

УДК 532.529

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕГУЛЯРНОГО И МАХОВСКОГО ОТРАЖЕНИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОТ СТЕНКИ

М.П. Булат^{a,b}, И.А. Волобуев^{a,c}, К.Н. Волков^{a,d}, В.А. Пронин^a

^a Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация

^b «Центр трансфера технологий «Кулон», Санкт-Петербург, 198035, Российская Федерация

^c ООО «ВНХ-Энерго», Санкт-Петербург, 198035, Российская Федерация,

^d Университет Кингстона, Лондон, SW15 3DW, Великобритания

Адрес для переписки: bulat_mh@mail.ru, pavelbulat@mail.ru

Информация о статье

Поступила в редакцию 26.05.17, принята к печати 05.08.17

doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-5-920-928

Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Булат М.П., Волобуев И.А., Волков К.Н., Пронин В.А. Численное моделирование регулярного и маховского отражения ударной волны от стенки // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2017. Т. 17. № 5. С. 920–928. doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-5-920-928

Аннотация

Выполнено численное моделирование отражения ударной волны от плоской стенки. В зависимости от параметров задачи реализуется регулярное (двухволновая конфигурация) или маховское (трехволновая конфигурация) отражение. Для дискретизации уравнений Эйлера, описывающих течение невязкого сжимаемого газа, применен метод конечных объемов и разностные схемы высокого порядка точности по времени и по пространству. Продемонстрировано применение взвешенных существенно неосциллирующих схем WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) высокого порядка точности, реализованных в покомпонентной и в характеристической форме, на неструктурированных сетках. Выполнено сравнение рассчитанной ударно-волновой структуры потока с данными, имеющимися в литературе. Показано, что WENO-схема четвертого порядка точности в характеристической версии позволяет воспроизвести более мелкие детали, чем схема третьего порядка, при этом нефизичные осцилляции решения, характерные для TDV (Total Variation Diminishing) схем и покомпонентных схем WENO, отсутствуют. Сделан вывод, что WENO-схема четвертого порядка точности в характеристической версии может быть рекомендована для практического применения в расчетах с высоким порядком точности сложных течений, содержащих сильные газодинамические разрывы, на неструктурированных сетках.

Ключевые слова

ударная волна, отражение, сверхзвуковое течение, численное моделирование, WENO-схема

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение № 14.578.21.0203, уникальный идентификатор прикладных научных исследований RFMEFI57816X0203).

NUMERICAL SIMULATION OF REGULAR AND MACH REFLECTION OF SHOCK WAVE FROM THE WALL

M.P. Bulat^{a,b}, I.A. Volobuev^{a,c}, K.N. Volkov^d, V.A. Pronin^a

^a ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

^b Technology Transfer Center "Kulon", Saint Petersburg, 198035, Russian Federation

^c ООО "VNH-Energo", Saint Petersburg, 198035, Russian Federation

^d Kingston University, London, SW15 3DW, UK

Corresponding author: bulat_mh@mail.ru

Article info

Received 26.05.17, accepted 05.08.17

doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-5-920-928

Article in Russian

For citation: Bulat M.P., Volobuev I.A., Volkov K.N., Pronin V.A. Numerical simulation of regular and Mach reflection of shock wave from the wall. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2017, vol. 17, no. 5, pp. 920–928 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-5-920-928

Abstract

A numerical simulation of the shock wave reflection from a plane wall is carried out. Depending on the input parameters, a regular (two-wave configuration) or Mach (three-wave configuration) reflection is observed. A finite volume method and high-order difference schemes are used for discretization of the Euler equations describing the flow of an inviscid compressible gas. The application of weighted essentially non-oscillatory (WENO) schemes of high accuracy order realized in different forms on unstructured meshes is demonstrated. The calculated shock-wave configuration is compared with the data available in the literature. It is shown that the WENO-scheme of the fourth order accuracy in characteristic version gives the possibility to reproduce much more details than the scheme of the third order with the absence of solution oscillations characteristic of TDV (Total Variation Diminishing) schemes and component-wise WENO schemes. The criteria for the accuracy of numerical calculations related to the location of shock-wave structures are discussed. Recommendations on the practical application of high order difference schemes on unstructured grids are given.

Keywords

shock wave, reflection, supersonic flow, numerical simulation, WENO scheme

Acknowledgements

This work was financially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (agreement No 14.578.21.0203, unique identifier of applied scientific research RFMEFI57816X0203).

Введение

В стационарном сверхзвуковом потоке выделяют два вида отражения ударных волн: регулярное (двухволновая конфигурация) и маховское отражение (трехволновая конфигурация) [1, 2]. В определенном диапазоне параметров допускается существование двух возможных решений и связанное с этим явление гистерезиса [3]. Расположение ударных волн зависит от числа Маха набегающего потока, угла падения скачка уплотнения и эффективного показателя адиабаты [4, 5]. Наиболее изученным является случай отражения косой ударной волны от плоской стенки или отражение плоской ударной волны от клина. Некоторые имеющиеся решения задачи обсуждаются в работе [1].

