } \dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{F}\mathbf{x}(t)+\mathbf{G}\mathbf{g}(t);\ \mathbf{x}(0);\ \mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\mathbf{x}(t). \tag{2}$$

$$\text{СУ: } \mathbf{u}(t)=\mathbf{u}(t,\mathbf{x},\mathbf{g})=\mathbf{u}(t,\mathbf{x})+\mathbf{u}(\mathbf{g}(t))=\mathbf{K}_g\mathbf{g}(t)-\mathbf{K}\mathbf{x}(t). \tag{3}$$

В соотношениях (1)–(3) $\mathbf{x}$ – вектор состояния, $\mathbf{x}\in R^n$; $\mathbf{g},\mathbf{y}$ – соответственно вектора задающего воздействия (ЗВ) и выхода, $\mathbf{g},\mathbf{y}\in R^m$; $\mathbf{u}$ – вектор управления, $\mathbf{u}\in R^l$; $\mathbf{A},\mathbf{F}$ – матрицы состояния; $\mathbf{A},\mathbf{F}\in R^{n\times n}$; $\mathbf{B}$, $\mathbf{G}$ – матрицы управления ОУ и входа ПС, $\mathbf{B}\in R^{n\times l}$; $\mathbf{G}\in R^{n\times m}$; $\mathbf{C}$ – матрица выхода, $\mathbf{C}\in R^{m\times n}$; $\mathbf{K}_g$ – матрица прямой связи по входному воздействию, $\mathbf{K}_g\in R^{l\times m}$; $\mathbf{K}$ – матрица отрицательной обратной связи, $\mathbf{K}\in R^{l\times n}$. Система (2) получена функциональным объединением ОУ и устройством формирования сигнала управления (3), не расширяющим размерность вектора состояния, поэтому вектор ее состояния совпадает с вектором состояния исходного ОУ (1).

Ставится задача сформировать матрицы $\mathbf{K}_g$ и $\mathbf{K}$, с помощью которых ОУ (1) преобразуется в ПС (2). Задача на первом этапе решается с использованием гипотез о полной измеримости ЗВ $\mathbf{g}(t)$ и вектора состояния $\mathbf{x}(t)$. Для поиска $\mathbf{u}(t)$, а следовательно, $\mathbf{K}_g$ и $\mathbf{K}$, выполним вычитание из (2) (1), что дает

$$0=(\mathbf{F}-\mathbf{A})\mathbf{x}(t)+\mathbf{G}\mathbf{g}(t)-\mathbf{B}\mathbf{u}(t). \tag{4}$$

Перепишем (4) в виде

$$\mathbf{B}\mathbf{u}(t)=(\mathbf{F}-\mathbf{A})\mathbf{x}(t)+\mathbf{G}\mathbf{g}(t). \tag{5}$$

Если в (5) учесть (3), то получим

$$\mathbf{B}\mathbf{K}_g\mathbf{g}(t)-\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}(t)=(\mathbf{F}-\mathbf{A})\mathbf{x}(t)+\mathbf{G}\mathbf{g}(t). \tag{6}$$

Выражение (6) позволяет записать два равенства

$$\mathbf{B}\mathbf{K}_g=\mathbf{G}; \tag{7}$$

$$\mathbf{B}\mathbf{K}=(\mathbf{A}-\mathbf{F}). \tag{8}$$

Решение (7) относительно $\mathbf{K}_g$ пока отложим, решим (8) для следующих случаев.

1. $rank\ \mathbf{B}=n=\dim\mathbf{x}\Rightarrow\mathbf{B}:\exists\mathbf{B}^{-1}$ – обратная **B** матрица [6].

   Тогда для $\mathbf{K}$ из (8) можно будет записать

   $$\mathbf{K}=\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}-\mathbf{F}).$$

   Эта ситуация характеризуется большим системным богатством, позволяющим назначать желаемую структуру мод и собственных векторов матрицы состояния ПС, а также решать особый класс задач, подобных [7]. В этой связи при конструировании объекта управления [8] надо добиваться максимально возможного значения ранга $rank\ \mathbf{B}$ матрицы **B** управления ОУ (1).

2. $\mathbf{B}:\nexists\mathbf{B}^{-1}\ \&\ (\mathbf{A}-\mathbf{F})\in\operatorname{Im}\mathbf{B}$, $\operatorname{Im}\mathbf{B}$ – образ матрицы $\mathbf{B}$ [6].

