

УДК 331.44: 519.2:62.50

КОНЕЧНЫЕ ЦЕПИ МАРКОВА В МОДЕЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ЧЕЛОВЕКА-ОПЕРАТОРА В КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ СРЕДЕ

М.В. Сержантова^а, А.В. Ушаков^а

^а Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация

Адрес для переписки: 12noch@mail.ru

Информация о статье

Поступила в редакцию 26.01.16, принята к печати 22.03.16

doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-3-524-532

Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Сержантова М.В., Ушаков А.В. Конечные цепи Маркова в модельном представлении деятельности человека-оператора в квазистатической функциональной среде // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2016. Т. 16. № 3. С. 524–532. doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-3-524-532

Аннотация

Предмет исследования. Исследованы проблемы анализа возможностей использования аппарата конечных цепей Маркова для моделирования деятельности человека-оператора в квазистатической функциональной среде. Показано, что стохастическая природа функциональной среды порождается фактором интервальности свойств человека-оператора. **Метод.** Задача решена в классе регулярных (возвратных) конечных цепей Маркова с тремя состояниями человека-оператора: с благоприятным, медианным и неблагоприятным сочетанием значений параметров математической модели человека-оператора в квазистатической функциональной среде. Конечная цепь Маркова построена с учетом факторов уставания человека-оператора и интервальности параметров модельного представления его свойств. Аппарат базируется на использовании математической аппроксимации типовой кривой изменения производительности деятельности человека-оператора в течение рабочей смены. Типовая кривая изменения производительности деятельности человека-оператора основана на богатом опыте исследования функциональной деятельности человека-оператора с помощью процедур снятия фотографии рабочего дня, хронометража его деятельности и эргономических обобщений. **Основные результаты.** Аппарат регулярных конечных цепей Маркова позволил на основе использования основного информационного компонента этих цепей в виде вектора финальных вероятностей корректно оценить производительность деятельности человека-оператора в квазистатической функциональной среде. Дополнительно на основе анализа спектра собственных чисел матрицы переходных вероятностей регулярной (возвратной) конечной цепи Маркова удалось построить алгоритмическую основу для оценки времени стационаризации (оценка временных затрат на переход человека-оператора от произвольного начального функционального состояния в установившееся) используемой цепи по достижении финального состояния. **Практическая значимость.** Полученные теоретические результаты подтверждены иллюстративными примерами, которые демонстрируют их применимость для возможного использования при организации квазистатической функциональной среды и для решения проблем ее совершенствования. Результаты работы могут быть использованы для рациональной организации функциональной среды, в которой человек-оператор мог бы оптимально реализовать свои возможности.

Ключевые слова

квазистатическая функциональная среда, человек-оператор, интервальные параметры, конечные цепи Маркова, вектор финальных вероятностей, оценка временных затрат

Благодарности

Работа поддержана правительством Российской Федерации (Грант 074-U01) и Министерством образования и науки Российской Федерации (Проект 14. Z50.31.0031).

FINITE MARKOV CHAINS IN THE MODEL REPRESENTATION OF THE HUMAN OPERATOR ACTIVITY IN QUASI-FUNCTIONAL ENVIRONMENT

M.V. Serzhantova^а, A.V. Ushakov^а

^а ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

Corresponding author: 12noch@mail.ru

Article info

Received 26.01.16, accepted 22.03.16

doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-3-524-532

Article in Russian

For citation: Serzhantova M.V., Ushakov A.V. Finite Markov chains in the model representation of the human operator activity in quasi-functional environment. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2016, vol. 16, no. 3, pp. 524–532. doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-3-524-532

Abstract

Subject of Research. We analyze the problems of finite Markov chains apparatus application for simulating a human operator activity in the quasi-static functional environment. It is shown that the functional environment stochastic nature is generated by a factor of interval character of human operator properties. **Method.** The problem is solved in the class of regular (recurrent) finite Markov chains with three states of the human operator: with a favorable, median and unfavorable combination of the values of mathematical model parameters of the human operator in a quasi-static functional environment. The finite Markov chain is designed taking into account the factors of human operator tiredness and interval character of parameters of the model representation of his properties. The device is based on the usage of mathematical approximation of the standard curve of the human operator activity performance during work shift. The standard curve of the human operator activity performance is based on the extensive research experience of functional activity of the human operator with the help of photos of the day, his action timing and ergonomic generalizations. **Main Results.** The apparatus of regular finite Markov chains gave the possibility to evaluate correctly the human operator activity performance in a quasi-static functional environment with the use of the main information component of these chains as a vector of final probabilities. In addition, we managed to build an algorithmic basis for estimating the stationary time (time study for transit of human operator from arbitrary initial functional state into a state corresponding to a vector of final probabilities) for a used chain after it reaches the final state based on the analysis of the eigenvalues spectrum of the matrix of transition probabilities for a regular (recurrent) finite Markov chain. **Practical Relevance.** Obtained theoretical results are confirmed by illustrative examples, which demonstrate their suitability for possible use in the organization of the quasi-static and functional environment to solve the problems of its perfection. The results can be used for the rational organization of functional environment in which the human operators could optimally realize their potential.

