УДК 004.942;531.391.5; 681.5.03; 681.5.08

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА В ОЦЕНКАХ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Г.И. Мельников[a], В.Г. Мельников[a], Н.А. Дударенко[a], А.С. Алышев[a,b], Л.Н. Иванова[a]

[a] Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация
[b] АО «Навис», Санкт-Петербург, 199106, Российская Федерация
Адрес для переписки: vgmelnikov@corp.ifmo.ru

Информация о статье
Поступила в редакцию 19.04.17, принята к печати 22.07.17
doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-5-947-951
Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Мельников Г.И., Мельников В.Г., Дударенко Н.А., Алышев А.С., Иванова Л.Н. Последовательности дифференциальных неравенств для функций Ляпунова в оценках устойчивости нелинейных динамических систем // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2017. Т. 17. № 5. С. 947–951. doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-5-947-951

Аннотация
Рассмотрена нелинейная автономная управляемая механическая система с несколькими степенями свободы с математической моделью в виде многочленной системы дифференциальных уравнений, содержащей однородные линейные формы относительно фазовых переменных и нелинейные однородные формы до четвертой степени с малыми коэффициентами. Заменой переменных с множителями – показательными функциями времени – система преобразуется в систему с автономной линейной частью и неавтономными переменными коэффициентами при однородных нелинейных формах с матрицей, имеющей собственные значения с уменьшенными по модулю отрицательными вещественными частями, а также нелинейными формами с переменными коэффициентами. Предложен метод формирования последовательности линейных дифференциальных неравенств для определенно-положительных функций Ляпунова с оценками приближения системы к устойчивому состоянию равновесия.

Ключевые слова
механические системы, динамические системы, устойчивость движения, функции Ляпунова, итерационный метод, последовательность дифференциальных неравенств, функциональные оценки переходных процессов

Благодарности
Работа поддержана грантами РФФИ 16-08-00997, 17-01-00672.

SEQUENCES OF DIFFERENTIAL INEQUALITIES FOR LYAPUNOV FUNCTIONS IN STABILITY ESTIMATES OF NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS

G.I. Melnikov[a], V.G. Melnikov[a], N.A. Dudarenko[a], A.S. Alyshev[a,b], L.N. Ivanova[a]

[a] ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation
[b] Navis Engineering, Saint Petersburg, 199106, Russian Federation
Corresponding author: vgmelnikov@corp.ifmo.ru

Article info
Received 09.04.17, accepted 22.07.17
doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-5-947-951
Article in Russian

For citation: Melnikov G.I., Melnikov V.G., Dudarenko N.A., Alyshev A.S., Ivanova L.N. Sequences of differential inequalities for Lyapunov functions in stability estimates of nonlinear dynamical systems. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2017, vol. 17, no. 5, pp. 947–951 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-5-947-951

Abstract
We consider a nonlinear autonomous controlled mechanical system with several degrees of freedom with a mathematical model in the form of a polynomial system of differential equations containing homogeneous linear forms with respect to phase variables and nonlinear homogeneous forms up to the fourth power with small coefficients. By replacing variables with multipliers–exponential functions of time–the system is transformed into a system with an autonomous linear part and non-autonomous variable coefficients for homogeneous nonlinear forms with a matrix having eigenvalues with negative real parts reduced in absolute value, as well as nonlinear forms with variable coefficients. A method is proposed for the formation of a sequence of linear differential inequalities for positive-definite Lyapunov functions with estimates of the system approximation to a stable equilibrium state.

Keywords
mechanical systems, dynamical systems, motion stability, Lyapunov functions, iteration method, differential inequalities sequence, transient process functional estimates

Acknowledgements
This work was supported by the RFBR Grants 16-08-00997, 17-01-00672.

Введение

В современных научных работах существенное место занимает определение нелинейных математических моделей механических систем в виде нелинейных дифференциальных уравнений с линейными составляющими и малыми нелинейными составляющими силовых факторов. Основными методами исследования таких систем являются методы разложения по малому параметру. В особых случаях за порождающие решения принимаются решения нелинейной системы с включением в нее некоторых нелинейных слагаемых, что демонстрируется в статьях, монографиях и учебниках по теории устойчивости [1–3]. Согласно теории устойчивости движения, наряду с исходной математической моделью в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений, отражающей все особенности движения системы, определяется одно нелинейное дифференциальное неравенство для определенно-положительной функции, приводящее к покоординатной оценке практической устойчивости движения. Такие достоверные качественные и количественные, сравнительно простые оценки находят широкое практическое применение [4–16]. Они носят достаточный характер – оценки можно уточнять посредством перехода к формированию и исследованию более сложных и точных дифференциальных неравенств. В то же время возникает проблема аналитического интегрирования сложных динамических неравенств. Методу последовательного уточнения и анализа дифференциальных неравенств и уделяется внимание в данной работе.