Задача расчета отражения ударной волны от перпендикулярной или наклонной преграды встречается во многих практически важных случаях, например, в задаче взаимодействия сверхзвуковой струи, истекающей из сопла ракетного двигателя, с поверхностью стартового стола. Другим примером является отражение маховской ударной волны в сверхзвуковой струе, истекающей из сопла дросселя газостатического подшипника на сверхкритическом режиме работы, с опорной поверхностью подшипника (рис. 1). В результате такого взаимодействия образуются сложные ударно-волновые структуры, которые приводят как к стационарному режиму натекания сверхзвуковой струи (рис. 1, а), так и к пульсирующему (рис. 1, б). Последнее приводит к крайне нежелательному режиму работы газостатического подшипника, известного как «пневмомолоток».

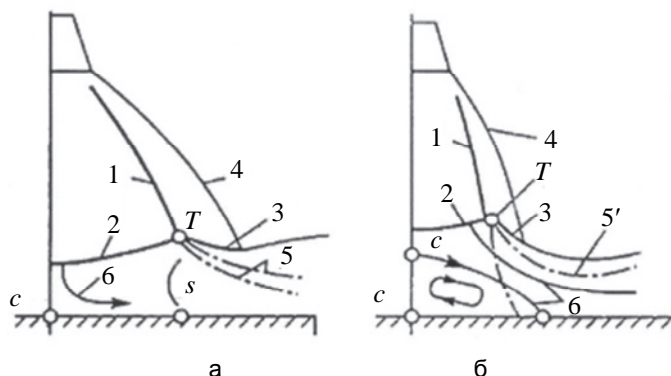


Рис. 1. Ударно-волновые структуры, возникающие при натекании сверхзвуковой струи на плоскую преграду в стационарном режиме (а) и при наличии колебаний (б): 1 – висячий скачок; 2 – волна Маха; 3 – отраженный скачок; 4 – граница струи; 5 – слой смешения; 5' – звуковая линия в слое смешения; 6 – линии тока; с – точки торможения потока; Т – тройная точка, s – звуковая линия

Двумерные сверхзвуковые течения представляют собой сложную проблему для численного моделирования. Задача о регулярном [6] или маховском [7] отражении ударной волны от стенки используется во многих работах для проверки точности разностных схем и работоспособности численных методов, в частности, схем TVD с различными переключателями потоков [8], метода кусочно-параболической реконструкции [9] и схем WENO-типа [10–14]. Теоретические вопросы, связанные с изучением отражения скачка уплотнения от твердой стенки, излагаются в работе [1] на основе метода ударных поляр. Сравнение линейных схем и WENO-схем 3-го и 4-го порядка на треугольных сетках различной разрешающей способности проводится в работах [15, 16]. Метод спектральных объемов применяется в работе [17] (для решения задачи о распаде произвольного разрыва используется метод Рое и различные TVD-ограничители), а метод Галеркина с разрывными базисными функциями – в работах [18, 19].

Задача об отражении косо́й ударной волны, падающей под углом φ_1 к горизонтальной оси, от стенки эквивалентна задаче о взаимодействии прямой ударной волны с клином, имеющим угол $90^\circ - \varphi_1$. В ряде работ рассматривается отражение ударной волны от плоскости симметрии при взаимодействии скачков уплотнения, генерируемых двумя помещенными в сверхзвуковой поток симметричными клиньями [1]. В отличие от отражения скачка от твердой стенки, в такой постановке задачи исключаются эффекты, связанные с наличием пограничного слоя [3].

Газодинамические разрывы являются наиболее сложными для вычислений структурами, поэтому сравнение разностных схем и численных методов целесообразно проводить исходя из качества разрешения данных структур.

В данной работе на примере численного моделирования регулярного и нерегулярного отражения ударной волны от стенки выполняется сравнение результатов расчета с высоким порядком точности, выполненных при помощи WENO-метода 3-го (WENO-3) и 4-го (WENO-4) порядка точности. При этом используются схемы в потоковой и характеристической форме. Приводятся результаты расчетов на неструктурированных сетках различной разрешающей способности. Результаты расчетов сравниваются с данными, имеющимися в литературе.

Вычислительная процедура

Для дискретизации уравнений Эйлера применяется метод конечных объемов на неструктурированной сетке. Детали общей вычислительной процедуры приводятся в работе [20], а методы ускорения вычислений обсуждаются в работе [21]. Расчеты проводятся для идеального совершенного газа с отношением удельных теплоемкостей $\gamma=1,4$. Для упрощения постановки и оценки точности численного решения результаты расчетов нормируются на плотность $\rho=1,4$ и давление $p=1$.

Дискретизация невязких потоков проводится на основе схем WENO 3-го и 4-го порядков точности, которые реализуются в покомпонентной и в характеристической форме. Интегрирование по времени осуществляется при помощи метода Рунге–Кутты 3-го порядка точности. Числу Куранта присваивается значение 0,55.

Регулярное отражение

Рассмотрим регулярное отражение косо́й ударной волны от стенки, когда угол падения ударной волны не превосходит некоторого порогового значения [6]. На левой и верхней границах задаются параметры постоянных однородных потоков, соответствующих течению перед и за фронтом косо́й ударной волны. Волна приходит на стенку и отражается от нее под некоторым углом. Искомое течение состоит из падающей и отраженной ударных волн. Параметры перед фронтом падающей волны и за ее фронтом приблизительно соответствуют задаче, сформулированной в работе [22].