Keywords

quasi-static functional environment, human operator, interval parameters, finite Markov chains, vector of final probabilities, time-consuming evaluation

Acknowledgements

This work was supported by the Government of the Russian Federation (Grant 074-U01) and the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (Project 14. Z50.31.0031).

Введение

Мотивационным началом обращения к проблеме, вынесенной в заголовок работы, оказались результаты авторов [1–4] по формированию банка модельных представлений деятельности человека-оператора (ЧО)¹ [5] в квазистатической функциональной среде. Объединяющими концепциями модельных представлений этого банка является интервальность и аддитивность. Интервальность параметров показателей ЧО в функциональной среде отражает естественное непостоянство его индивидуальных свойств и их различия на персоналиях функциональной деятельности. Аддитивность позволяет естественным образом представить процесс уставания ЧО как компонента его деятельности.

Принципиальное различие предложенных авторами моделей этого банка при концептуальном единстве состоит в том, что, будучи основанными на типовых кривых изменения производительности труда в течение рабочей смены, полученных специалистами по эргономике [6], в них в зависимости от задачи моделирования использованы различного типа сложности аппроксиманты этих кривых.

Стохастическая природа свойств человека-оператора, задействованного в квазистатической функциональной среде, порождаемая фактором интервальности его свойств, естественным образом на очередном шаге моделирования деятельности ЧО [7–11] приводит к исследованию возможности использования аппарата конечных цепей Маркова [12–14] для этих целей. Очевидно, что на первом этапе при построении конечной цепи Маркова (КЦМ) достаточно ограничиться тремя состояниями, которые порождаются соответственно благоприятным сочетанием значений параметров модели ЧО, сочетанием медленных значений этих параметров и неблагоприятным сочетанием этих значений. Представляется, что задача должна решаться в классе регулярных (возвратных) цепей Маркова, основной характеристикой которых является вектор финальных вероятностей, определяющий индивидуальный установившейся режим функциональной деятельности человека-оператора.

Таким образом, в настоящей работе решаются следующие задачи: получение аналитического представления компонентов вектора финальных вероятностей; использование его численной реализации для оценки результатов функциональной деятельности ЧО в установившемся режиме; оценка временных затрат выхода ЧО на установившейся режим и разработка рекомендаций по управлению параметрами КЦМ в виде вероятностей переходов с целью достижения доминирования в векторе финальных вероятностей составляющей, определяющей вероятность пребывания в состоянии с благоприятным сочетанием параметров ЧО.

¹ ГОСТ 26387-84 Система «Человек-машина». Термины и определения. М.: Стандартинформ, 2006. 6 с.

Регулярная цепь Маркова в задаче моделирования деятельности человека-оператора

В основу построения регулярной цепи Маркова в задаче моделирования деятельности человека-оператора положены результаты исследования ее модельного представления в классе интервальных аддитивных кусочно-полиномиальных временных представлений [4]. Предпочтение этой модели другим, которые построены авторами [1, 2] за время изучения деятельности человека-оператора в квазистатической функциональной среде, аргументировано тем, что интервализация параметров данной модели максимально приближена к процедуре интервализации графической модели производительности деятельности в квазистатической функциональной среде, представленной на рис. 1, которую предлагают специалисты по эргономике [6].