Постановка задачи

Рассмотрим движение нелинейной многочленной механической системы с конечным числом степеней свободы, управляемой или неуправляемой, с выбранным вектор-столбцом фазовых координат $\mathbf{q}=[q_1,...,q_n]^T$, определяющим фазовое состояние системы. Пусть математическая модель движения рассматриваемого нелинейного технического объекта в окрестности нуля фазового пространства состояний приведена к форме Коши, имеет вид системы n дифференциальных уравнений, содержащих многочлены до четвертой степени включительно, заданной в конечной окрестности $\bar{D}_0$ нуля фазового пространства состояний:

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{P}'\mathbf{q}+\mathbf{Q}^{(2)}(\mathbf{q})+\mathbf{Q}^{(3)}(\mathbf{q})+\mathbf{Q}^{(4)}(\mathbf{q}),\\ \text{при}\quad \mathbf{q}\in\bar{D}_0,\quad \bar{D}_0=\{\mathbf{q}=[q_1,...,q_n]^T:|\,q_s\,|\le l_s, s=1,...,n\},\end{gathered}\tag{1}$$

здесь $\mathbf{q}=[q_1,\dots,q_n]^T$ – вектор-столбец фазовых координат, $\mathbf{P}'=[p'_{ij}]_1^n$ – постоянная матрица линейной части системы. Предполагаем, что собственные значения матрицы $\mathbf{P}'$ различны, имеют отрицательные вещественные части, пронумерованы в порядке убывания их вещественных частей:

$$\lambda'_s=\alpha'_s+i\beta'_s,\quad \alpha'_n\le\alpha'_{n-1}\le\ldots\le\alpha'_1<0,\quad s=1,...,n.$$

Малые однородные формы второго, третьего и четвертого порядков $\mathbf{Q}^{(2)},\mathbf{Q}^{(3)},\mathbf{Q}^{(4)}$ относительно фазовых переменных представлены в виде суммы мономов $(q_1^{\nu_1}...q_n^{\nu_n})$ с постоянными коэффициентами:

$$\mathbf{Q}^{(k)}(\mathbf{q})=\begin{bmatrix}Q_1^{(k)}\\ \ldots\\ Q_n^{(k)}\end{bmatrix}\quad\text{при}\quad Q_s^{(k)}=\sum_{\nu_1+\ldots+\nu_n=k}p^{s(k)}_{\nu_1\ldots\nu_n}q_1^{\nu_1}\ldots q_n^{\nu_n},\quad k=2,3,4.$$

Требуется оценить переходные процессы устойчивого движения динамической системы с применением метода дифференциальных неравенств [1, 12] в случаях, если дифференциальные неравенства для функций Ляпунова имеют сложный, не интегрируемый в квадратурах вид.

Метод последовательности дифференциальных неравенств

Выполним замену переменных с целью приведения первой вещественной части α'_1 к малой отрицательной величине $(-\varepsilon)$:

$$\mathbf{x}=\mathbf{q}\exp(\alpha t)\quad\text{при}\quad \alpha=|\,\alpha_1\,|-\varepsilon=-\alpha_1-\varepsilon,\quad \varepsilon>0.$$

Система (1) после почленного деления на $\exp(\alpha t)$ принимает нестационарный вид, но со стационарной линейной частью:

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{P}\mathbf{x}+e^{-\alpha t}\mathbf{Q}^{(2)}(\mathbf{x})+e^{-2\alpha t}\mathbf{Q}^{(3)}(\mathbf{x})+e^{-3\alpha t}\mathbf{Q}^{(4)}(\mathbf{x}),\quad \mathbf{P}=\mathbf{P}'+\alpha\mathbf{E}.\tag{2}$$

