



УДК 519.714.25, 62-52

## ВЛИЯНИЕ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ НА ТРАЕКТОРИИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ЗАДЕРЖКОЙ СИГНАЛА УПРАВЛЕНИЯ

Н.А. Вундер<sup>а</sup>, А.С. Павлов<sup>а</sup>, А.В. Ушаков<sup>а</sup><sup>а</sup> Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация

Автор для переписки: 79214215187@ya.ru

### Информация о статье

Поступила в редакцию 17.12.16, принята к печати 15.02.17

doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-2-269-278

Язык статьи – русский

**Ссылка для цитирования:** Вундер Н.А., Павлов А.С., Ушаков А.В. Влияние собственных векторов на траектории дискретных систем с задержкой сигнала управления // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2017. Т. 17. № 2. С. 269–278. doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-2-269-278

### Аннотация

**Предмет исследования.** Представлены результаты исследования свободного движения линейных дискретных систем в случае, когда сигнал управления передается с задержкой, не превышающей длительности интервала дискретности, в непрерывный технический объект. Установлено, что задержка вывода сигнала управления, не превышающая длительности интервала дискретности, увеличивает размерность дискретного представления непрерывного объекта на единицу. Рассмотрен класс дискретных систем с матрицей состояния простой структуры и структурой собственных векторов, матрица которых обладает числом обусловленности, заметно превышающим единицу. **Метод.** Задача решена с использованием векторно-матричного формализма метода пространства состояния, для чего исследуемая система представлена в векторно-матричной форме. Аналитические оценки процессов в системе сформированы по норме вектора состояния свободного движения с вычислением числа обусловленности матрицы собственных векторов матрицы состояния системы. **Основные результаты.** Обнаружено, что при плохо обусловленной структуре собственных векторов матрицы состояния дискретной системы возможно возникновение заметных отклонений траекторий свободного движения системы от монотонно убывающей кривой. **Практическая значимость.** Указанные свойства траекторий свободного движения дискретных систем рекомендовано держать под контролем как на этапе проектирования, так и на этапе эксплуатации систем.

### Ключевые слова

дискретная система, задержка, технический объект, собственные вектора, отклонения, свободное движение, число обусловленности

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке правительства Российской Федерации (грант 074-U01), Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 14. Z50.31.0031), гранта президента Российской Федерации №14.Y31.16.9281-НШ.

## INFLUENCE OF EIGENVECTORS ON TRAJECTORIES OF DISCRETE SYSTEMS WITH CONTROL SIGNAL DELAY

N.A. Vunder<sup>a</sup>, A.S. Pavlov<sup>a</sup>, A.V. Ushakov<sup>a</sup><sup>a</sup> ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

Corresponding author: 79214215187@ya.ru

### Article info

Received 17.12.16, accepted 15.02.17

doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-2-269-278

Article in Russian

**For citation:** Vunder N.A., Pavlov A.S., Ushakov A.V. Influence of eigenvectors on trajectories of discrete systems with control signal delay. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2017, vol. 17, no. 2, pp. 269–278 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-2-269-278

### Abstract

**Subject of Study.** We present research results of the free motion of discrete linear systems in case of the control signal transmission to continuous plant with a delay not exceeding the discreteness interval duration. It was found that if the output control signal delay does not exceed the discreteness interval duration then the dimension of the discrete representation of the continuous plant is increased by one. We consider a class of discrete systems with simple structure matrix and with the eigenvectors structure such that condition number of their matrix is much greater than one. **Method.** The problem is solved with the use of vector-matrix formalism of state space method; for that reason the system is presented in vector-matrix form. Analytical assessments of processes in the system are figured on the norm of state vector free motion with the calculation of

the condition number of the state matrix eigenvectors matrix. **Main Results.** It has been found that the ill-conditioned eigenvectors structure of the state matrix may cause significant deviations of free motion trajectories from a monotone decreasing curve. **Practical Relevance.** These properties of the free motion of discrete systems trajectories are recommended for being kept under supervision, both in the design and the operational phases of systems.

**Keywords**

discrete system, delay, plant, eigenvectors, deviations, free motion, condition number

**Acknowledgements**

This work was supported by the Government of the Russian Federation, Grant 074-U01; the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, Project 14.Z50.31.0031; the Russian Federation President Grant No.14.Y31.16.9281-НШ.

**Введение**

Прежде чем исследовать проблему, вынесенную в заголовок статьи, остановимся на понятии дискретного объекта управления, которое установилось к настоящему моменту [1]. Под дискретным объектом управления понимается функциональное объединение цифрового устройства, формирующего цифровой сигнал управления, цифро-аналогового преобразователя и непрерывного технического объекта. Потребность получения единого математического описания указанной выше функциональной цепи приводит к необходимости исследования процессов в моменты  $t = k \cdot \Delta t$ , где  $k$  – целое положительное число, выполняющее функцию дискретного времени, выраженного в числе интервалов дискретности длительности  $\Delta t$ . Таким образом, под дискретным объектом управления принято понимать дискретную по времени выборку из непрерывных переменных состояния и выхода при кусочно-постоянном управлении длительности  $\Delta t$ . Следует отметить, что вывод управления из цифрового устройства может происходить как без задержки, так и с задержкой на величину  $\tau$ . Это обстоятельство порождает две возможные версии дискретных представлений дискретного объекта с одним и тем же непрерывным техническим объектом, что проявляется в увеличении размерности матриц дискретной модели непрерывного объекта и в модификации структуры собственных векторов матрицы состояния дискретной системы. Таким образом, обнаруживается, что не только кратность собственных значений [2–4], но и способ вывода сформированного сигнала управления в технический объект может быть причиной заметных отклонений [5–11] нормы вектора состояния свободного движения дискретной системы.