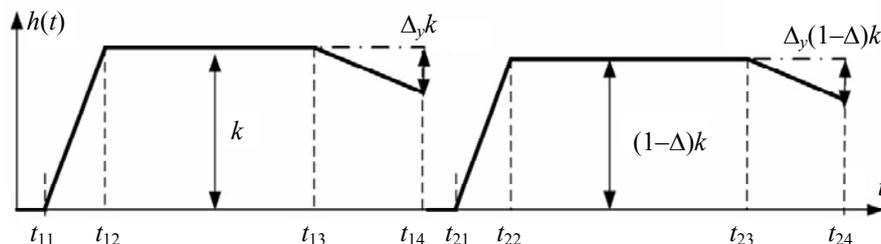


Рис. 1. Кривая изменения производительности деятельности человека-оператора за рабочий день

На рис 1: « $h(t)$ » – производительность труда ЧО; « Δ_y » – падение производительности ЧО; « $1-\Delta$ » – уровень восстановления производительности деятельности за время рекреативного интервала; «0» – старт рабочей смены; « t_{11} » – точка реального начала трудовой деятельности с переводом в рабочее состояние функциональных мощностей; « t_{12} » – точка достижения ЧО медианной номинальной производительности k труда; « t_{13} » – точка старта процесса уставания, сопровождающаяся уменьшением со временем производительности труда; « t_{14} » – точка критической усталости, совпадающая с окончанием первой полусмены; во второй полусмене процессы повторяются с точностью до замены первого индекса с «1» на «2».

В табл. 1 приведены результаты оценки деятельности ЧО при трех возможных его состояниях (S1, S2, S3), порождаемых тремя реализациями интервальных значений параметров, основным показателем которых принята реальная выработка $y(t)$ за восьмичасовую рабочую смену, выраженную в условных единицах.

Состояния ЧО	Сочетание параметров модели ЧО	k	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{21}	t_{22}	t_{23}	$y(t)_{t=8}$
S1	неблагоприятное	0,1305	0,22	0,605	2,7	4,22	4,605	6,7	0,8752
S2	медианное	0,145	0,2	0,55	3,0	4,2	4,55	7,0	1
S3	благоприятное	0,1595	0,18	0,495	3,3	4,18	4,495	7,3	1,126

Таблица 1. Возможные состояния ЧО

Экспериментальные исследования, результаты которых приведены в табл. 1, проводились при условиях, что при всех состояниях ЧО оказываются фиксированными: падение производительности его деятельности составляет величину $\Delta_y = -0,3k$ к концу каждой полусмены и восстановления производительности деятельности за время рекреативного интервала (обеденного перерыва) длительностью $\Delta t_p = 45 \text{ мин} = 0,75 \text{ ч}$ на уровне $(1-\Delta)_{\Delta=0,0156} \cdot k = 0,9844 k$. Фиксированной величиной для всех состояний является также модуль значения оценки относительной интервальности параметров модели ЧО на уровне значения $|\delta_1(\alpha)| = 0,1(10\%)$.

Граф дискретной регулярной КЦМ [12–15] с тремя состояниями приведен на рис. 2, где $S = \{S_1, S_2, S_3\}$ – множество состояний КЦМ; $P = \{P_1, P_2, P_3\}$ – множество вероятностей пребывания КЦМ в указанных выше состояниях, обладающее стохастическим свойством:

$$\sum_{i=1}^3 P_i = P_1 + P_2 + P_3 = 1; \quad S_i | P_1 + P_2 + P_3 = 1;$$

$T = \{T_1, T_2, T_3\}$ – множество продолжительностей времен пребывания КЦМ в каждом из состояний; $\{P_{ij}; i, j = \overline{1,3}\}$ – множество вероятностей переходов из состояния S_i в состояние S_j .

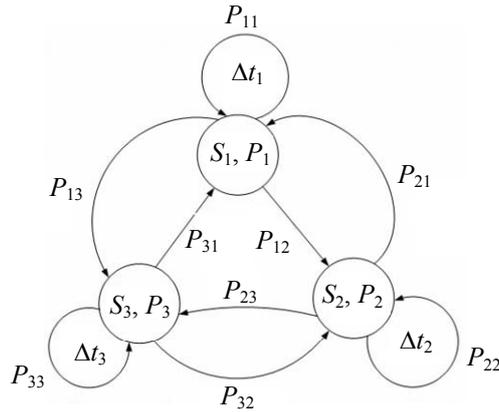


Рис. 2. Граф регулярной (возвратной) конечной цепи Маркова для случая $n=3$

Динамика эволюции стохастического процесса, моделируемого конечной регулярной цепью Маркова рис. 2, описывается в форме рекуррентной процедуры изменения вероятностей пребывания процесса в состояниях. Тогда на основании графа рис. 2 можно записать следующее рекуррентное представление:

$$\left. \begin{aligned} P_1(m+1) &= P_1(m)P_{11} + P_2(m)P_{21} + P_3(m)P_{31} \\ P_2(m+1) &= P_1(m)P_{12} + P_2(m)P_{22} + P_3(m)P_{32} \\ P_3(m+1) &= P_1(m)P_{13} + P_2(m)P_{23} + P_3(m)P_{33} \end{aligned} \right\}. \quad (1)$$