Пусть на основе линейной части системы выбрана функция Ляпунова $V(x)$ в виде определенно положительной квадратичной формы, производная от которой в силу системы (2) содержит определенноотрицательную квадратичную форму $W^{(2)}(x)$, а также содержит однородные формы третей – пятой степеней с нестационарными множителями – показательными функциями,

$$\dot{V}(x) = W^{(2)}(x) + e^{-\alpha t}W^{(3)}(x) + e^{-2\alpha t}W^{(4)}(x) + e^{-3\alpha t}W^{(5)}(x). \quad (3)$$

Отсюда имеем дифференциальное неравенство

$$\dot{V} \le W^{(2)} + e^{-\alpha t}\,|W^{(3)}| + e^{-2\alpha t}\,|W^{(4)}| + e^{-3\alpha t}\,|W^{(5)}|. \quad (4)$$

Квадратичная форма $W^{(2)}$ допускает мажорацию определенно-отрицательной формой вида $(-c_0 V)$ при $c_0 > 0$ [12]. Однородные формы $|W^{(3)}|, |W^{(4)}|, |W^{(5)}|$ с малыми коэффициентами мажорируем соответствующими формами с малыми неотрицательными коэффициентами c_1, c_2, c_3. Получаем

$$W^{(2)} \le -c_0 V(x), \quad |W^{(3)}| \le c_1 V^{3/2}(x), \quad |W^{(4)}| \le c_2 V^2(x), \quad |W^{(5)}| \le c_3 V^{5/2}(x). \quad (4)$$

Подставляя эти оценки в (4), получаем дифференциальное неравенство

$$\dot{V} \le -\{c_0 - f(V,t)\}V \quad \text{при} \quad f(V,t) = \sum_{k=1}^{3} c_k e^{-k\alpha t} V^{k/2}, \quad c_0 > 0, \quad c_i \ge 0, \quad i = 1,2,3. \quad (5)$$

Неравенство (5) будем использовать при условии отрицательности его правой части вида $f(V,t) \le c_0$, т.е. в фазовой области $\bar{G}(H) = \{x\colon V(x) \le H\}$, где константа H удовлетворяет неравенству $f(H,0) \le c_0$. Можно вместо $\bar{G}(H)$ рассматривать область $\bar{G}(h)$ при $h < H$. Присоединяя дифференциальное уравнение (3) к системе (2), получаем расширенную систему $(n+1)$ дифференциальных уравнений с переменными $(x_1, ..., x_n, V)$.

Возьмем множество решений системы (2), (3) с начальными условиями из области $\bar{G}(h)$:

$$x = x_0, \quad V_0 = V(x_0) \subset \bar{G}(h), \quad \text{при} \quad t = t_0. \quad (6)$$

В начальный момент времени правая часть неравенства (5) по условию отрицательна, следовательно, отрицательна и левая часть вида $\dot{V}(x)$, т.е. функция $V(x)$ убывает, приближаясь к нулю, и выполняется условие $V(x) \le V_0$ при всех $t > t_0$. Интегрирование сложного дифференциального неравенства (5) при начальных условиях (6) выполним методом итераций. Подставим в монотонно возрастающую по V функцию $f(V,t)$ значение $V = V_0$. Получим линейное, более грубое, дифференциальное неравенство с завышенной правой частью вида

$$\dot{V} + (c_0 - f(V_0,t))V \le 0. \quad (7)$$

Умножая почленно (7) на положительную функцию $\exp\{c_0(t-t_0) - \int_{t_0}^{t} f(V_0,t)dt\}$ и интегрируя в пределах $[t_0, t]$, получаем оценку

$$V\exp\left\{\int_{t_0}^{t}(c_0 - f(V_0,t)dt\right\} \le V_0, \quad \text{при} \quad t \ge t_0.$$

Отсюда находим функциональную оценку асимптотического приближения к нулю определенно-положительной функции вида

$$V \le F_1(V_0,t_0,t), \quad F_1 = V_0\exp\left\{-c(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} f(V_0,t)dt\right\}, \quad t > t_0, \quad (8)$$

где $f(V_0,t)$ и $F_1(V_0,t_0,t)$ – монотонно возрастающие по V_0 функции.