**Влияние собственных векторов на траектории дискретных систем в случае отсутствия задержки вывода сигнала дискретного управления в технический объект**

Рассматривается непрерывный технический объект (ТО)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(t)|_{t=0}, \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \tag{1}$$

где  $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}$  – соответственно вектора состояния, управления, выхода;  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  – соответственно матрицы состояния, управления и выхода ТО; при этом перечисленные векторно-матричные компоненты имеют размерности  $\dim(\mathbf{x}) = n, \dim(\mathbf{u}) = r, \dim(\mathbf{y}) = m, \dim(\mathbf{A}) = (n \times n), \dim(\mathbf{B}) = (n \times r), \dim(\mathbf{C}) = (m \times n)$ . Если управление непрерывным объектом (1) при  $t = k\Delta t$  осуществляется без задержки с помощью цифрового устройства (ЦУ) и объединенного с ним цифро-аналогового преобразователя (ЦАП), то оно представимо в форме

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(k), k\Delta t \leq t < (k+1)\Delta t \tag{2}$$

так, что объединением (1) и (2), следуя [12], получаем дискретное описание непрерывного ТО (1) или просто дискретный ТО, имеющее вид

$$\mathbf{x}(k+1) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k); \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(k)|_{k=0}, \mathbf{y}(k) = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{x}(k), \tag{3}$$

где  $k = \arg(t = k\Delta t)$  – дискретное время, выраженное в числе интервалов дискретности длительности  $\Delta t$ ,  $\dim(\bar{\mathbf{A}}) = \dim(\mathbf{A}), \dim(\bar{\mathbf{B}}) = \dim(\mathbf{B}), \dim(\bar{\mathbf{C}}) = \dim(\mathbf{C})$ , при этом  $\bar{\mathbf{A}} = \exp(\mathbf{A}\Delta t), \bar{\mathbf{B}} = (\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{I})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}$ .

Аналитически управление (3) записывается в виде

$$\mathbf{u}(k) = \bar{\mathbf{K}}_g \mathbf{g}(k) - \bar{\mathbf{K}}\mathbf{x}(k), \tag{4}$$

где  $\mathbf{g}$  – внешнее воздействие;  $\bar{\mathbf{K}}_g, \bar{\mathbf{K}}$  – соответственно матрица прямых связей по внешнему воздействию и матрица обратных связей по вектору состояния ТО, при этом перечисленные векторно-матричные компоненты имеют размерности  $\dim(\mathbf{g}) = m, \dim(\bar{\mathbf{K}}_g) = (r \times m), \dim(\bar{\mathbf{K}}) = (r \times n)$ .

Объединение формирователя сигнала (4) и дискретного ТО (3) дает замкнутую дискретную систему вида

$$\mathbf{x}(k+1) = \bar{\mathbf{F}}\mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{G}}\mathbf{g}(k); \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(k)|_{k=0}; \mathbf{y}(k) = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{x}(k); \boldsymbol{\varepsilon}(k) = \mathbf{g}(k) - \mathbf{y}(k), \tag{5}$$

где

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}}, \quad \bar{\mathbf{G}} = \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}}_g, \quad (6)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}(k)$  – ошибка воспроизведения системой внешнего воздействия.

В случае, когда внешнее воздействие недоступно непосредственному измерению, закон управления (4) модифицируется и представляется в форме

$$\mathbf{u}(k) = \bar{\mathbf{K}}_g \mathbf{g}(k) - \bar{\mathbf{K}}_r \mathbf{x}(k) = \bar{\mathbf{K}}_e \boldsymbol{\varepsilon}(k) - \bar{\mathbf{K}}_r \mathbf{x}(k), \quad (7)$$

где  $\bar{\mathbf{K}}_e = \bar{\mathbf{K}}_g = \arg(\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{F}})^{-1} \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}}_g = \mathbf{I}) = (\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{F}})^{-1} \bar{\mathbf{B}})^{-1}$ ,  $\bar{\mathbf{K}}_r = \bar{\mathbf{K}} - \bar{\mathbf{K}}_y \bar{\mathbf{C}}|_{\bar{\mathbf{K}}_y = \bar{\mathbf{K}}_g}$ ,  $\bar{\mathbf{K}}_r$  – матрица обратной связи по части компонентов вектора состояния.

Структурное представление физической реализации системы (5) с формирователем сигнала управления в форме (7) в ее составе представлено на рис. 1.

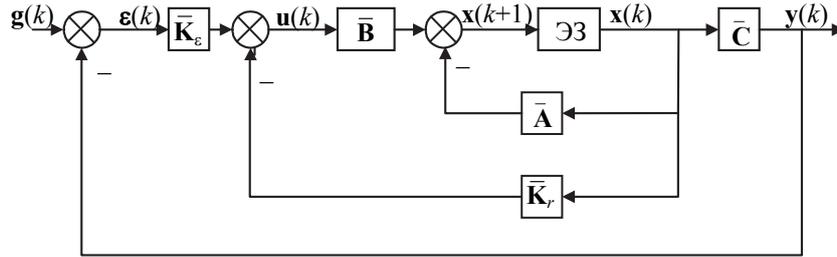


Рис. 1. Схема дискретной системы для случая отсутствия задержки в выводе сигнала управления

Заметим, что модификация управления в форме (7) не меняет математического представления системы в форме (5). Спектр собственных чисел и собственные вектора матрицы  $\bar{\mathbf{F}}$  задаются в виде

$$\sigma\{\bar{\mathbf{F}}\} = \{\bar{\lambda}_i = \arg(\det(\bar{\lambda}\mathbf{I} - \bar{\mathbf{F}}) = 0) : \text{Im}(\bar{\lambda}_i) = 0, \bar{\lambda}_i \neq \bar{\lambda}_j, i, j = \overline{1, n}; i \neq j\},$$

$$\bar{\mathbf{F}}\bar{\xi}_i = \bar{\lambda}_i \bar{\xi}_i, i = \overline{1, n}.$$

Выделим в дискретной системе (5) автономную составляющую

$$\mathbf{x}(k+1) = \bar{\mathbf{F}}\mathbf{x}(k); \mathbf{x}(0), \quad (8)$$

решение которой принимает вид

$$\mathbf{x}(k) = \bar{\mathbf{F}}^k \mathbf{x}(0). \quad (9)$$

Для матрицы состояния  $\bar{\mathbf{F}}$  системы (5) выполняется [13] отношение матричного подобия вида

$$\bar{\mathbf{M}}\bar{\Lambda} = \bar{\mathbf{F}}\bar{\mathbf{M}}, \quad (10)$$

где  $\bar{\Lambda} = \exp(\Lambda\Delta t) = \text{diag}\{\bar{\lambda}_i = \exp(\lambda_i\Delta t); i = \overline{1, n}\}$ ,  $\bar{\mathbf{M}} = \text{row}\{\mathbf{M}_i = \xi_i; \bar{\mathbf{F}}\xi_i = \bar{\lambda}_i \xi_i; i = \overline{1, n}\}$ , представленная конечным рядом из собственных векторов матрицы  $\bar{\mathbf{F}}$ .