В компактной форме система соотношений (1) получает представление

$$\mathbf{P}(m+1) = \mathbf{P}(m)\mathbf{\Pi}, \mathbf{P}(0), \quad (2)$$

где $\mathbf{P}(0) = [P_1(0) \ P_2(0) \ P_3(0)]$ – вектор-строка вероятностей пребывания КЦМ в начальных состояниях; $\mathbf{P}(m) = [P_1(m) \ P_2(m) \ P_3(m)]$ – вектор-строка вероятностей пребывания КЦМ в исходном (предыдущем) состоянии; $\mathbf{P}(m+1) = [P_1(m+1) \ P_2(m+1) \ P_3(m+1)]$ – вектор-строка вероятностей пребывания КЦМ в состоянии перехода (последующем); $\mathbf{\Pi}$ – матрица переходных вероятностей, которая в силу системы соотношений (1) принимает вид

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}.$$

Вектор-строка $\mathbf{P}(m) = [P_1(m) \ P_2(m) \ P_3(m)]$ обладает стохастическим свойством для любых $m = \overline{0, \infty}$ [8, 9], т.е. выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^3 P_i(m) = P_1(m) + P_2(m) + P_3(m) = 1.$$

Стохастическим свойством обладает и строки матрицы переходных вероятностей $\mathbf{\Pi}$, т.е. выполняются соотношения

$$\sum_{j=1}^3 P_{ij} = P_{i1} + P_{i2} + P_{i3} = 1, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Явное решение рекуррентного соотношения (2) имеет вид

$$\mathbf{P}(m) = \mathbf{P}(0)\mathbf{\Pi}^m, \quad (3)$$

Для регулярной конечной цепи Маркова (1), (2) справедливы положения следующего утверждения [12, 13].

Утверждение 1. При любых начальных значениях вектора-строки $\mathbf{P}(0)$ вектор финальных вероятностей \mathbf{P}_f , определяемый соотношением

$$\mathbf{P}_f = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{P}(m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{m, \forall \mathbf{P}(0)\},$$

является левым собственным вектором матрицы переходных вероятностей \mathbf{P} , соответствующим единичному собственному значению $\lambda = 1$, так что выполняются векторно-матричные соотношения

$$\mathbf{P}_f \mathbf{P} = \lambda \mathbf{P}_f \Big|_{\lambda=1} = \mathbf{P}_f, \tag{4}$$

дополненные стохастическим свойством

$$\sum_{i=1}^3 P_{fi} = P_{f1} + P_{f2} + P_{f3} = 1. \tag{5}$$

Доказательство утверждения 1 можно найти в [12].

Совместное решение уравнений (4) и (5) позволяет записать вектор финальных вероятностей регулярной КЦМ, представленной графом рис. 2:

$$\begin{aligned} & \left[P_{f1} \quad P_{f2} \quad P_{f3} \right] = \\ & \frac{\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} P_{22}P_{33} - (1+P_{23})(1+P_{32}) - \\ -P_{33}(1+P_{21}) + (1+P_{23})(1+P_{31}) + \\ + (1+P_{21})(1+P_{32}) - P_{22}(1+P_{31}) \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} (1+P_{13})(1+P_{32}) - (1+P_{12})P_{33} + \\ + P_{11}P_{33} - (1+P_{13})(1+P_{31}) + \\ + (1+P_{12})(1+P_{31}) - P_{11}(1+P_{32}) \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} (1+P_{12})(1+P_{23}) - (1+P_{13})P_{22} + \\ + (1+P_{13})(1+P_{21}) - P_{11}(1+P_{23}) + \\ + P_{11}P_{22} - (1+P_{12})(1+P_{21}) \end{array} \right\} \end{array} \right]}{P_{11}(P_{22}P_{33} - (1+P_{23})(1+P_{32})) - (1+P_{12})((1+P_{21})P_{33} - (1+P_{23})(1+P_{31})) + (1+P_{13})((1+P_{21})(1+P_{32}) - P_{22}(1+P_{31}))} \end{aligned}$$

Для контроля правильности составления аналитического представления вектора финальных вероятностей полезно воспользоваться положениями утверждения 2.

