УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ
ноябрь–декабрь 2017 Том 17 № 6 ISSN 2226-1494 http://ntv.ifmo.ru/
SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL OF INFORMATION TECHNOLOGIES, MECHANICS AND OPTICS
November–December 2017 Vol. 17 No 6 ISSN 2226-1494 http://ntv.ifmo.ru/en

УДК 681.51

УВЕЛИЧЕНИЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ФИНИТНО УСТОЙЧИВОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

К.А. Зименко[a], А.Е. Поляков[a,b]

[a] Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация
[b] Государственный институт исследований в информатике и автоматике, Лилль, 59650, Франция
Адрес для переписки: kostyazimenko@gmail.com

Информация о статье
Поступила в редакцию 29.07.17, принята к печати 02.10.17
doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-6-1018-1024
Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Зименко К.А., Поляков А.Е. Увеличение скорости сходимости финитно устойчивой системы управления // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2017. Т. 17. № 6. С. 1018–1024. doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-6-1018-1024

Аннотация
Представлено решение проблемы модификации алгоритма финитного управления с целью уменьшения времени переходного процесса замкнутой системы. Объект управления представляет из себя цепь последовательно соединенных интеграторов с доступным для измерения вектором состояния. Предполагается, что объект управления функционирует в условиях детерминированных внешних возмущающих воздействий и параметрических неопределенностей системы. Преимуществом модифицируемого алгоритма по сравнению с ранее представленными результатами является отсутствие необходимости выполнения дополнительных вычислительных процедур. Однако в качестве недостатка можно выделить более низкую скорость схождения траекторий системы к положению равновесия. Представленная модификация закона финитного управления позволяет уменьшить время переходного процесса замкнутой системы. Модифицированный алгоритм финитного управления разработан с использованием сочетания метода неявно определенной функции Ляпунова с теорией обобщенно однородных систем. Получены аналитические выражения, позволяющие произвести оценку времени сходимости вектора состояния объекта управления к положению равновесия, а также возможности уменьшения времени сходимости при использовании предложенного подхода. Проведено компьютерное моделирование разработанного алгоритма управления на системе, состоящей из трех последовательно соединенных интеграторов с детерминированным внешним возмущающим воздействием в канале управления. Компьютерное моделирование подтвердило эффективность представленных теоретических результатов.

Ключевые слова
алгоритмы финитного управления, метод неявно определенной функции Ляпунова, увеличение скорости схождения, финитно устойчивые системы, обобщенно однородные системы

Благодарности
Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-19-01422) в Университете ИТМО.

CONVERGENCE SPEED INCREASE OF A FINITE-TIME STABLE CONTROL SYSTEM

K.A. Zimenko[a], A.E. Polyakov[a,b]

[a] ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation
[b] Institut national de recherche en informatique et en automatique, Lille, 59650, France
Corresponding author: kostyazimenko@gmail.com

Article info
Received 29.07.17, accepted 02.10.17
doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-6-1018-1024
Article in Russian

For citation: Zimenko K.A., Polyakov A.E. Convergence speed increase of a finite-time stable control system. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2017, vol. 17, no. 6, pp. 1018–1024 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-6-1018-1024

Abstract
This paper is devoted to tuning of the finite-time control algorithm in order to reduce the transient process time of a closed-loop system. The control object is a chain of consecutively connected integrators with a state vector available for measurement. It is assumed that the control object operates under conditions of deterministic external disturbances and

parametric uncertainties of the system. The advantage of the modifiable algorithm in comparison with previously presented results is the absence of the need for additional computational procedures. However, a lower convergence rate of the system trajectories to the equilibrium position can be noticed as a drawback. The presented tuning of the finite control law makes it possible to reduce the time of the transient process of a closed system. The tuned finite-time control algorithm is developed by combination of the method of implicitly defined Lyapunov function with the theory of weighted homogeneous systems. Analytic expressions are obtained that give the possibility to estimate the convergence time of the state vector to the equilibrium position, as well as the possibility of its decrease at the proposed approach application. Computer simulation of the developed control algorithm was performed on the triple-integrator system with deterministic external disturbances in control channel. It has confirmed the effectiveness of the presented theoretical results.

Keywords

finite-time control algorithms, implicitly defined Lyapunov function method, convergence speed increase, finite-time stable systems, weighted homogeneous systems

Acknowledgements

This work is supported by the Russian Science Foundation under grant No.17-19-01422 and is carried out in ITMO University.

Введение

В практике управления зачастую возникает необходимость создания алгоритмов финитного управления, которые обеспечивают завершение всех переходных процессов за конечное время (см., например, [1–4]). В частности, создание алгоритмов финитного управления является актуальной задачей для робототехнических, электромеханических, аэрокосмических, транспортных и других приложений (например, [4, 5]).

Настоящая работа посвящена развитию закона финитного управления, представленного в работах [6, 7], для стабилизации системы последовательно соединенных интеграторов при наличии внешних возмущений и неопределенностей. Такая постановка задачи является весьма актуальной в связи с тем, что схемы управления зачастую могут быть легко расширены для более широкого класса систем (см., например, [8]), и, более того, существует множество механических и электромеханических приложений, описываемых данной моделью [5].