Использование (9) и (10) позволяет записать матричное выражение

$$\bar{\mathbf{M}}\bar{\Lambda}^k = \bar{\mathbf{F}}^k \bar{\mathbf{M}}. \quad (11)$$

Композиция соотношений (9) и (11) порождает цепочку матрично-векторных равенств:

$$\mathbf{x}(k) = \bar{\mathbf{F}}^k \mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{M}}\bar{\Lambda}^k \bar{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{x}(0). \quad (12)$$

Перейдем в (12) к нормам, тогда получим

$$\|\mathbf{x}(k)\| = \|\bar{\mathbf{F}}^k \mathbf{x}(0)\| \leq \|\bar{\mathbf{F}}^k\| \|\mathbf{x}(0)\|_{\|\mathbf{x}(0)\|=1} = \|\bar{\mathbf{F}}^k\|. \quad (13)$$

Поставим задачу формирования покрытия процесса, заданного в форме (13):

$$\|\mathbf{x}(k)\| = \|\bar{\mathbf{M}}\bar{\Lambda}^k \bar{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{x}(0)\| \leq \|\bar{\mathbf{M}}\| \|\bar{\Lambda}^k\| \|\bar{\mathbf{M}}^{-1}\| \|\mathbf{x}(0)\| = C\{\bar{\mathbf{M}}\} \|\text{diag}(\bar{\lambda}_i^k); i = \overline{1, n}\| \|\mathbf{x}(0)\| = C\{\bar{\mathbf{M}}\} \bar{\lambda}_{\max}^k \|\mathbf{x}(0)\|, \quad (14)$$

где  $C\{\bar{\mathbf{M}}\} = \|\bar{\mathbf{M}}\| \|\bar{\mathbf{M}}^{-1}\|$  – число обусловленности [14, 15] матрицы  $\bar{\mathbf{M}}$  собственных векторов матрицы состояния дискретной системы (5);  $\bar{\lambda}_{\max}$  – максимальное собственное значение матрицы  $\bar{\mathbf{F}}$ , которое удовлетворяет условиям  $\text{Im}(\bar{\lambda}_{\max}) = 0, \bar{\lambda}_{\max} > 0$ .

Анализ качества процессов свободного движения дискретной системы для случая, когда сигнал управления направляется в непрерывный объект без задержки, будем проводить на основе соотношения (14) применительно к оценке  $\sup(\|\mathbf{x}(k)\|)$  сверху для нормы  $\|\mathbf{x}(k)\|$ , которая при  $\|\mathbf{x}(0)\| = 1$  получает представление

$$\sup(\|\mathbf{x}(k)\|)_{\|\mathbf{x}(0)\|=1} = C\{\mathbf{M}\} \bar{\lambda}_{\max}^k. \quad (15)$$

Выражение (15) позволяет констатировать:

1. информационным компонентом, определяющим качество процессов по норме свободного движения, является число обусловленности матрицы  $\mathbf{M}$  собственных векторов;
2. если собственные вектора матриц состояния системы (5) ортогональны, то число обусловленности  $C\{\mathbf{M}\}$  будет близко к единичному значению, и процессы в системе, стартуя в точке  $\|\mathbf{x}(0)\|$ , будут иметь монотонно сходящийся характер, покрытие которых кривой  $\sup(\|\mathbf{x}(k)\|)$  будет стартовать из точки  $C\{\mathbf{M}\} \|\mathbf{x}(0)\| \cong \|\mathbf{x}(0)\|$ ;
3. если собственные вектора матриц состояния системы (5) не будут ортогональными и будут содержать хотя бы пару векторов, близких к коллинеарной структуре, то число обусловленности  $C\{\mathbf{M}\}$  может быть чрезмерно большим. При этом процессы в системе (5), стартуя в точке  $\|\mathbf{x}(0)\|$ , будут иметь чрезмерно большие отклонения от монотонно сходящихся процессов, покрытие которых кривой  $\sup(\|\mathbf{x}(k)\|)$  будет стартовать из точки  $C\{\mathbf{M}\} \|\mathbf{x}(0)\| \gg \|\mathbf{x}(0)\|$ , имеющей чрезмерно большое удаление от начала координат.

**Влияние собственных векторов на траектории дискретных систем в случае наличия задержки вывода сигнала дискретного управления в технический объект**

Если управление (2) непрерывным объектом для  $t = k\Delta t$  осуществляется с задержкой на величину  $\tau$ , не превышающую длительности  $\Delta t$  интервала дискретности, с помощью ЦУ и объединенного с ним ЦАП, то управление  $\mathbf{u}(t)$  представимо в виде [16]

$$\mathbf{u}(t) = \begin{cases} \mathbf{u}(k-1), & k\Delta t \leq t < k\Delta t + \tau; \\ \mathbf{u}(k), & k\Delta t + \tau \leq t < (k+1)\Delta t. \end{cases} \quad (16)$$

При этом объединение (16) с моделью непрерывного объекта (1) дает описание [16] дискретного объекта в виде

$$\mathbf{x}(k+1) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{B}}_1(\tau)\mathbf{u}(k-1) + \bar{\mathbf{B}}(\tau)\mathbf{u}(k), \quad \mathbf{y}(k) = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{x}(k), \quad (17)$$

где  $\bar{\mathbf{B}}_1(\tau) = \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{I} - e^{-\mathbf{A}\tau})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}(\tau) = (\bar{\mathbf{A}}e^{-\mathbf{A}\tau} - \mathbf{I})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ .

Структурное представление объекта (17) приведено на рис. 2.

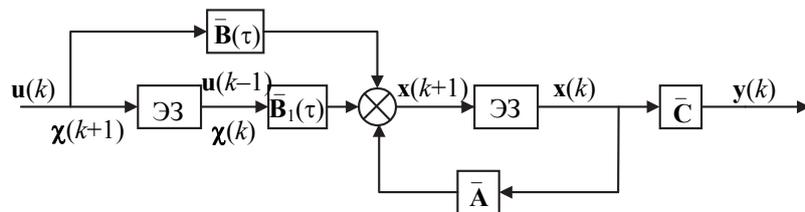


Рис. 2. Схема технического объекта для случая наличия задержки в выводе сигнала управления

Сделаем дополнительную разметку первого элемента задержки (ЭЗ), приписав его выходу переменную  $\chi(k)$ , а его входу –  $\chi(k+1)$ . Тогда в соответствии со структурной схемой и с учетом сделанной разметки первого ЭЗ для объекта управления, при наличии задержки вывода сигнала дискретного управления в технический объект, можно записать:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \chi(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{B}}_1(\tau) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \chi(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}(\tau) \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}(k) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k); \mathbf{y}(k) = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}}(k), \quad (18)$$

$$\text{где } \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{B}}_1(\tau) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}(\tau) \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}; \tilde{\mathbf{C}} = [\bar{\mathbf{C}} \quad 0], \quad \dim(\chi) = \dim(\mathbf{u}) = r. \quad (19)$$

Рассмотрим два случая учета влияния на динамику системы появления задержки в выводе сигнала управления из устройства управления в объект при условии, что  $r = 1$ .