Утверждение 2. Выражение (3) $\mathbf{P}(m) = \mathbf{P}(0)\mathbf{P}^m$ при предельном по m переходе $m \rightarrow \infty$ вырождается в соотношение

$$\mathbf{P}_f = \mathbf{P}(0) \cdot \left\{ \mathbf{P}^\infty = \text{col} \left[\left(\mathbf{P}^\infty \right)^i = \mathbf{P}_f; i = \overline{1, n} \right] \right\}. \tag{6}$$

Доказательство утверждения 2 строится на использовании тех фактов, что звено может быть произвольным, но обладающим стохастическим свойством, и что конечная регулярная цепь Маркова сходится к фиксированному вектору финальных вероятностей \mathbf{P}_f . Действительно, если в выражении (6) произвести формирование вектора финальных вероятностей \mathbf{P}_f покомпонентным перемножением элементов его правой части, то получим

$$\mathbf{P}_f = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i(0) \left(\mathbf{P}^\infty \right)^i, \tag{7}$$

где

$$\forall P_i(0) \ \& \ \sum_{i=1}^n P_i(0) = 1. \tag{8}$$

Из (7) и (8) видно, что их совместное выполнение возможно только при условии

$$\left(\mathbf{P}^\infty \right)^i = \mathbf{P}_f; \ (i = \overline{1, n}). \tag{9}$$

Примечание 1. Следует сказать, что вычисление вектора финальных вероятностей применительно к задачам исследования деятельности ЧО в квазистатической функциональной среде с использованием аппарата КЦМ с помощью соотношения (9) предпочтительнее соотношения (4), в соответствии с которым вектор финальных вероятностей является левым собственным вектором матрицы переходных вероятностей, соответствующий единичному собственному значению. Это связано с тем, что все программные пакеты, сориентированные на решение линейных алгебраических матричных задач, осуществляют поиск собственных векторов матриц без учета требования положительности значений элементов этого вектора и без учета единичной стохастической нормировки его как вектора вероятностей. Это обстоятельство делает неизбежным использование дополнительных процедур с целью придания полученному представлению собственного вектора свойств вектора вероятностей.

Как указывалось выше, применительно к поставленной в работе задаче с вектором финальных вероятностей связывается установившийся режим трудовой деятельности ЧО в квазистатической функциональной среде. Наличие вектора финальных вероятностей позволяет исследователю деятельности ЧО в квазистатической функциональной среде решить несколько задач. Первая из них касается задачи оценки показателей деятельности ЧО в квазистатической функциональной среде применительно к его выработке за восьмичасовую рабочую смену. Так, если известны:

1. $y_1(8), y_2(8), y_3(8)$ – значения выработки ЧО за восьмичасовую рабочую смену в случае пребывания его в состояниях соответственно S_1, S_2 и S_3 ;
2. модель деятельности ЧО в форме регулярной цепи Маркова с матрицей переходных вероятностей $\mathbf{\Pi}$, характеризующаяся вектором финальных вероятностей $\mathbf{P}_f, (i = \overline{1, n})$,

то может быть сформирована состоятельная оценка его трудовых показателей в форме выработки $y_\Sigma(8)$ за рабочую смену:

$$y_\Sigma(8) = \sum_{i=1}^{n=3} \mathbf{P}_{if} y_i(8). \quad (10)$$

Вторая задача состоит в оценке временных затрат m_f , требуемых для осуществления перехода ЧО из исходного в установившееся функциональное состояние с заданным уровнем производительности. Задача решается на основе информации о распределении вероятностей пребывания в состояниях, что определяется вектором \mathbf{P}_f финальных вероятностей. В математической постановке задача формулируется как отыскание $m = m_f$, удовлетворяющее условию

$$m_f = \arg \left\{ \mathbf{P}(0) \mathbf{\Pi}^m - \mathbf{P}_f \right\} \leq \delta,$$

где δ – относительная невязка.

Для решения этой задачи сформулируем утверждение.