Уравнения Эйлера решаются в безразмерной области $[0, 4] \times [0, 1]$, показанной на рис. 2 (в качестве характерного масштаба длины принимается высота области). Ударная волна, инициируемая за счет соответствующих граничных условий, падает под углом $\varphi_1=60^\circ$ к горизонтальной оси. Расчеты проводятся на структурированной сетке, содержащей 200×50 узлов. В качестве критерия сходимости разностного решения к предельному стационарному решению задачи используется минимальный уровень невязки. Для достижения заданного уровня невязки (в расчетах $R=10^{-10}$) делается приблизительно 2200 шагов по времени.

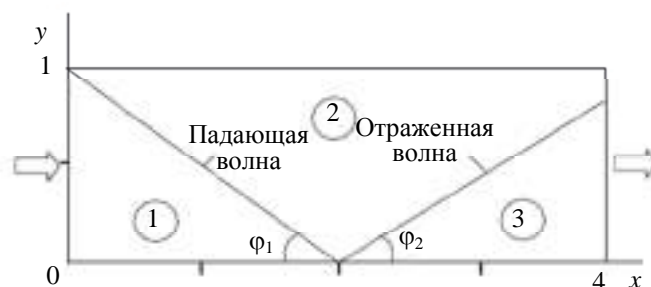


Рис. 2. Расчетная область в безразмерном виде. Подобласти: 1 – течение до ударной волны; 2 – течение за ударной волной; 3 – течение за отраженной ударной волной

В начальный момент времени течение полагается параллельным оси x , а параметрам потока в расчетной области присваиваются значения, соответствующие сверхзвуковому невозмущенному течению в подобласти 1 (рис. 2). При заданных условиях формируется наклонная ударная волна, движущаяся от левого верхнего угла расчетной области и отражающаяся от нижней границы. Отраженная ударная волна образует угол $\varphi_3=0,4183$ с положительным направлением оси x .

На входной границе расчетной области (при $x=0$ и $0 < y < 1$) задается число Маха невозмущенного потока ($M=2,9$ в случае регулярного отражения), что позволяет зафиксировать значения скорости и давления, равными условиям в невозмущенном потоке (подобласть 1). В выходном сечении расчетной об-

ласти (при $x=4$ и $0 < y < 1$) течение является сверхзвуковым, и граничные условия не оказывают влияния на поток внутри расчетной области (применяется линейная экстраполяция). На стенке (при $0 < x < 4$ и $y=0$) используется условие непротекания для нормальной скорости ($v=0$). В качестве дополнительного условия полагается $\partial p / \partial y = 0$ при $y=0$ (условие следует из уравнения изменения количества движения в проекции на ось y). В вычислительной процедуре граничные условия на стенке реализуются при помощи введения ряда фиктивных ячеек и метода симметрии (условия зеркального отражения). На верхней границе расчетной области (при $0 < x < 4$ и $y=1$) задаются фиксированные значения скорости и давления из подобласти 2, которые создают желаемую интенсивность ударной волны и ее угол.

Распределения давления в сечении $y=0,55$, полученные на основе схемы WENO-3, показаны на рис. 3 (расчеты с использованием других разностных схем дают схожие результаты и не приводятся). Давление приведено в безразмерной форме. Нормирование производится по параметрам за ударной волной при маховском отражении от стенки, т.е. именно давление за падающей ударной волной принимается за единицу. Тогда безразмерное давление перед косым скачком будет равно 0,0849, такое нормирование принято для большей наглядности графиков. Имеет место достаточно хорошее согласование численных результатов с точным решением задачи. При этом ширина зоны размазывания фронтов ударных волн не превышает 2–3 ячейки расчетной сетки. Нефизические осцилляции численного решения отсутствуют. Результаты расчетов находятся в хорошем согласовании с данными работы [23], полученными на структурированной сетке при помощи схем WENO 5-го, 7-го и 9-го порядков.

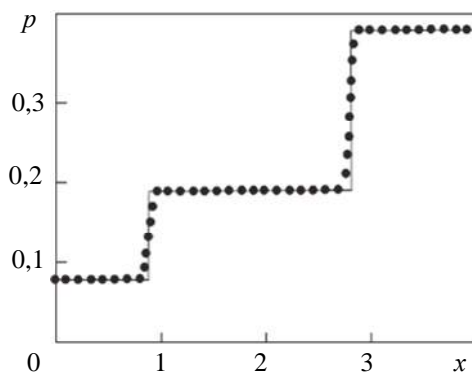


Рис. 3. Распределения нормированного давления в безразмерном виде при $y=0,55$, соответствующие точному (сплошная линия) и численному (точки) решению, x – в безразмерных единицах

Оценки уровня L_2 -нормы распределения плотности показывают, что в расчетах заданный уровень сходимости ($L_2=10^{-12}$) достигается примерно за 760 итераций. В расчетах, приведенных в работе [24], за такое же число итераций достигается существенно более высокий уровень невязки, равный 10^{-6} .

Маховское отражение

Рассмотрим нерегулярное отражение косой ударной волны от стенки [7] (double Mach reflection). При малых углах падения ударной волны на стенку реализуется регулярное отражение. Когда угол падения достигает определенного значения, то регулярное отражение становится невозможным, и возникает маховское отражение. При этом падающая ударная волна и отраженная ударная волна отходят от поверхности, и образуется ножка Маха (волны пересекаются в тройной точке). У поверхности стенки газ переходит через одну ударную волну (ножку Маха), а вдали от поверхности – через две ударные волны (падающую и отраженную ударные волны).