Затем выполним первую итерацию. А именно, в неубывающей по V функции $f(V,t)$ дифференциального неравенства (5) положим $V = F_1$ и выполним интегрирование полученного линейного дифференциального неравенства в пределах $[t_0, t]$. В результате находим более точную оценку сверху функции Ляпунова:

$$V \le F_2(V_0,t_0,t) \quad \text{при} \quad F_2 = V_0\exp\left\{-c(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} f(F_1,t)dt\right\} \equiv V_2(V_0,t_0,t), \quad t \ge t_0. \quad (9)$$

Аналогично определяем вторую итерацию, использующую более точную мажорацию функции Ляпунова:

$$V \le F_3(V_0,t_0,t) \quad \text{при} \quad F_3 = V_0\exp\left\{-c(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} f(F_2,t)dt\right\} \equiv V_3(V_0,t_0,t), \quad t \ge t_0. \quad (10)$$

Для дальнейшего уточнения оценки переходного процесса можно выполнить и последующую итерацию. Ввиду определенной положительности квадратичной формы $V(x)$ из оценки (10) (а также из оценок (8), (9)) следуют покоординатные функциональные оценки фазовых переменных x_s вида

$$|x_s| \le f_s(t_0, x_0, V_0, t) \quad \text{при} \quad s = 1, 2, ..., n. \tag{11}$$

Таким образом, возмущенное движение нелинейной механической системы с математической моделью вида (2) из любого начального состояния (6), взятого на гиперповерхности вида $V(x) = V(x_0)$, асимптотически приближается к положению статического равновесия согласно функциональной оценке (10) с координатными оценками (11), которые и принимаем за меры практической устойчивости движения.

Пример

Рассмотрим голономную стационарную механическую систему с одной степенью свободы с обобщенными координатами q_1, q_2, с математической моделью в виде автономной системы двух уравнений

$$\dot{q}_1 = -1{,}1\, q_1 + \varepsilon q_2^3, \quad \dot{q}_2 = -2q_2 + 3\varepsilon q_1^3.$$

Собственные значения матрицы $\mathbf{P}' = \begin{bmatrix} -1{,}1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ линеаризованной системы – вещественные, отрицательные: $\lambda_1 = -1{,}1,\ \lambda_2 = -2$.

Параметр α назначаем меньшим λ_1, но близким к нему, например, примем $\alpha = 1$. Заменой переменных преобразуем динамическую систему к виду

$$x_1 = q_1 e^{\alpha t} = q_1 e^t, \quad x_2 = q_2 e^t \quad \Rightarrow \quad q_1 = x_1 e^{-t},\ q_2 = x_2 e^{-t}.$$

Математическая модель системы в новых переменных

$$\dot{x}_1 = (\dot{q}_1 + q_1)e^t = -0{,}1 x_1 + \varepsilon e^{-2t} x_2^3$$
$$\dot{x}_2 = (\dot{q}_2 + q_2)e^t = -x_2 + 3\varepsilon e^{-2t} x_1^3.$$

Производная от функции Ляпунова $V = x_1^2 + x_2^2$, в силу динамических уравнений, равна

$$\dot{V} = 2x_1(-0{,}1x_1 + \varepsilon x_2^3 e^{-2t}) + 2x_2(-x_2 + 3\varepsilon x_1^3 e^{-2t}),$$

отсюда

$$\dot{V} = -0{,}2x_1^2 - 2x_1^2 + 2\varepsilon(x_1 x_2^3 + 3x_1^3 x_2)e^{-2t} \le -0{,}2V + 2\varepsilon x_1 x_2 (3x_1^2 + x_2^2)e^{-2t} \le -0{,}2V + \varepsilon(x_1^2 + x_2^2)(3x_1^2 + 3x_2^2)e^{-2t}.$$

Получаем неавтономное дифференциальное неравенство с добавленным условием неположительности правой части:

$$\dot{V} \le -0{,}2V + 3\varepsilon V^2 e^{-2t} \le 0 \ \text{ при } V \le H = (15\varepsilon)^{-1}.$$

Составим последовательность дифференциальных неравенств

$$\dot{V} \le (-0{,}2 + 3\varepsilon V_0)Ve^{-2t} \equiv V_1, \quad \dot{V} \le (-0{,}2 + 3\varepsilon V_1)Ve^{-2t} \equiv V_2, \quad \dot{V} \le (-0{,}2 + 3\varepsilon V_2)Ve^{-2t} \equiv V_3.$$

Интегрирование этих простых линейных дифференциальных неравенств в пределах $[t_0, t]$ приводит к оценке функции V, полученной из третьего неравенства, а также – к менее точным оценкам из первого неравенства и второго неравенства.