Утверждение 3. Пусть деятельность ЧО, занятого в квазистатической функциональной среде, описывается регулярной КЦМ вида (2) с начальным распределением $\mathbf{P}(0)$ вероятностей ее пребывания в ее начальных состояниях. Пусть КЦМ вида (2) с матрицей $\mathbf{\Pi}$ переходных вероятностей обладает:

- алгебраическим спектром собственных значений $\text{eig} \{ \mathbf{\Pi} \} = \{ \lambda_1 = 1; \lambda_i = \arg \{ \det(\lambda I - \mathbf{\Pi}) = 0; i = \overline{2, n}; \} \}$;
- геометрическим спектром собственных векторов $\{ \xi_i = \arg \{ \lambda_i \xi_i = \xi_i \mathbf{\Pi} \& \| \xi_i \|_1 = 1; i = \overline{2, n}; \} \}$;
- вектором \mathbf{P}_f финальных вероятностей.

Тогда значение $m = m_f$, удовлетворяющее условию

$$m_f = \arg \left\{ \left\| \mathbf{P}(m_f) - \mathbf{P}_f \right\| \leq \delta_f \right\},$$

зафиксированное на уровне относительной невязки

$$\delta_f \geq \frac{\left\| \mathbf{P}(m_f) - \mathbf{P}_f \right\|}{\left\| \mathbf{P}_f \right\|} \Bigg|_{\left\| \mathbf{P}_f \right\|=1} = \left\| \mathbf{P}(m_f) - \mathbf{P}_f \right\|$$

текущего значения вектора $\mathbf{P}(m)$ вероятностей пребывания КЦМ в состояниях и вектора \mathbf{P}_f финальных вероятностей, определится выражением

$$m_f = \arg \left\{ \max_i \left\| \gamma_i \xi_i \right\| \right\} \left\{ \max_i |\lambda_i| \right\}^{m_f} \leq \delta_f.$$

Доказательство. Для доказательства утверждения разложим вектор $\mathbf{P}(0)$ начального распределения КЦМ в состояниях по собственным векторам матрицы $\mathbf{\Pi}$ в форме

$$\mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_f + \sum_{i=2}^n \gamma_i \xi_i. \quad (11)$$

Подстановка представления (11) в явное решение (3) для вектора вероятностей $\mathbf{P}(m)$ с учетом [12, 14, 15] свойства матричной функции $f(\mathbf{\Pi}) = \mathbf{\Pi}^m$ сохранять геометрический спектр собственных векторов позволяет записать

$$\mathbf{P}(m) = \mathbf{P}(0) \mathbf{\Pi}^m = \mathbf{P}_f + \sum_{i=2}^n \gamma_i \xi_i \lambda_i^m. \quad (12)$$

Перепишем выражение (12) в форме

$$\mathbf{P}(m) - \mathbf{P}_f = \sum_{i=2}^n \gamma_i \xi_i \lambda_i^m. \quad (13)$$

Перейдем в (13) к нормам, тогда получим систему соотношений

$$\|\mathbf{P}(m) - \mathbf{P}_f\| = \left\| \sum_{i=2}^n \gamma_i \xi_i \lambda_i^m \right\| \leq \left\{ \max_i \|\gamma_i \xi_i\| \right\} \cdot \left\{ \max_i |\lambda_i| \right\}^m. \quad (14)$$

Приравнивание левой части соотношения (14) требуемому значению невязки δ_f дает искомый результат. ■

Примечание 2. Следуя практике теории управления, в зависимости от задачи невязки δ_f рекомендуется придавать значение из ряда $\{0,02; 0,05; 0,1\}$. При этом для экспресс-оценки m_f в силу того, что в (11) используются собственные вектора единичной абсолютной нормы, можно воспользоваться соотношением

$$\|\mathbf{P}(m) - \mathbf{P}_f\| = \delta \geq |\lambda_2|^{m_f}, \quad (15)$$

где λ_2 – собственное значение матрицы \mathbf{P} , обладающее вторым (после $\lambda_1 = 1$) значением модуля.

Утверждение 3 является основой алгоритмического обеспечения решения задачи оценки временных затрат m_f на переход от произвольного начального функционального состояния ЧО к установившемуся.

Иллюстративные примеры

В качестве иллюстративных примеров рассмотрим три варианта ЧО, функциональная деятельность которых описывается конечной регулярной цепью Маркова с графом вида рис. 2. В приводимых примерах наглядно отслеживается взаимосвязь значения вектора \mathbf{P}_f финальных вероятностей с индивидуальным установившимся режимом функциональной деятельности ЧО. Матрицу переходных вероятностей \mathbf{P} возводим в «псевдобесконечную» степень m , положив ее равной $m=100$, что дает вектора-строки \mathbf{P}_f финальных вероятностей как произвольную строку матрицы \mathbf{P}^{100} .