Задача решается в той же расчетной области $[0, 4] \times [0, 1]$, что и в случае регулярного отражения ударной волны от стенки (рис. 2). Также как и в случае с регулярным отражением, нормирование производится по параметрам за падающей ударной волной: $\rho=1,4$, $p=1$. Отражающая стенка задается на нижней границе расчетной области и соответствует отрезку $[1/6, 4]$ по оси x . На стенку в точке $x_0=1/6$ падает ударная волна с числом Маха $M=10$, образуя угол в $\varphi_1=60^\circ$ с горизонтальной осью. Параметрам потока $U=\{\rho, u, v, p\}$ слева (left) и справа (right) от ударной волны присваиваются следующие значения:

– при $x < x_0 + y/3^{1/2}$

$$U_L = \{8, 7, 1447, -4, 1250, 116, 5\};$$

– при $x > x_0 + y/3^{1/2}$

$$U_R = \{1, 4, 0, 0, 1\}.$$

В качестве граничных условий, соответствующих отрезку $[0, 1/6]$ нижней границы, и в выходном сечении расчетной области используется линейная экстраполяция искомых функций. На отрезке $[1/6, 4]$ нижней границы используются граничные условия отражения. На входной границе задаются условия невозмущенного потока с числом Маха $M=10$. На верхней границе расчетной области используются граничные условия, меняющиеся со временем в зависимости от точного движения ударной волны. Положе-

ние ударной волны в произвольный момент времени t при $y=1$ задается соотношением $s(t)=x_0+(1+20t)/3^{1/2}$.

При $0 < x < s(t)$ используются условия перед падающей ударной волной, а при $s(t) < x < 4$ – условия за ударной волной. Расчеты проводятся до момента времени 0,2.

Расчеты маховского отражения ударной волны от стенки проводятся на неструктурированных сетках различной разрешающей способности, содержащих ячейки в виде равносторонних треугольников. Размеры треугольных ячеек полагаются равными $h=1/50$ для сетки 1, $h=1/100$ для сетки 2, $h=1/200$ для сетки 3 и $h=1/400$ для сетки 4. Для расчетов на основе схемы WENO-3 применяется как равномерная сетка (сетка 1), так и сетка, полученная при помощи локального измельчения треугольных ячеек равномерной сетки, находящихся в подобласти $[0, 2] \times [0, 1]$ (сетка 2). Сетки 3 и 4, состоящие из треугольных ячеек одинакового размера, применяются для расчетов на основе схемы WENO-4.

Распределение плотности вдоль линии $y=1/3$ показывает рис. 4 (расчеты проводятся на сетке 2). Фрагмент (рис. 4, а) соответствует расчетам при помощи схемы 3-го порядка (схема WENO-3), а фрагменты (рис. 4, б, в) соответствуют расчетам при помощи схем 4-го порядка (схемы WENO-4), реализованных в покомпонентной и в характеристической форме. Распределения плотности, полученные при помощи различных разностных схем, сравнительно слабо отличаются друг от друга. Результаты расчетов, приведенные на фрагменте (рис. 4, а), указывают на наличие слабой немонотонности численного решения на фронте ударной волны.

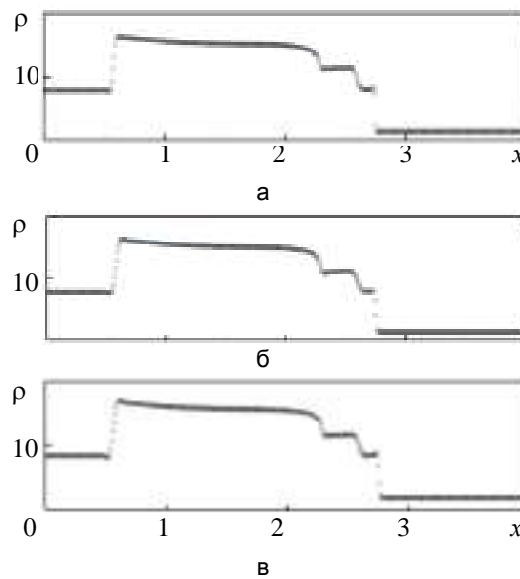


Рис. 4. Распределения плотности, нормированной на плотность невозмущенного потока, вдоль линии $y=1/3$, x – в безразмерных единицах

Результаты расчетов, обработанные в виде линий уровня плотности, приводятся на рис. 5 (сетка 1), рис. 6 (сетка 2), рис. 7 (сетка 3) и рис. 8 (сетка 4) для момента времени $t=0,2$ (плотность изменяется от 1,5 до 21,5). Приводится около 25 линий уровня. Фрагменты (рис. 7, а, б, и рис. 8, а, б) соответствуют расчетам при помощи схем 3-го порядка (схемы WENO-3) на сетке с равномерным шагом и на сетке с локальным измельчением контрольных объемов. Фрагменты (рис. 7, в, г, и рис. 8, в, г) соответствуют расчетам при помощи схем 4-го порядка (схемы WENO-4), реализованных в покомпонентной и в характеристической форме. На рис. 5 (сетка 1) и рис. 6 (сетка 2) показаны распределения плотности, соответствующие расчетам на основе схемы WENO-4 (другие схемы на сетках 1 и 2 дают похожие результаты). При измельчении сетки результаты численных расчетов демонстрируют тенденции, наблюдаемые в работе [23] на структурированных сетках различного разрешения (расчеты проводятся при помощи WENO-схем 5-го, 7-го и 9-го порядков).