Заключение

В работе предложен метод построения неавтономного дифференциального неравенства для определенно-положительной функции Ляпунова и его аналитическое интегрирование итерационным методом построения последовательности дифференциальных неравенств. При этом используется особенность дифференциального неравенства (4), заключающаяся в том, что оно состоит из линейного относительно V слагаемого и нелинейной малой положительной монотонно возрастающей по V функции. Оценки переходных процессов во времени, представленные в виде функционального неравенства для определенно-положительной функции, содержат начальные значения функции Ляпунова и асимптотически стремящиеся к нулю функции времени.

Литература

1. Мельников Г.И. Некоторые вопросы прямого метода Ляпунова // Доклады академии наук. 1956. Т. 110(3). С. 326–329.
2. Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н. Метод сравнения в математической теории систем. Новосибирск: Наука, 1980. 480 с.
3. Васильев С.Н. К 80-летию со дня рождения академика В.М. Матросова // Автоматика и телемеханика. 2013. № 2. С. 139–151.

References

1. Melnikov G.I. Some problems of the direct Lyapunov method. *Doklady Akademii Nauk*, 1956, vol. 110, pp. 326–329. (In Russian)
2. Matrosov V.M., Anapol'skii L.Yu., Vassilyev S.N. *Method of Comparison in the Mathematical Theory of Systems*. Novosibirsk, Nauka Publ., 1980, 480 p. (In Russian)
3. Vassilyev S.N. To the 80th anniversary of the birth of Academician V.M. Matrosov. *Avtomatika i Telemekhanika*, 2013, no. 2, pp. 139–151. (In Russian)

4. Vassilyev S.N., Kosov A.A. Common and multiple Lyapunov functions in stability analysis of nonlinear switched systems // AIP Conference Proc. 2012. V. 1493. P. 1066–1073. doi: 10.1063/1.4765620
5. Vassilyev S.N. The reduction method, I // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 2006. V. 64. N 2. P. 242–253. doi: 10.1016/j.na.2005.06.047
6. Martynyuk A.A., Martynyuk-Chernienko Y.A. Analysis of the set of trajectories of nonlinear dynamics: stability and boundedness of motions // Differential Equations. 2013. V. 49. N 1. P. 20–31. doi: 10.1134/s0012266113010035
7. Martynyuk A.A. On the theory of Lyapunov's direct method // Doklady Mathematics. 2006. V. 73. N 3. P. 376–379. doi: 10.1134/s1064562406030161
8. Мельников Г.И., Иванов С.Е., Мельников В.Г., Малых К.С. Применение модифицированного метода преобразований к нелинейной динамической системе // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2015. Т. 15. № 1(95). С. 149–154. doi: 10.17586/2226-1494-2015-15-1-149-154
9. Иванов С.Е., Мельников Г.И. Автономизация нелинейных динамических систем // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2014. № 1(89). С. 151–156.
10. Иванов С.Е. Алгоритмическая реализация метода исследования нелинейных динамических систем // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2012. № 4 (80). С. 90–92.
11. Мельников В.Г. Преобразование динамических многочленных систем с применением аппроксимаций Чебышева // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2012. № 4 (80). С. 85–90.
12. Мельников Г.И. Динамика нелинейных механических и электромеханических систем. Л.: Машиностроение, 1975. 198 с.
13. Lakshmikantham V., Matrosov V.M., Sivasundaram S. Vector Lyapunov Functions Method in Stability Theory. Amsterdam: Kluwer Academic Publishers, 1991. 172 p. doi: 10.1007/978-94-015-7939-1
14. Aleksandrov A.Yu., Tikhonov A.A. Electrodynamic stabilization of earth-orbiting satellites in equatorial orbits // Cosmic Research. 2012. V. 50. N 4. P. 313–318. doi: 10.1134/s001095251203001x
15. Kovalev A.M., Martynyuk A.A., Boichuk O.A., Mazko A.G., Petryshyn R.I., Slyusarchuk V.Y., Zuyev A.L., Slyn'ko V.I. Novel qualitative methods of nonlinear mechanics and their application to the analysis of multifrequency oscillations, stability, and control problems // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. 2009. V. 9(2). P. 117–145.
16. Sugie J., Hata S. Global asymptotic stability for half-linear differential systems with generalized almost periodic coefficients // Monatshefte fur Mathematik. 2012. V. 166. N 2. P. 255–280. doi: 10.1007/s00605-011-0297-1