**Первый случай** назовем «случай непредсказуемого появления задержки» (иначе случай неучтенной возможности появления задержки), при котором закон управления сохраняется в форме (4), но в силу модификации объекта управления в форме (18), (19) происходит расширение размерности матрицы состояния системы так, что система получает представление

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \tilde{\mathbf{F}}(\tau)\tilde{\mathbf{x}}(k) + \tilde{\mathbf{G}}(\tau)\mathbf{g}(k); \tilde{\mathbf{x}}(0) = \tilde{\mathbf{x}}(k)|_{k=0}; \mathbf{y}(k) = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}}(k), \quad (20)$$

где

$$\tilde{\mathbf{F}}(\tau) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}}(\tau)\bar{\mathbf{K}} & \bar{\mathbf{B}}_1(\tau) \\ -\bar{\mathbf{K}} & 0 \end{bmatrix}; \tilde{\mathbf{G}}(\tau) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}(\tau)\bar{\mathbf{K}}_g \\ \bar{\mathbf{K}}_g \end{bmatrix}; \tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Структурное представление физической реализации системы (20) с формирователем сигнала управления в форме (7) в ее составе представлена на рис. 3.

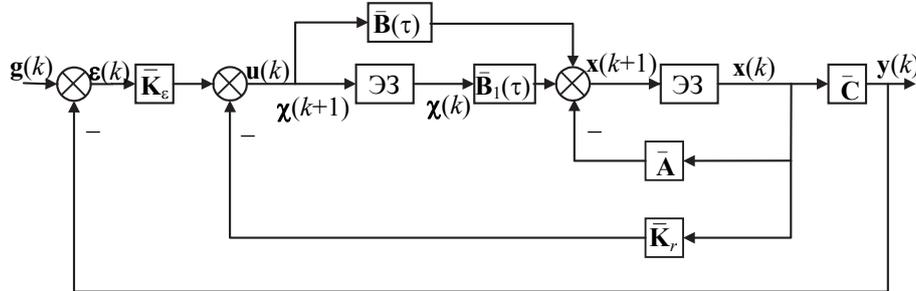


Рис. 3. Схема дискретной системы для случая появления непредсказуемой задержки в выводе сигнала управления

Для свободного движения дискретной системы (20) по аналогии с (12) можно записать

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = (\tilde{\mathbf{F}}(\tau))^k \tilde{\mathbf{x}}(0) = \tilde{\mathbf{M}}\tilde{\Lambda}^k\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\mathbf{x}}(0), \quad (22)$$

что, в свою очередь, по аналогии с (14) позволяет сформировать представление

$$\|\tilde{\mathbf{x}}(k)\| = \left\| (\tilde{\mathbf{F}}(\tau))^k \tilde{\mathbf{x}}(0) \right\| = \left\| \tilde{\mathbf{M}}\tilde{\Lambda}^k\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\mathbf{x}}(0) \right\| \leq C \{ \tilde{\mathbf{M}} \} \tilde{\lambda}_{\max}^k \|\tilde{\mathbf{x}}(0)\|, \quad (23)$$

где  $C \{ \tilde{\mathbf{M}} \}$  – число обусловленности  $(n+1) \times (n+1)$ -матрицы

$\tilde{\mathbf{M}} = \text{row} \{ \tilde{\mathbf{M}}_i = \arg(\tilde{\mathbf{F}}(\tau)\tilde{\mathbf{M}}_i = \tilde{\lambda}_i\tilde{\mathbf{M}}_i); i = \overline{1, n+1} \}$  собственных векторов матрицы состояния системы (20);  $\tilde{\lambda}_{\max} = \max_i \{ \tilde{\lambda}_i = \arg(\tilde{\lambda}\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{F}}(\tau) = 0); i = \overline{1, n+1} \}$ . Таким образом, для свободного движения системы (20)

сформировано покрытие процессов по норме вектора состояния системы вида

$$\sup_{\|\tilde{\mathbf{x}}(0)\|=1} (\|\tilde{\mathbf{x}}(k)\|) = C \{ \tilde{\mathbf{M}} \} \tilde{\lambda}_{\max}^k.$$

Следует отметить, что изменение числа обусловленности  $C \{ \tilde{\mathbf{M}} \}$  произойдет уже при  $\tau = 0$ , хотя спектр собственных чисел матрицы  $\tilde{\mathbf{F}}(\tau) = \tilde{\mathbf{F}}(0)$  пополнится по сравнению со спектром собственных чисел матрицы  $\bar{\mathbf{F}}$  на нулевое  $(n+1)$ -ое собственное число  $\tilde{\lambda}_{n+1} = 0$ . Для подтверждения этого предположения рассмотрим  $\tilde{\mathbf{F}}(0)$ , записанную в развернутой форме:

$$\tilde{\mathbf{F}}(0) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}} & 0 \\ -\bar{\mathbf{K}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

В силу свойства [13] блочно-треугольной матрицы спектр собственных чисел матрицы (24) будет составлен из спектра собственных чисел матрицы  $\sigma\{\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}}\} = \{ \tilde{\lambda}_i = \bar{\lambda}_i; i = \overline{1, n} \}$  и  $\tilde{\lambda}_{n+1} = 0$ . Для собственных векторов  $\tilde{\xi}_i$  матрицы состояния  $\tilde{\mathbf{F}}(0)$  запишем

$$\tilde{\mathbf{F}}(0)\tilde{\xi}_i = \tilde{\lambda}_i\tilde{\xi}_i \Rightarrow (\tilde{\mathbf{F}}(0) - \tilde{\lambda}_i\mathbf{I})\tilde{\xi}_i = 0.$$