Сравнение результатов численных расчетов, полученных на различных сетках и при помощи различных разностных схем, показывает, что схема WENO-4 позволяет воспроизвести более мелкие детали потока, чем схема WENO-3. При этом характеристическая версия схемы WENO-4 не дает нефизических осцилляций решения за фронтом падающей ударной волны, которые имеют место в случае покомпонентной реализации схемы WENO-4 на сетке 3 (фрагменты (в) на приведенных рисунках). При счете по схеме WENO-3 фронт падающей ударной волны, а также маховский диск размазываются на большее количество ячеек сетки и имеют меньшую интенсивность, чем в случае использования схемы WENO-4.

Результаты расчетов, приведенные на фрагментах рис. 7, в, г, и рис. 8, в, г, (расчеты на сетках 3 и 4) как для всей расчетной области, так и в окрестности маховской ударной волны, показывают, что вблизи оси x имеет место некоторое искривление (выпучивание) ножки Маха, которое отсутствует на фраг-

ментах рис. 7, а, б, и рис. 8, а, б, а также в расчетах на сетках 1 и 2 (рис. 5 и 6). Такой эффект наблюдается в расчетах, проведенных в работе [25] при помощи схем TVD-типа, но отсутствует в примерах данной задачи, приведенных в работе [26]. В работе [25] искривление диска Маха, возникающее при применении схем TVD-типа, объясняется более интенсивным размазыванием тангенциального разрыва, выходящего из тройной точки и закручивающегося за маховским скачком вблизи горизонтальной оси.

Разрыв тангенциальной скорости на контактном разрыве приводит к формированию неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, которая служит мерой измерения численной диффузии разностной схемы [12, 18].

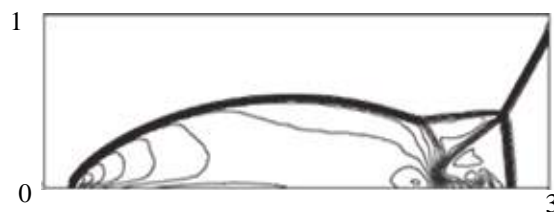


Рис. 5. Распределения числа Маха на сетке 1

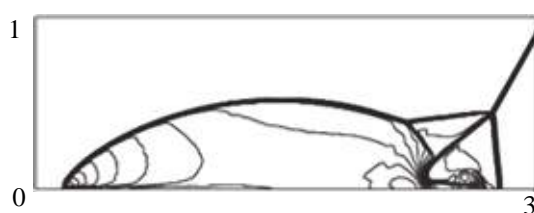


Рис. 6. Распределения числа Маха на сетке 2

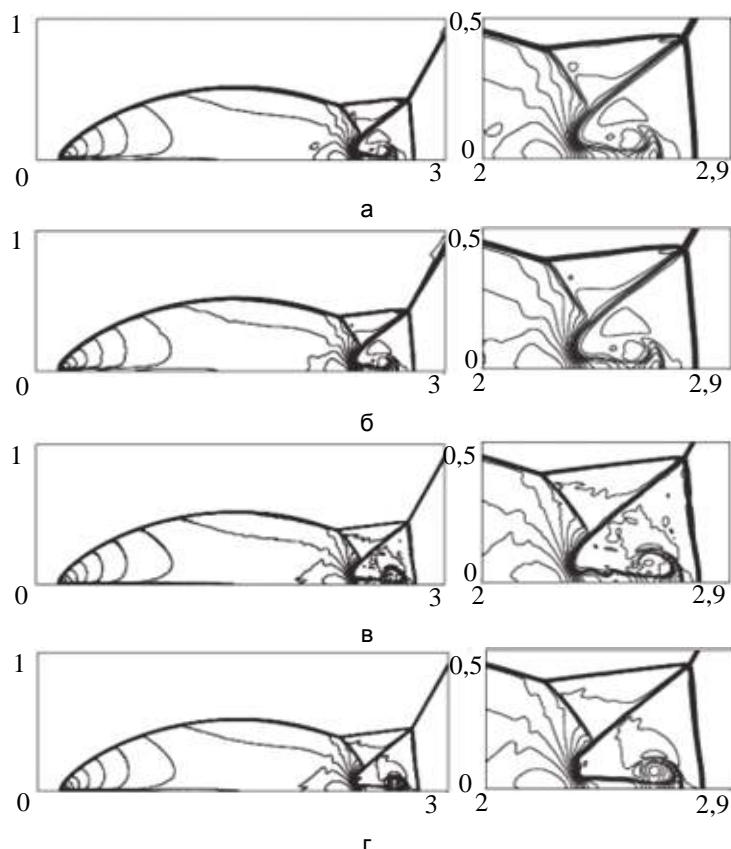


Рис. 7. Распределения числа Маха на сетке 3 при расчете с помощью: схемы WENO-3 на сетке с равномерным шагом (а); схемы WENO-3 на сетке с локальным измельчением контрольных объемов (б); схемы WENO-4 в компонентной форме (в); схемы WENO-4 в характеристической форме (г)