   Умножение соотношения (8) на матрицу $\mathbf{B}^T$ дает

   $$\mathbf{B}^T\mathbf{B}\mathbf{K}=\mathbf{B}^T(\mathbf{A}-\mathbf{F}),$$

   что позволяет записать для матрицы **K**

   $$\mathbf{K}=(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{A}-\mathbf{F}).$$

3. $\mathbf{B}:\nexists\mathbf{B}^{-1}\ \&\ (\mathbf{A}-\mathbf{F})\notin\operatorname{Im}\mathbf{B}$.

   Тогда на основании (8) запишем

   $$(\mathbf{F}-\mathbf{A})=-\mathbf{B}\mathbf{K}. \tag{9}$$

Пусть $\mathbf{\Gamma}$: $\dim\mathbf{\Gamma} = \dim\mathbf{F} = (n\times n)$ & $\sigma\{\mathbf{\Gamma}\} = \sigma\{\mathbf{F}\}$ – алгебраический спектр собственных чисел матрицы [6]. Введем в рассмотрение базисный корректор в виде $(n\times n)$-матрицы $\mathbf{M}$, после чего запишем (9) в форме $\left(\mathbf{M\Gamma M}^{-1}-\mathbf{A}\right) = -\mathbf{BK}$. Выбором матрицы $\mathbf{M}$ можно найти такую, что будет выполняться условие $\left(\mathbf{M\Gamma M}^{-1}-\mathbf{A}\right)\in \mathrm{Im}\mathbf{B}$. Упростим поиск матрицы $\mathbf{M}$. Для этого $\mathbf{M\Gamma M}^{-1}-\mathbf{A} = -\mathbf{BK}$ запишем в эквивалентной форме

$$\mathbf{M\Gamma} - \mathbf{AM} = -\mathbf{BKM}. \tag{10}$$

Уравнение (10) запишем в виде пары уравнений

$$\mathbf{M\Gamma} - \mathbf{AM} = -\mathbf{BH};\quad \mathbf{H} = \mathbf{KM}. \tag{11}$$

Уравнениями (11) вся нагрузка с проблемы поиска матрицы **M** перенесена на матрицу **H**, требования к которой,

$$\mathbf{H} = \arg\left\{\dim\mathbf{H} = \dim\mathbf{B}^T \;\&\; observable(\mathbf{\Gamma},\mathbf{H})\right\}, \tag{12}$$

легко реализуемы так, что матрица **H** может быть задана достаточно просто путем проверки выполнения условия (12) [4]. Первое матричное уравнение в (11) именуется матричным уравнением Сильвестра (УС). Решение УС относительно матрицы $\mathbf{M}$ позволяет уравнение $\mathbf{H} = \mathbf{KM}$ при заданной матрице **H** решить относительно матрицы $\mathbf{K}$ в форме $\mathbf{K} = \mathbf{HM}^{-1}$.

Матрица $\mathbf{K}_g$ вычисляется из условия требований к качеству воспроизведения системой (2) ЗВ $\mathbf{K}_g$. При этом обязательным условием является обеспечение равенства выхода $\mathbf{y}_{\text{уст}} = \lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{x}(t)$ в неподвижном состоянии $\mathbf{g}(t) = \mathbf{g}_0 = \mathrm{const}$ в случае, если возможности исполнительного устройства позволяют наделить систему порядком v астатизма не ниже первого $v\ge 1$. В этом случае матрица $\mathbf{K}_g$ вычисляется в силу соотношения

$$\mathbf{K}_g = \arg\left\{\lim_{s\to 0}\left\{\mathbf{\Phi}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{F})^{-1}\mathbf{G} = \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{F})^{-1}\mathbf{BK}_g\right\} = -\mathbf{CF}^{-1}\mathbf{BK}_g = \mathbf{I}\right\} = -\left(\mathbf{CF}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1},$$

где $\mathbf{I}$ – единичная $(n\times n)$-матрица; s – оператор Лапласа; $\mathbf{\Phi}(s)$ – передаточная функция «вход–выход» системы (2).