Нетрудно видеть, что собственный вектор  $\tilde{\xi}_i$  принадлежит нуль-пространству  $N\{\tilde{\mathbf{F}}(0) - \tilde{\lambda}_i\mathbf{I}\}$  характеристической матрицы  $(\tilde{\mathbf{F}}(0) - \tilde{\lambda}_i\mathbf{I})$ , которое имеет свою реализацию для каждого собственного числа  $\tilde{\lambda}_i$ , в том числе для  $\tilde{\lambda}_{n+1} = 0$ , содержащую ненулевой собственный вектор. В силу наличия в матрице  $\tilde{\mathbf{F}}(0)$  внедиагонального элемента  $-\bar{\mathbf{K}}$ , несмотря на то, что в спектре собственных чисел матрицы  $\tilde{\mathbf{F}}(0)$  имеется спектр собственных чисел матрицы  $\bar{\mathbf{F}}$ , в собственных векторах  $\tilde{\xi}_i$ , соответствующих собственным числам  $\{ \tilde{\lambda}_i = \bar{\lambda}_i; i = \overline{1, n} \}$ , не будут сохраняться компоненты собственных векторов  $\tilde{\xi}_i$  матрицы  $\bar{\mathbf{F}}$ , что

влечет за собой заметное изменение числа обусловленности  $C\{\tilde{\mathbf{M}}\}$  уже при  $\tau = 0$ . При  $\tau \neq 0$  матрица  $\tilde{\mathbf{F}}(\tau)$  принимает вид (21), в котором наличествуют два внедиагональных элемента и претерпевает изменение ненулевой диагональный элемент, что влечет за собой изменение спектра собственных чисел, собственных векторов и числа обусловленности  $C\{\tilde{\mathbf{M}}\}$ .

**Второй случай** назовем «случай предсказуемого появления задержки» (иначе случай учитываемой возможности появления задержки, для которого  $\tau \neq 0$ :  $\tau$  – неопределенная фиксированная величина, не превышающая интервала дискретности). Здесь закон управления  $\mathbf{u}(k)$  формируется как функция состояния объекта (18) и задающего воздействия  $\mathbf{g}(k)$  в форме

$$\mathbf{u}(k) = \tilde{\mathbf{K}}_g \mathbf{g}(k) - \tilde{\mathbf{K}}_x \mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{K}}_\chi \chi(k) = \tilde{\mathbf{K}}_\varepsilon \varepsilon(k) - \tilde{\mathbf{K}}_{x\tau} \mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{K}}_\chi \chi(k). \quad (25)$$

Объединение объекта управления (18) и закона управления (25) порождает замкнутую дискретную систему, записываемую в виде

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \tilde{\mathbf{F}}(\tau) \tilde{\mathbf{x}}(k) + \tilde{\mathbf{G}}(\tau) \mathbf{g}(k); \tilde{\mathbf{x}}(0) = \tilde{\mathbf{x}}(k)|_{k=0}; \mathbf{y}(k) = \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{x}}(k), \quad (26)$$

где  $\tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}}(\tau) \tilde{\mathbf{K}}_x & \bar{\mathbf{B}}_1(\tau) - \bar{\mathbf{B}}(\tau) \tilde{\mathbf{K}}_\chi \\ -\tilde{\mathbf{K}}_x & -\tilde{\mathbf{K}}_\chi \end{bmatrix}; \tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}(\tau) \tilde{\mathbf{K}}_g \\ \tilde{\mathbf{K}}_g \end{bmatrix}; \tilde{\mathbf{C}} = [\bar{\mathbf{C}} \quad 0],$

причем управление (25) формируется из условия сохранения в спектре собственных чисел матрицы  $\tilde{\mathbf{F}}$  всех элементов спектра собственных чисел матрицы  $\bar{\mathbf{F}}$  (6), при этом дополнительное  $(n+1)$ -ое собственное число  $\tilde{\lambda}_{n+1}$  выбирается из условия  $\tilde{\lambda}_{n+1} \ll \bar{\lambda}_i, i = \overline{1, n}$ .

Структурное представление физической реализации системы (26) с формирователем сигнала управления в форме (25) в ее составе представлено на рис. 4.

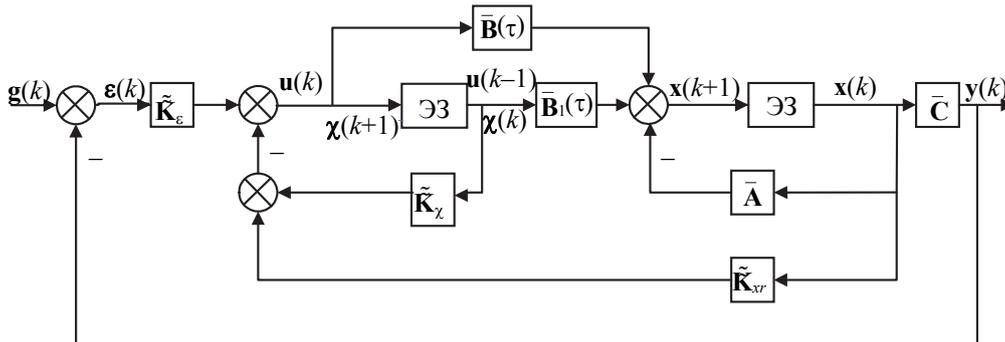


Рис. 4. Схема дискретной системы для случая появления предсказуемой задержки в выводе сигнала управления

Для свободного движения дискретной системы (26) по аналогии с (22) можно записать

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \left( \tilde{\mathbf{F}}(\tau) \right)^k \tilde{\mathbf{x}}(0) = \tilde{\mathbf{M}} \tilde{\Lambda}^k \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}(0),$$

что, в свою очередь, по аналогии с (23) позволяет сформировать представление

$$\|\tilde{\mathbf{x}}(k)\| = \left\| \left( \tilde{\mathbf{F}}(\tau) \right)^k \tilde{\mathbf{x}}(0) \right\| = \left\| \tilde{\mathbf{M}} \tilde{\Lambda}^k \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}(0) \right\| \leq C\{\tilde{\mathbf{M}}\} \tilde{\lambda}_{\max}^k \|\tilde{\mathbf{x}}(0)\|,$$

где  $C\{\tilde{\mathbf{M}}\}$  – число обусловленности  $(n+1) \times (n+1)$ -матрицы

$\tilde{\mathbf{M}} = \text{row} \left\{ \tilde{\mathbf{M}}_i = \arg \left( \tilde{\mathbf{F}}(\tau) \tilde{\mathbf{M}}_i = \tilde{\lambda}_i \tilde{\mathbf{M}}_i \right); i = \overline{1, n+1} \right\}$  собственных векторов матрицы состояния системы (25);