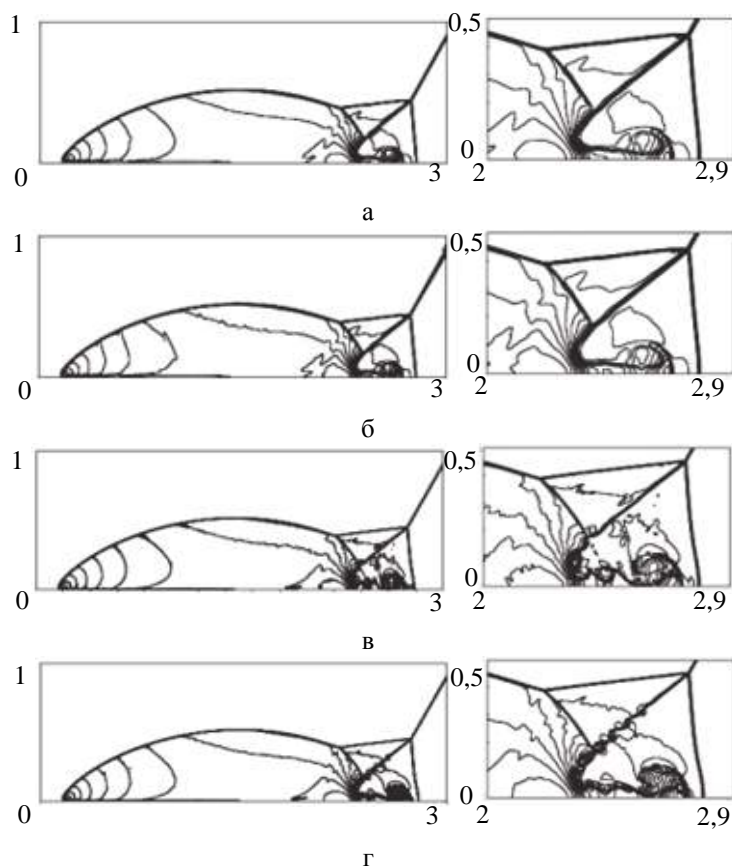


Рис. 8. Распределения числа Маха на сетке 4 при расчете с помощью: схемы WENO-3 на сетке с равномерным шагом (а); схемы WENO-3 на сетке с локальным измельчением контрольных объемов (б); схемы WENO-4 в компонентной форме (в); схемы WENO-4 в характеристической форме (г)

Заключение

На основе WENO-схем высокого порядка точности проведено численное моделирование регулярного и маховского отражения ударной волны от стенки. Полученная ударно-волновая структура потока согласуется с имеющимися численными решениями. При этом фронт ударной волны, отраженной от стенки, размывается на 2–3 ячейки. Результаты численного моделирования, полученные на основе схем WENO, реализованных в покомпонентной и в характеристической форме, демонстрируют отсутствие нефизических осцилляций решения, характерных для схем TVD.

Литература

1. Адрианов А.Л., Старых А.Л., Усков В.Н. Интерференция стационарных газодинамических разрывов. Новосибирск: Наука, 1995. 180 с.
2. Ben-Dor G. *Shock Wave Reflection Phenomena*. New York: Springer-Verlag, 1991. 307 p.
3. Иванов М.С., Кудрявцев А.Н., Никифоров С.Б., Хотяновский Д.В. Переход между регулярным и маховским отражением ударных волн: новые численные и экспериментальные результаты // *Аэромеханика и газовая динамика*. 2002. № 3. С. 3–12.
4. Тарнавский Г.А. Ударные волны в газах с различными показателями адиабаты до и после фронта скачка // *Вычислительные методы и программирование*. 2003. Т. 3. № 1. С. 222–236.
5. Тарнавский Г.А. Неединственность ударно-волновых структур в реальных газах: маховское и/или регулярное отражение // *Вычислительные методы и программирование*. 2003. Т. 4. № 1. С. 258–277.
6. Colella P. Multidimensional upwind methods for hyperbolic conservation laws // *Journal of Computational Physics*. 1990. V. 87. N 1. P. 171–200. doi: 10.1016/0021-9991(90)90233-q
7. Woodward P.R., Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // *Journal of*

References

1. Adrianov A.L., Starykh A.L., Uskov V.N. *Interference of Stationary Gasdynamic Discontinuities*. Novosibirsk, Nauka Publ., 1995, 180 p. (In Russian)
2. Ben-Dor G. *Shock Wave Reflection Phenomena*. New York, Springer-Verlag, 1991, 307 p.
3. Ivanov M.S., Kudryavtsev A.N., Nikiforov S.B., Khotyanovskii D.V. Transition between regular and Mach reflection of shock waves: new numerical and experimental results. *Aeromekhanika i Gazovaya Dinamika*, 2002, no. 3, pp. 3–12. (In Russian)
4. Tarnavsky G.A. Shock waves in real gases with different specific heat ratios ahead of and behind shock fronts. *Vychislitel'nye Metody i Programirovanie*, 2003, vol. 3, no. 1, pp. 222–236. (In Russian)
5. Tarnavsky G.A. Nonuniqueness of shockwave structures in real gases: the Mach and/or regular reflection. *Vychislitel'nye Metody i Programirovanie*, 2003, vol. 4, no. 1, pp. 258–277. (In Russian)
6. Colella P. Multidimensional upwind methods for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 1990, vol. 87, no. 1, pp. 171–200. doi: 10.1016/0021-9991(90)90233-q
7. Woodward P.R., Colella P. The numerical simulation of two-