Если возможности исполнительного устройства не позволяют наделить систему астатизмом так, что система оказывается статической с добротностью D_0 по положению и статизмом $\delta = (D_0)^{-1}$, то матрица $\mathbf{K}_g$ вычисляется с помощью соотношения

$$\mathbf{K}_g = \arg\left\{\lim_{s\to 0}\left\{\mathbf{\Phi}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{F})^{-1}\mathbf{BK}_g\right\} = -\mathbf{CF}^{-1}\mathbf{BK}_g = \mathbf{I}(1-\delta)\right\} = -\left(\mathbf{CF}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}(1-\delta).$$

Для построения физически реализуемой системы (2) необходимо снять гипотезу измеримости задающего воздействия $\mathbf{g}(t)$ и записать СУ (3) в форме

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}_g\mathbf{g}(t) - \mathbf{Kx}(t) = \mathbf{K}_g\mathbf{g}(t) - \mathbf{K}_y\mathbf{y}(t) - \mathbf{K}_x\mathbf{x}(t)\Big|_{\mathbf{K}_g=\mathbf{K}_y=\mathbf{K}_\varepsilon} = \mathbf{K}_\varepsilon\boldsymbol{\varepsilon}(t) - \mathbf{K}_x\mathbf{x}(t), \tag{13}$$

где

$$\mathbf{K}_x = \mathbf{K} - \mathbf{K}_g\mathbf{C}, \tag{14}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ – вектор ошибки $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = g(t) - y(t)$.

Агрегирование сигнала управления (13) с исходным ОУ дает систему, замкнутую единичной отрицательной обратной связью по выходу, схема которой приведена на рисунке.

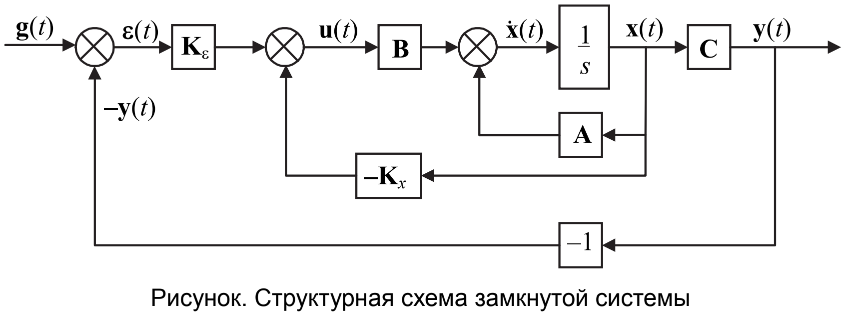

Рисунок. Структурная схема замкнутой системы

Приведенная на рисунке система в силу (13)–(14) математически описывается выражением (2). Неполная измеримость вектора состояния легко компенсируется введением динамического наблюдающего устройства [2, 4].

Получены алгебраические условия, накладываемые на матричные компоненты модели объекта управления и системы, которые позволяют решить задачу наделения системы требуемым размещением мод ее матрицы состояния без обязательного обращения к матричному уравнению Сильвестра [4], решение которого в случае плохо обусловленных матричных компонентов и малом ранге правой части с ростом размерности может стать вычислительно неустойчивым, и к формуле Аккермана [3].

Литература

1. Портер У. Современные основания общей теории систем. М.: Наука, 1971. 556 с.
2. Bryson A.E.Jr., Luenberger David G. The synthesis of regulator logic using state–variable concepts // Proceedings of the IEEE. 1970. V. 58. N 11. P. 1803–1811. doi: 10.1109/PROC.1970.8020
3. Ackermann J. Der Entwurf linearer Regelungssysteme im Zustandsraum // Regelungstechnik und Prozeß-Datenverarbeitung. 1972. V. 20. N 1–2. P. 297–300. doi: 10.1524/auto.1972.20.112.297
4. Григорьев В.В., В Дроздов.Н., Лаврентьев В.В., Ушаков А.В. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ. Л.: Машиностроение, 1983. 245 с.
5. Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Алгебраические и матричные методы в теории линейных MIMO-систем // Вестник ИГЭУ. 2005. № 5. С. 196–240.
6. Van C.F. Loan Introduction to Scientific Computation: A Matrix-Vector Approach Using Matlab. 2nd ed. Upper Saddle River, Prentice Hall, 1999. 367 p.
7. Дударенко Н.А., Полякова М.В., Ушаков А.В. Алгебраическая организация условий обобщенной синхронизируемости многоагрегатных динамических объектов // Научно-технический вестник СПбГУИТМО. 2010. № 2 (66). С. 30–36.
8. Бирюков Д.С., Дударенко Н.А., Слита О.В., Ушаков А.В. Конструирование объекта управления. Часть 2. Ранг матрицы управления как системный ресурс // Мехатроника, автоматизация, управление. 2013. № 8. С. 7–11.

Вундер Нина Александровна – аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, polinova_nina@mail.ru

Ушаков Анатолий Владимирович – доктор технических наук, профессор, профессор, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, 79214215187@ya.ru

Nina A. Vunder – postgraduate, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, polinova_nina@mail.ru

Anatoliy V. Ushakov – D.Sc., Professor, Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, 79214215187@ya.ru