Первый вариант ЧО характеризуется матрицей переходных вероятностей

$$\mathbf{P1} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,18 & 0,2 \\ 0,05 & 0,8 & 0,15 \\ 0,02 & 0,85 & 0,13 \end{bmatrix}.$$

Возведение этой матрицы в степень $m=100$ дает

$$\mathbf{P1}^{100} = \begin{bmatrix} 0,1852 & 0,6914 & 0,1235 \\ 0,1852 & 0,6914 & 0,1235 \\ 0,1852 & 0,6914 & 0,1235 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

что позволяет получить вектор финальных вероятностей КЦМ с матрицей переходных вероятностей $\mathbf{P1}$ в форме

$$\mathbf{P1}_f = [0,1852 \quad 0,6914 \quad 0,1235].$$

Сформируем оценку трудовых показателей ЧО в форме выработки $y_\Sigma(8)$ за рабочую смену в форме (10):

$$y_\Sigma 1(8) = \sum_{i=1}^{n=3} \mathbf{P}_{if} y_i(8) = 0,1852 \cdot 0,8752 + 0,6914 \cdot 1 + 0,1235 \cdot 1,126 = 0,9925.$$

Второй вариант ЧО характеризуется матрицей переходных вероятностей

$$\mathbf{P2} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,58 & 0,02 \\ 0,05 & 0,8 & 0,15 \\ 0,02 & 0,85 & 0,13 \end{bmatrix}.$$

Применение процедуры вида (16) к матрице $\mathbf{P2}$ позволяет получить вектор финальных вероятностей $\mathbf{P2}_f = [0,0706 \quad 0,7914 \quad 0,1381]$.

Сформируем оценку трудовых показателей ЧО второго варианта в форме выработки $y_{\Sigma}(8)$ за рабочую смену в форме (10):

$$y_{\Sigma}2(8) = \sum_{i=1}^{n=3} P_{if} y_i(8) = 0,0706 \cdot 0,8752 + 0,7914 \cdot 1 + 0,1381 \cdot 1,126 = 1,0087.$$

Третий вариант ЧО характеризуется матрицей переходных вероятностей

$$P3 = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,78 & 0,02 \\ 0,05 & 0,8 & 0,15 \\ 0,02 & 0,15 & 0,83 \end{bmatrix}.$$

Применение процедуры вида (16) к матрице **П3** позволяет получить вектор финальных вероятностей $P3_f = [0,0429 \quad 0,5058 \quad 0,4513]$.

Сформируем оценку трудовых показателей ЧО третьего варианта в форме выработки $y_{\Sigma}(8)$ за рабочую смену в форме (10):

$$y_{\Sigma}3(8) = \sum_{i=1}^{n=3} P_{if} y_i(8) = 0,0429 \cdot 0,8752 + 0,5058 \cdot 1 + 0,4513 \cdot 1,126 = 1,0515.$$

Дадим комментарий к приведенным матрицам переходных вероятностей. Нетрудно видеть, что общим свойством этих матриц являются малые вероятности перехода из первого состояния в третье (из неблагоприятного в благоприятное) и из третьего в первое (из наиболее благоприятного в неблагоприятное). Второй общей характеристикой является неизменность переходных характеристик во второй строке, формирующей переходы в соседние состояния из второго (состояния медианной выработки). Модификация матриц переходных вероятностей по мере модификации квалификации ЧО состояла в том, что уменьшалась вероятность перехода из первого состояния в него же, т.е. уменьшалась вероятность пребывания в неблагоприятном состоянии, и увеличивалась вероятность перехода из третьего в третье, т.е. вероятность пребывания в наиболее благоприятном состоянии. Сравнение значений сменных выработок ЧО показывает, что предложенная модификация матриц переходных вероятностей оказалась позитивной. Наибольшая выработка имеет место в третьем варианте ЧО, с матрицей переходных вероятностей вида (16).

Для оценки временных затрат m_f на переход ЧО от произвольного начального функционального состояния в установившееся воспользуемся экспресс-оценкой m_f , основанной на выполнении условия $|\lambda_2|^{m_f} \leq \delta = 0,02$ согласно (15). Полученные данные сведем в табл. 2.