- Computational Physics. 1984. V. 54. N 1. P. 115–173. doi: 10.1016/0021-9991(84)90142-6
8. Correa L., Lima G.A.B., Candezano M.A.C., Braun M.P.S., Oishi C.M., Navarro H.A., Ferreira V.G. A C^2 -continuous high-resolution upwind convection scheme // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2013. V. 72. N 12. P. 1263–1285. doi: 10.1007/978-3-642-60543-7_17
 9. Suresh A., Huynh H.T. Accurate monotonicity-preserving schemes with Runge–Kutta time stepping // *Journal of Computational Physics*. 1997. V. 136. N 1. P. 83–99. doi: 10.1006/jcph.1997.5745
 10. Balsara D., Shu C.-W. Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy // *Journal of Computational Physics*. 2000. V. 160. N 2. P. 405–452. doi: 10.1006/jcph.2000.6443
 11. Castro M., Costa B., Don W.-S. High order weighted essentially non-oscillatory WENO-Z schemes for hyperbolic conservation laws // *Journal of Computational Physics*. 2011. V. 230. N 5. P. 1766–1792. doi: 10.1016/j.jcp.2010.11.028
 12. Clain S., Diot S., Loubere R. A high-order finite volume method for hyperbolic systems: multi-dimensional optimal order detection (MOOD) // *Journal of Computational Physics*. 2011. V. 230. N 10. P. 4028–4050. doi: 10.21914/anziamj.v57i0.9038
 13. Liu Y., Shu C.-W., Tadmor E., Zhang M. Non-oscillatory hierarchical reconstruction for central and finite volume schemes // *Communications in Computational Physics*. 2007. V. 2. N 5. P. 933–963.
 14. Shi J., Zhang Y.-T., Shu C.-W. Resolution of high order WENO schemes for complicated WENO structures // *Journal of Computational Physics*. 2003. V. 186. N 2. P. 690–696. doi: 10.1016/s0021-9991(03)00094-9
 15. Hu C.Q., Shu C.-W. Weighted essentially non-oscillatory schemes on triangular meshes // *Journal of Computational Physics*. 1999. V. 150. N 1. P. 97–127. doi: 10.1006/jcph.1998.6165
 16. Shi J., Hu C., Shu C.-W. A technique of treating negative weights in WENO schemes // *Journal of Computational Physics*. 2002. V. 175. N 1. P. 108–127. doi: 10.1006/jcph.2001.6892
 17. Wang Z.J., Zhang L., Liu Y. Spectral (finite) volume method for conservation laws on unstructured grids. IV. Extension to two-dimensional systems // *Journal of Computational Physics*. 2004. V. 194. N 2. P. 716–741. doi: 10.1016/j.jcp.2003.09.012
 18. Cockburn B., Shu C.-W. The local discontinuous Galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1998. V. 35. N 6. P. 2440–2463. doi: 10.1137/s0036142997316712
 19. Галанин М.П., Савенков Е.Б., Токарева С.А. Решение задач газовой динамики с ударными волнами RKDG-методом // *Математическое моделирование*. 2008. Т. 20. № 11. С. 55–66.
 20. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Вычислительные технологии в задачах механики жидкости и газа. М.: Физматлит, 2012. 468 с.
 21. Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н., Козелков А.С., Карпенко А.Г., Тетерина И.В. Методы ускорения газодинамических расчетов на неструктурированных сетках. М.: Физматлит, 2013. 536 с.
 22. Yee H.C., Warming R.F., Harten A. Application of TVD schemes for the Euler equations of gas dynamics // *Lectures in Applied Mathematics*. 1983. V. 22. P. 357–377.
 23. Ekaterinaris J.A. High-order accurate, low-numerical diffusion methods for aerodynamics // *Progress in Aerospace Sciences*. 2005. V. 41. N 3–4. P. 192–300. doi: 10.1016/j.paerosci.2005.03.003
 24. Gottlieb S., Shu C.-W. Total variation diminishing Runge–Kutta schemes // *Mathematics of Computation of the American Mathematical Society*. 1998. V. 67. N 221. P. 73–85. doi: 10.1090/s0025-5718-98-00913-2
 25. Ворожцов Е.В. Применение разложений Лагранжа–Бюрмана для численного интегрирования уравнений невязкого газа // *Вычислительные методы и программирование*. 2011. Т. 12. № 1. С. 348–361.
 26. Bona C., Vona-Casas C., Terradas J. Linear high-resolution schemes for hyperbolic conservation laws: TVB numerical evidence // *Journal of Computational Physics*. 2009. V. 228. N 6. P. 2266–2281. doi: 10.1016/j.jcp.2008.12.010
 - dimensional fluid flow with strong shocks. *Journal of Computational Physics*, 1984, vol. 54, no. 1, pp. 115–173. doi: 10.1016/0021-9991(84)90142-6
 8. Correa L., Lima G.A.B., Candezano M.A.C., Braun M.P.S., Oishi C.M., Navarro H.A., Ferreira V.G. A C^2 -continuous high-resolution upwind convection scheme. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2013, vol. 72, no. 12, pp. 1263–1285. doi: 10.1007/978-3-642-60543-7_17
 9. Suresh A., Huynh H.T. Accurate monotonicity-preserving schemes with Runge–Kutta time stepping. *Journal of Computational Physics*, 1997, vol. 136, no. 1, pp. 83–99. doi: 10.1006/jcph.1997.5745
 10. Balsara D., Shu C.-W. Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy. *Journal of Computational Physics*, 2000, vol. 160, no. 2, pp. 405–452. doi: 10.1006/jcph.2000.6443
 11. Castro M., Costa B., Don W.-S. High order weighted essentially non-oscillatory WENO-Z schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 2011, vol. 230, no. 5, pp. 1766–1792. doi: 10.1016/j.jcp.2010.11.028
 12. Clain S., Diot S., Loubere R. A high-order finite volume method for hyperbolic systems: multi-dimensional optimal order detection (MOOD). *Journal of Computational Physics*, 2011, vol. 230, no. 10, pp. 4028–4050. doi: 10.21914/anziamj.v57i0.9038
 13. Liu Y., Shu C.-W., Tadmor E., Zhang M. Non-oscillatory hierarchical reconstruction for central and finite volume schemes. *Communications in Computational Physics*, 2007, vol. 2, no. 5, pp. 933–963.
 14. Shi J., Zhang Y.-T., Shu C.-W. Resolution of high order WENO schemes for complicated WENO structures. *Journal of Computational Physics*, 2003, vol. 186, no. 2, pp. 690–696. doi: 10.1016/s0021-9991(03)00094-9
 15. Hu C.Q., Shu C.-W. Weighted essentially non-oscillatory schemes on triangular meshes. *Journal of Computational Physics*, 1999, vol. 150, no. 1, pp. 97–127. doi: 10.1006/jcph.1998.6165
 16. Shi J., Hu C., Shu C.-W. A technique of treating negative weights in WENO schemes. *Journal of Computational Physics*, 2002, vol. 175, no. 1, pp. 108–127. doi: 10.1006/jcph.2001.6892
 17. Wang Z.J., Zhang L., Liu Y. Spectral (finite) volume method for conservation laws on unstructured grids. IV. Extension to two-dimensional systems. *Journal of Computational Physics*, 2004, vol. 194, no. 2, pp. 716–741. doi: 10.1016/j.jcp.2003.09.012
 18. Cockburn B., Shu C.-W. The local discontinuous Galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1998, vol. 35, no. 6, pp. 2440–2463. doi: 10.1137/s0036142997316712
 19. Galanin M.P., Savenkov E.B., Tokareva S.A. The solution of gas dynamics problems with shock waves using Runge-Kutta discontinuous Galerkin method. *Matematicheskoe Modelirovanie*, 2008, vol. 20, no. 11, pp. 55–66. (In Russian)
 20. Volkov K.N., Emel'yanov V.N. *Computational Technologies in the Problems of Fluid and Gas Mechanics*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2012, 468 p. (In Russian)
 21. Volkov K.N., Deryugin Yu.N., Emel'yanov V.N., Kozelkov A.S., Karpenko A.G., Teterina I.V. *Methods of Acceleration of Gas Dynamic Calculations on Unstructured Grids*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2013, 536 p. (In Russian)
 22. Yee H.C., Warming R.F., Harten A. Application of TVD schemes for the Euler equations of gas dynamics. *Lectures in Applied Mathematics*, 1983, vol. 22, pp. 357–377.
 23. Ekaterinaris J.A. High-order accurate, low-numerical diffusion methods for aerodynamics. *Progress in Aerospace Sciences*, 2005, vol. 41, no. 3–4, pp. 192–300. doi: 10.1016/j.paerosci.2005.03.003
 24. Gottlieb S., Shu C.-W. Total variation diminishing Runge–Kutta schemes. *Mathematics of Computation of the American Mathematical Society*, 1998, vol. 67, no. 221, pp. 73–85. doi: 10.1090/s0025-5718-98-00913-2
 25. Vorozhtsov E.V. Application of Lagrange-Burmann expansions for the numerical integration of the inviscid gas equations. *Vychislitel'nye Metody i Programirovanie*, 2011, vol. 12, no. 1, pp. 348–361. (In Russian)