$\tilde{\lambda}_{\max} = \max_i \left\{ \tilde{\lambda}_i = \arg \left( \tilde{\lambda} \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{F}}(\tau) = 0 \right); i = \overline{1, n+1} \right\}$ . Таким образом, для свободного движения системы (25)

сформировано покрытие процессов по норме вектора состояния системы вида

$$\sup \left( \|\tilde{\mathbf{x}}(k)\| \right)_{\|\tilde{\mathbf{x}}(0)\|=1} = C\{\tilde{\mathbf{M}}\} \tilde{\lambda}_{\max}^k.$$

**Компьютерное исследование дискретной системы при различных способах вывода сигнала управления в технический объект**

Компьютерное исследование свободного движения дискретной системы с матрицей состояния простой структуры по норме вектора состояния как функции структуры собственных векторов для различных случаев вывода сигнала управления в ТО, дискретное представление которого имеет вид (3), при  $\Delta t = 0,01$ с с матрицами  $\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0,01 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ;  $\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0,0001 \\ 0,01 \end{bmatrix}$ ;  $\bar{\mathbf{C}} = [1 \ 0]$  проводилось в полном соответствии с текстом статьи.

На рис. 5 представлена кривая свободного движения автономной дискретной системы (8) по норме ее вектора состояния в форме (13). Система имеет размерность  $n = 2$ , матрицу состояния  $\bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 0,999 & 0,0094 \\ -0,1884 & 0,886 \end{bmatrix}$ , которая доставляется системе с помощью матрицы обратной связи  $\bar{\mathbf{K}} = [18,84 \ 11,4]$ , имеющей алгебраический спектр собственных значений  $\sigma\{\bar{\mathbf{F}}\} = \{\bar{\lambda}_1 = 0,9802; \bar{\lambda}_2 = 0,9048\}$  и собственные вектора  $\xi_1 = \begin{bmatrix} 0,4472 \\ -0,8944 \end{bmatrix}$ ;  $\xi_2 = \begin{bmatrix} 0,0995 \\ -0,995 \end{bmatrix}$ . Матрица последних характеризуется числом обусловленности  $C\{\mathbf{M}\} = C\{\xi_1, \xi_2\} = 5,434$ . Число обусловленности матрицы собственных векторов заметно больше единицы, и в траектории системы по норме  $\|\mathbf{x}(k)\|$  вектора состояния должно наблюдаться заметное отклонение от монотонного характера ее изменения, что обнаруживает кривая рис. 5.

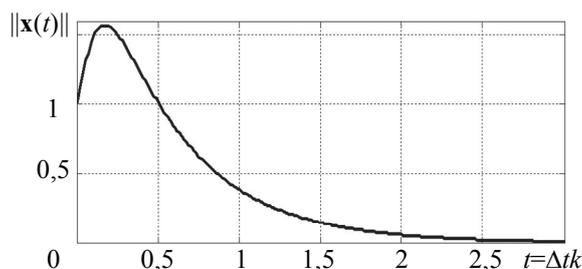


Рис. 5. Кривая процесса  $\|\mathbf{x}(k)\|$

На рис. 6 представлена кривая свободного движения автономной версии дискретной системы (20) по норме ее вектора состояния в форме  $\|\tilde{\mathbf{x}}(k)\| = \left\| (\tilde{\mathbf{F}}(\tau))^k \tilde{\mathbf{x}}(0) \right\| \leq \left\| (\tilde{\mathbf{F}}(\tau))^k \right\| \left\| \tilde{\mathbf{x}}(0) \right\|_{\|\tilde{\mathbf{x}}(0)\|=1}$ , которая характеризуется размерностью  $n = 3$  и матрицей состояния

$$\tilde{\mathbf{F}}(\tau) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}}(\tau)\bar{\mathbf{K}} & \bar{\mathbf{B}}_1(\tau) \\ -\bar{\mathbf{K}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 18,84(0,5\Delta t - 1,5\tau)(\Delta t - \tau) & 0,01 - 11,4(0,5\Delta t - 1,5\tau)(\Delta t - \tau) & (\Delta t - 0,5\tau)\tau \\ -18,84(\Delta t - \tau) & 1 - 11,4(\Delta t - \tau) & \tau \\ -18,84 & -11,4 & 0 \end{bmatrix},$$

где  $\Delta t = 0,01$  с,  $\tau = 0,5\Delta t$ , имеющей алгебраический спектр собственных значений  $\sigma\{\tilde{\mathbf{F}}(\tau)\} = \{\tilde{\lambda}_1 = 0,9801; \tilde{\lambda}_2 = 0,8987; \tilde{\lambda}_3 = 0,0644\}$  и собственные вектора

$$\tilde{\xi}_1 = \begin{bmatrix} -0,2179 \\ 0,4352 \\ -0,8735 \end{bmatrix}; \tilde{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 0,0089 \\ -0,0933 \\ 0,9956 \end{bmatrix}; \tilde{\xi}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,0057 \\ -1 \end{bmatrix},$$

матрица которых характеризуется числом обусловленности  $C\{\tilde{\mathbf{M}}\} = C\{\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3\} = 70,674$ . Число обусловленности матрицы собственных векторов заметно больше единицы, и в траектории системы по норме  $\|\tilde{\mathbf{x}}(k)\|$  вектора состояния должно наблюдаться заметное отклонение от монотонного характера ее изменения, что обнаруживает кривая рис. 6.

На рис. 7 представлены кривые свободного движения автономной версии дискретной системы (26) по норме ее вектора состояния в форме  $\|\tilde{\mathbf{x}}(k)\| = \left\| (\tilde{\mathbf{F}}(\tau))^k \tilde{\mathbf{x}}(0) \right\| \leq \left\| (\tilde{\mathbf{F}}(\tau))^k \right\| \left\| \tilde{\mathbf{x}}(0) \right\|_{\|\tilde{\mathbf{x}}(0)\|=1}$ , которая характеризуется

зудается размерностью  $n = 3$ , матрицей состояния  $\tilde{\mathbf{F}}(\tau)\big|_{\tau=0,5\Delta t=0,005} = \begin{bmatrix} 1 & 0,01 & 0 \\ -0,0171 & 0,9888 & 0,0086 \\ -3,4157 & -2,2468 & 0,715 \end{bmatrix}$  для