Матрица	$ \lambda_2 $	$ \lambda_2 ^{m_f}$	m_f	y_{Σ}
П1	0,755	0,0196	14	0,9925
П2	0,3603	0,0169	4	1,0087
П3	0,6873	0,0162	11	1,0515

Таблица 2. Зависимость сменной выработки ЧО от параметров матрицы **П**

Таким образом, специалистам по организации трудовой деятельности ЧО в квазистатической функциональной среде можно рекомендовать к использованию обнаруженную модификационную тенденцию при работе по совершенствованию организации производства и тренинга персонала.

Заключение

Аппарат конечных цепей Маркова в задаче модельного представления деятельности человека-оператора в квазистатической функциональной среде оказался достаточно конструктивным при оценке результатов его трудовой деятельности за рабочую смену и оценки временных затрат m_f на переход от произвольного начального функционального состояния человека-оператора в установившееся.

Литература

1. Дударенко Н.А., Полякова М.В., Ушаков А.В. Формирование интервальных векторно-матричных модельных представлений антропокомпонентов-операторов в составе сложных динамических

- систем. // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2010 №6(70). С. 32–36.
2. Дударенко Н.А., Полинова Н.А., Сержантова М.В., Ушаков А.В. Кратные биномиальные структуры в задаче аппроксимации динамических цепей, содержащих звено чистого запаздывания // Известия вузов. Приборостроение. 2014. Т. 57. №7. С. 12–17.
 3. Сержантова М.В., Ушаков А.В. Интервальная аддитивная кусочно-полиномиальная временная модель деятельности человека-оператора в квазистатической функциональной среде // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2015. Т. 15. №2. С. 329–337. doi: 10.17586/2226-1494-2015-15-2-329-337
 4. Вундер Н.А., Дударенко Н.А., Сержантова М.В., Ушаков А.В. Аддитивная интервальная модель функциональной деятельности антропокомпонента в квазистатической среде // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления. Москва, 2014. № 1. С. 6372–6383.
 5. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. М.: Изд-во XYZ, 2007. 700 с.
 6. Шпилов А.И., Шпилова О.А. Высокая работоспособность персонала – забота кадровика // Кадры предприятия. 2003. № 3. С. 7–15.
 7. What is Systems Biology [Электронный ресурс]. Режим доступа: www.systemsbiology.org/about-systemsbiology (дата обращения 20.01.2015).
 8. Gaohua L., Kimura H. A mathematical model of brain glucose homeostasis // Theoretical Biology and Medical Modelling. 2009. V. 6. N 26. doi: 10.1186/1742-4682-6-26
 9. Doyle III F.J., Bequette B.W., Middleton R., Ogunnaike B., Paden B., Parker R.S., Vidyasagar M. Control in biological systems / In: The Impact of Control Technology. Eds. T. Samad, A.M. Annaswamy. IEEE Control Systems Society, 2011.
 10. Mindell D.A. Between Human and Machine: Feedback, Control, and Computing before Cybernetics. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2002. 456 p.
 11. Mindell D.A. Digital Apollo. Human and Machine in Spaceflight. Cambridge: MIT Press, 2008. 376 p.
 12. Kemeny J.G., Snell J.L., Knapp A.W., Griffeth D.S. Denumerable Markov Chains. NY-Berlin: Springer-Verlag, 1976. 483 p. doi: 10.1007/978-1-4684-9455-6
 13. Astrom K.J. Optimal control of Markov decision processes with incomplete state estimation // Journal Mathematical Analysis and Applications. 1965. V. 10. N 1. P. 174–205. doi: 10.1016/0022-247X(65)90154-X
 14. Howard R.A. Comments on the origin and application of Markov decision processes // Operations Research. 2002. V. 50. N 1. P. 100–102. doi: 10.1287/opre.50.1.100.17788
 15. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1973. 280 с.

<i>Сержантова Майя Вячеславовна</i>	–	кандидат технических наук, ассистент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, 12noch@mail.ru
<i>Ушаков Анатолий Владимирович</i>	–	доктор технических наук, профессор, профессор, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Ushakov-avg@yandex.ru
<i>Mayya V. Serzhantova</i>	–	PhD, Assistant, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, 12noch@mail.ru
<i>Anatoliy V. Ushakov</i>	–	D.Sc., Professor, Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Ushakov-avg@yandex.ru