26. Bona C., Bona-Casas C., Terradas J. Linear high-resolution schemes for hyperbolic conservation laws: TVB numerical evidence. *Journal of Computational Physics*, 2009, vol. 228, no. 6, pp. 2266–2281. doi: 10.1016/j.jcp.2008.12.010

Авторы

Булат Михаил Павлович – аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация; инженер, «Центр трансфера технологий «Кулон», Санкт-Петербург, 198035, Российская Федерация, bulat_mh@mail.ru

Волобуев Игорь Алексеевич – аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация; инженер, ООО «ВНХ-Энерго», Санкт-Петербург, 198035, Российская Федерация, Volobuev_ig@mail.ru

Волков Константин Николаевич – доктор физико-математических наук, научный сотрудник, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация; лектор, Университет Кингстона, Лондон, SW15 3DW, Великобритания, k.volkov@kingston.ac.uk

Пронин Владимир Александрович – доктор технических наук, заведующий кафедрой, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, major.pronin@mail.ru

Authors

Mikhail P. Bulat – postgraduate, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation; engineer, Technology Transfer Center "Kulon", Saint Petersburg, 198035, Russian Federation, bulat_mh@mail.ru

Igor A. Volobuev – postgraduate, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation; engineer, OOO "VNH-Energo", Saint Petersburg, 198035, Russian Federation, Volobuev_ig@mail.ru

Konstantin N. Volkov – D.Sc., Researcher, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation; Senior Lecturer, Kingston University, London, SW15 3DW, UK, k.volkov@kingston.ac.uk

Vladimir A. Pronin – D.Sc., Head of Chair, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, major.pronin@mail.ru