рис. 7, а, которая доставляется системе с помощью матрицы обратной связи  $\tilde{\mathbf{K}} = [3,4157 \ 2,2468 \ -0,715]$ , имеющей алгебраический спектр собственных значений  $\sigma\{\tilde{\mathbf{F}}(\tau)\} = \{\tilde{\lambda}_1 = 0,9802; \tilde{\lambda}_2 = 0,9048; \tilde{\lambda}_3 = 0,8187\}$  и собственные вектора

$\tilde{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 0,2192 \\ -0,4363 \\ 0,8727 \end{bmatrix}; \tilde{\xi}_2 = \begin{bmatrix} -0,0102 \\ 0,0996 \\ -0,995 \end{bmatrix}; \tilde{\xi}_3 = \begin{bmatrix} -0,0026 \\ 0,05 \\ -0,9987 \end{bmatrix}$ , матрица которых характеризуется числом обусловленности

сти  $C\{\tilde{\mathbf{M}}\} = C\left\{\begin{bmatrix} \tilde{\xi}_1 \\ \tilde{\xi}_2 \\ \tilde{\xi}_3 \end{bmatrix}\right\} = 131,9$ . Для кривой (рис. 7, б) матрица состояния вида

$\tilde{\mathbf{F}}(\tau)\big|_{\tau=0,5\Delta t=0,005} = \begin{bmatrix} 1 & 0,01 & 0 \\ -0,0009 & 0,9985 & 0,0094 \\ -0,1875 & -0,3014 & 0,8766 \end{bmatrix}$ , которая доставляется системе с помощью матрицы обратной

связи  $\tilde{\mathbf{K}} = [0,1875 \ 0,3014 \ -0,8766]$ , имеющей алгебраический спектр собственных значений  $\sigma\{\tilde{\mathbf{F}}(\tau)\} = \{\tilde{\lambda}_1 = 0,9802; \tilde{\lambda}_2 = 0,9048; \tilde{\lambda}_3 = 0,99\}$  и собственные вектора

$\tilde{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 0,2192 \\ -0,4363 \\ 0,8727 \end{bmatrix}; \tilde{\xi}_2 = \begin{bmatrix} -0,0102 \\ 0,0996 \\ -0,995 \end{bmatrix}; \tilde{\xi}_3 = \begin{bmatrix} -0,5783 \\ 0,5769 \\ -0,5769 \end{bmatrix}$ , матрица которых характеризуется числом обусловленности

сти  $C\{\tilde{\mathbf{M}}\} = C\left\{\begin{bmatrix} \tilde{\xi}_1 \\ \tilde{\xi}_2 \\ \tilde{\xi}_3 \end{bmatrix}\right\} = 17,5787$ .

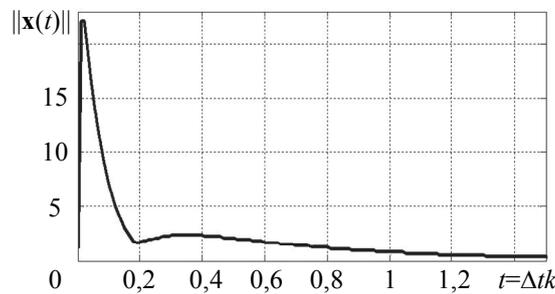


Рис. 6. Кривая процесса  $\|\tilde{\mathbf{x}}(k)\|$  для случая непредсказуемого появления задержки

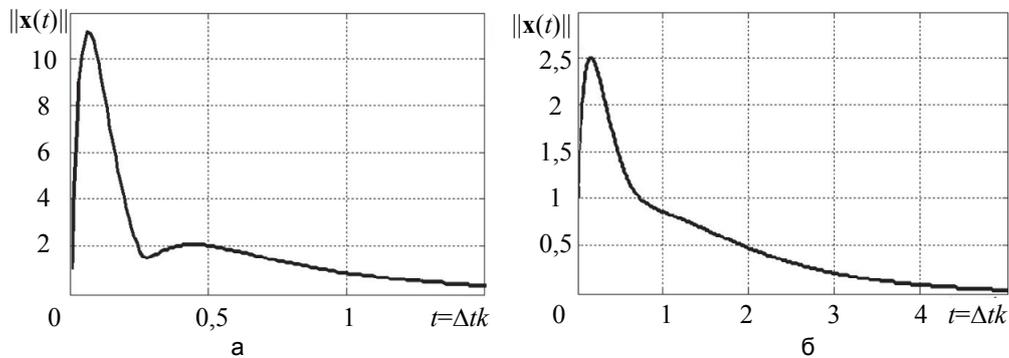


Рис. 7. Кривые процесса  $\|\tilde{\mathbf{x}}(k)\|$  в случае предсказуемого появления задержки для различных значений третьего собственного числа:  $\tilde{\lambda}_3 = 0,8187$  (а);  $\tilde{\lambda}_3 = 0,99$  (б)

Полученные кривые обнаруживают, что с увеличением модуля третьего собственного значения  $\tilde{\lambda}_3$ , уменьшается число обусловленности матрицы собственных векторов, что свидетельствует о демпфировании отклонения траектории дискретной системы по норме вектора состояния, при этом сходимость процессов в системе к неподвижному состоянию  $\tilde{\mathbf{x}}(\infty) = 0$  существенно замедляется.

### Заключение

Установлено, что устойчивые дискретные системы с простым спектром собственных чисел матрицы состояния системы и структурой ее собственных векторов, матрица которых характеризуется числом обусловленности, большим единицы, обнаруживают заметные отклонения траекторий от монотонно убывающего характера своего поведения в режиме свободного движения. Это отклонение усиливается в случае, если вывод сигнала управления из цифрового формирователя этого сигнала в технический объект осуществляется с запаздыванием, не превышающем интервала дискретности. Обнаруженные отклонения могут быть столь значительными, что могут привести к разрушительным последствиям. Указанные свойства траекторий свободного движения дискретных систем следует держать под контролем как на этапе проектирования, так и на этапе эксплуатации систем.