4. Vassilyev S.N., Kosov A.A. Common and multiple Lyapunov functions in stability analysis of nonlinear switched systems. *AIP Conference Proc*., 2012, vol. 1493, pp. 1066–1073. doi: 10.1063/1.4765620
5. Vassilyev S.N. The reduction method, I. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 2006, vol. 64, no. 2, pp. 242–253. doi: 10.1016/j.na.2005.06.047
6. Martynyuk A.A., Martynyuk-Chernienko Y.A. Analysis of the set of trajectories of nonlinear dynamics: stability and boundedness of motions. *Differential Equations*, 2013, vol. 49, no. 1, pp. 20–31. doi: 10.1134/s0012266113010035
7. Martynyuk A.A. On the theory of Lyapunov's direct method. *Doklady Mathematics*, 2006, vol. 73, no. 3, pp. 376–379. doi: 10.1134/s1064562406030161
8. Melnikov G.I., Ivanov S.E., Melnikov V.G., Malykh K.S. Application of modified conversion method to a nonlinear dynamical system. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2015, vol. 15, no. 1, pp. 149–154. doi: 10.17586/2226-1494-2015-15-1-149-154 (In Russian)
9. Ivanov S.E., Melnikov G.I. Off-line interaction of the nonlinear dynamic systems. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2014, no. 1, pp. 151–156.
10. Ivanov S.E. Algorithmic realization for research method of the nonlinear dynamic systems *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2012, no. 4, pp. 90–92. (In Russian)
11. Melnikov V.G. Transformation of dynamic polynomial systems by Chebyshev approximation. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2012, no. 4, pp. 85–90. (In Russian)
12. Melnikov G.I. *Dinamika Nelineinykh Mekhanicheskikh i Elektromekhanicheskikh Sistem* [Nonlinear Dynamics of Mechanical and Electromechanical Systems]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1975, 198 p. (In Russian)
13. Lakshmikantham V., Matrosov V.M., Sivasundaram S. *Vector Lyapunov Functions Method in Stability Theory*. Amsterdam, Kluwer Academic Publishers, 1991, 172 p. doi: 10.1007/978-94-015-7939-1
14. Aleksandrov A.Yu., Tikhonov A.A. Electrodynamic stabilization of earth-orbiting satellites in equatorial orbits. *Cosmic Research*, 2012, vol. 50, no. 4, pp. 313–318. doi: 10.1134/s001095251203001x
15. Kovalev A.M., Martynyuk A.A., Boichuk O.A., Mazko A.G., Petryshyn R.I., Slyusarchuk V.Y., Zuyev A.L., Slyn'ko V.I. Novel qualitative methods of nonlinear mechanics and their application to the analysis of multifrequency oscillations, stability, and control problems. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 2009, vol. 9, no. 2, pp. 117–145.
16. Sugie J., Hata S. Global asymptotic stability for half-linear differential systems with generalized almost periodic coefficients. *Monatshefte fur Mathematik*, 2012, vol. 166, no. 2, pp. 255–280. doi: 10.1007/s00605-011-0297-1

Авторы

Мельников Геннадий Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, gimelnikov@corp.ifmo.ru

Мельников Виталий Геннадьевич – доктор технических наук, доцент, профессор, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, vgmelnikov@corp.ifmo.ru

Дударенко Наталия Александровна – кандидат технических наук, доцент, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, dudarenko@mail.ifmo.ru

Алышев Александр Сергеев – аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация; инженер-исследователь, АО «Навис», Санкт-Петербург, 199106, Российская Федерация, a.alyshev@navisincontrol.com

Иванова Любовь Николаевна – аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, ln2305@yandex.ru

Authors

Gennady I. Melnikov – D.Sc., Full Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, gimelnikov@corp.ifmo.ru

Vitaly G. Melnikov – D.Sc., Associate Professor, Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, vgmelnikov@corp.ifmo.ru

Natalia A. Dudarenko – PhD, Associate Professor, Associate Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, dudarenko@mail.ifmo.ru

Alexander S. Alyshev – postgraduate, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation; research engineer, Navis Engineering, Saint Petersburg, 199106, Russian Federation, a.alyshev@navisincontrol.com

Lyubov N. Ivanova – postgraduate, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, ln2305@yandex.ru