### Литература

1. Ту Ю. Современная теория управления. М.: Машиностроение, 1971. 472 с.
2. Акунов Т.А., Дударенко Н.А., Полинова Н.А., Ушаков А.В. Исследование колебательности процессов в аperiodических непрерывных системах, порождаемой фактором кратности собственных чисел // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2013. № 3 (85). С. 55–61.
3. Вундер Н.А., Ушаков А.В. Исследование отклонения траекторий линейных устойчивых дискретных систем от монотонно убывающей кривой свободного движения в случае кратных вещественных положительных собственных чисел их матриц // Проблемы управления и информатики. 2016. № 5. С. 1–11.
4. Vunder N.A., Ushakov A.V. On the features of the trajectories of autonomous discrete systems generated by a multiplicity factor of eigenvalues of state matrices // Proc. IEEE Int. Symposium on Intelligent Control. Sydney, Australia, 2015. P. 695–700. doi: 10.1109/ISIC.2015.7307291
5. Whidborne J.F., McKernan J. On the minimization of maximum transient energy growth // IEEE Transactions on Automatic Control. 2007. V. 52. P. 1762–1767. doi: 10.1109/TAC.2007.900854
6. Polyak B.T., Smirnov G. Large deviations for non-zero initial conditions in linear systems // Automatica. 2016. V. 74. P. 297–307. doi: 10.1016/j.automatica.2016.07.047
7. Whidborne J.F., Amar N. Computing the maximum transient energy growth // BIT Numerical Mathematics. 2011. V. 51. N 2. P. 447–457. doi: 10.1007/s10543-011-0326-4
8. Halikias G., Papageorgiou A., Karcianas N. Non-overshooting stabilization via state and output feedback // International Journal of Control. 2010. V. 83. N 6. P. 1232–1247. doi: 10.1080/00207171003664844
9. Francis B.A., Glover K. Bounded peaking in the optimal linear regulator with cheap control // IEEE Transactions on Automatic Control. 1978. V. 23. N 4. P. 608–617. doi: 10.1109/TAC.1978.1101792
10. Kimura H. A new approach to the perfect regulation and the bounded peaking in linear multivariable control systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1981. V. 26. N 1. P. 253–270. doi: 10.1109/TAC.1981.1102573
11. Vunder N.A., Ushakov A.V. Investigation of continuous systems oscillatory processes created with the multiplicity factor of the eigenvalues of the state matrices // Journal of Automation and Information Sciences. 2015. V. 47. N 11. P. 18–35. doi: 10.1615/JAutomatInfScien.v47.i11.20
12. Zadeh L.A., Desoer C.A. Linear System Theory: The State Space Approach. 4<sup>th</sup> ed. NY: Dover Publ., 2008. 656 p.
13. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1973. 575 с.
14. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления: Пер. с англ. М.: Мир, 1999. 548 с.

### References

1. Tou J.T. *Modern Control Theory*. NY, McGraw-Hill, 1964, 343 p.
2. Akunov T.A., Dudarenko N.A., Polinova N.A., Ushakov A.V. Process oscillativity study in aperiodic continuous systems, generated by eigenvalues multiplication factor. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2013, no. 3, pp. 55–61. (In Russian)
3. Vunder N.A., Ushakov A.V. Investigation of deviation of trajectories of linear stable discrete systems from monotonously decreasing curve on free motion in the case of multiple real positive eigenvalues of their matrices. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2016, vol. 48, no. 10, pp. 13–24. doi: 10.1615/JAutomatInfScien.v48.i10.20
4. Vunder N.A., Ushakov A.V. On the features of the trajectories of autonomous discrete systems generated by a multiplicity factor of eigenvalues of state matrices. *Proc. IEEE Int. Symposium on Intelligent Control*. Sydney, Australia, 2015, pp. 695–700. doi: 10.1109/ISIC.2015.7307291
5. Whidborne J.F., McKernan J. On the minimization of maximum transient energy growth. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, vol. 52, pp. 1762–1767. doi: 10.1109/TAC.2007.900854
6. Polyak B.T., Smirnov G. Large deviations for non-zero initial conditions in linear systems. *Automatica*, 2016, vol. 74, pp. 297–307. doi: 10.1016/j.automatica.2016.07.047
7. Whidborne J.F., Amar N. Computing the maximum transient energy growth. *BIT Numerical Mathematics*, 2011, vol. 51, no. 2, pp. 447–457. doi: 10.1007/s10543-011-0326-4
8. Halikias G., Papageorgiou A., Karcianas N. Non-overshooting stabilization via state and output feedback. *International Journal of Control*, 2010, vol. 83, no. 6, pp. 1232–1247. doi: 10.1080/00207171003664844
9. Francis B.A., Glover K. Bounded peaking in the optimal linear regulator with cheap control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1978, vol. 23, no. 4, pp. 608–617. doi: 10.1109/TAC.1978.1101792
10. Kimura H. A new approach to the perfect regulation and the bounded peaking in linear multivariable control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1981, vol. 26, no. 1, pp. 253–270. doi: 10.1109/TAC.1981.1102573
11. Vunder N.A., Ushakov A.V. Investigation of continuous systems oscillatory processes created with the multiplicity factor of the eigenvalues of the state matrices. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2015, vol. 47, no. 11, pp. 18–35. doi: 10.1615/JAutomatInfScien.v47.i11.20
12. Zadeh L.A., Desoer C.A. *Linear System Theory: The State Space Approach*. 4<sup>th</sup> ed. NY, Dover Publ., 2008, 656 p.
13. Gantmakher F.R. *Teoriya Matrits* [Matrix Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 575 p. (In Russian)
14. Golub G.H., Van Loan C.F. *Matrix Computations*. Baltimore, Johns Hopkins University Press, 1996, 728 p.

- |  |   |
|--|---|
| <p>15. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.</p> <p>16. Григорьев В.В., Дроздов В.Н., Лаврентьев В.В., Ушаков А.В. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ. Л.: Машиностроение, 1983. 245 с.</p> | <p>15. Voevodin V.V., Kuznetsov Yu.A. <i>Matritsy i Vychisleniya</i> [Matrices and Calculations]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 320 p.</p> <p>16. Grigor'ev V.V., Drozdov V.N., Lavrent'ev V.V., Ushakov A.V. <i>Sintez Diskretnykh Sistem Regulyatorov pri Pomoshchi EVM</i> [Synthesis of Digital Systems Using Computer Controls]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1983, 245 p.</p> |
|--|---|

**Авторы**

**Вундер Нина Александровна** – аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, polinova\_nina@mail.ru

**Павлов Андрей Сергеевич** – аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, a.s.pavlov@email.su

**Ушаков Анатолий Владимирович** – доктор технических наук, профессор, профессор, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, 79214215187@ya.ru

**Authors**

**Nina A. Vunder** – postgraduate, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, polinova\_nina@mail.ru

**Andrey S. Pavlov** – postgraduate, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, a.s.pavlov@email.su

**Anatoliy V. Ushakov** – D.Sc., Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, 79214215187@ya.ru