Результат работ [6, 7] является развитием [9] и позволяет финитно стабилизировать рассматриваемую систему, не требуя при этом каких-либо дополнительных вычислительных процедур, в отличие от работы [9]. Однако при практической реализации алгоритма из работ [6, 7] было выявлено, что скорость сходимости может быть значительно медленнее по сравнению с результатами работы [9]. Таким образом, основной целью настоящей работы является модификация алгоритма финитного управления [6, 7], позволяющая сократить время установления финитной стабилизации системы. Полученный результат основан на сочетании метода неявной функции Ляпунова с теорией однородных систем. Результаты компьютерного моделирования подтверждают эффективность предложенного метода.

Используемые обозначения: $R_+ = \{x \in R : x > 0\}$, где R – множество вещественных чисел; $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму, т.е. $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ для $\mathbf{x} \in R^n$; положительная (отрицательная) определенность (полуопределенность) симметрической матрицы $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T \in R^{n \times n}$ обозначена через $\mathbf{P} > 0$ ($\mathbf{P} < 0$, $\mathbf{P} \geq 0$, $\mathbf{P} \leq 0$); наименьшее и наибольшее собственные числа симметрической матрицы $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ обозначены, как $\lambda_{\min}(\mathbf{P})$ и $\lambda_{\max}(\mathbf{P})$ соответственно; $diag\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ обозначает диагональную матрицу с элементами λ_i на главной диагонали.

Предварительные сведения и постановка задачи

Определения устойчивости

Рассмотрим систему в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}),\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \tag{1}$$

где $\mathbf{x} \in R^n$ – вектор состояния; $f \in R_+ \times R^n \to R^n$ – нелинейное непрерывное векторное поле, которое может быть разрывным по отношению к переменной состояния. Положим, что начало координат является положением равновесия системы (1).

Определение 1. Решение $x = 0$ системы (1) называется локально асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и выполняется условие $\lim\limits_{t\to\infty}\|x(t, t_0, x_0)\| = 0$ для любых $\mathbf{x}_0$, лежащих в достаточно малой окрестности нуля. Если данное условие выполняется для $\forall \mathbf{x}_0 \in R^n$, тогда система глобально асимптотически устойчива.

Определение 2 [1, 10]. Начало координат системы (1) является глобально финитно устойчивым, если выполняются следующие положения:

– система (1) финитно аттрактивна, т.е. существует такая функция $T : R^n \setminus \{0\} \to R_+$, что $\lim\limits_{t \to T(x_0)} x(t, x_0) = 0$ для всех $\mathbf{x}_0 \in R^n \setminus \{0\}$;

– система (1) устойчива по Ляпунову.

Функция времени установления T позволяет оценить время перехода в состояние равновесия.

Обобщенно однородные системы [11–13]

Введем вектор весов $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)^T$ и симметрическую матрицу $\mathbf{D}(\lambda) = diag\{\lambda^{r_i}\}_{i=1}^n$, где $r_i \in R_+$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $\lambda > 0$. Отметим, что $\mathbf{D}(\lambda)x = \left(\lambda^{r_1} x_1, \ldots, \lambda^{r_n} x_n\right)^T$ для $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in R^n$.

Определение 3 [12]. Функция $g : R^n \to R$ (векторное поле $f : R^n \to R^n$) называется обобщенно однородной со степенью m, если $g\left(\mathbf{D}(\lambda)\mathbf{x}\right) = \lambda^m g(\mathbf{x})$ $\left(f\left(\mathbf{D}(\lambda)\mathbf{x}\right) = \lambda^m \mathbf{D}(\lambda) f(\mathbf{x})\right)$ для всех $\lambda > 0$ и $\mathbf{x} \in R^n$.

Введем однородную норму $\|\mathbf{x}\|_r = \left(\sum\limits_{i=1}^n |x_i|^{\frac{\rho}{r_i}}\right)^{\frac{1}{\rho}}$, где $\rho \geq \max_i r_i$. Легко заметить, что однородная норма является обобщенно однородной со степенью 1.

Теорема 1 [13]. Пусть f – однородное непрерывное векторное поле на пространстве R^n, такое, что система (1) локально асимптотически устойчива. Тогда система (1) глобально асимптотически устойчива, и для нее существует однородная функция Ляпунова V.

Согласно определению однородности, для обобщенно однородной функции Ляпунова V со степенью однородности m существуют такие положительные константы c_1 и c_2, что выполняется следующее неравенство:

$$c_1 \|\mathbf{x}\|_r^m \leq V(x) \leq c_2 \|\mathbf{x}\|_r^m. \tag{2}$$

Метод неявной функции Ляпунова

Следующая теорема представляет метод неявной функции Ляпунова [14, 15], развитый для анализа финитной устойчивости.

Теорема 2 [9]. Если существует такая непрерывная функция $Q(V, \mathbf{x}) : R^{n+1} \to R$, что:

– $Q(V, \mathbf{x})$ непрерывно дифференцируема для $\forall \mathbf{x} \in R^n \setminus \{0\}$ и $\forall V \in R_+$;

– для любого $\forall \mathbf{x} \in R^n \setminus \{0\}$ существуют такие $V^- \in R_+$ и $V^+ \in R_+$, что $Q(V^-, \mathbf{x}) < 0 < Q(V^+, \mathbf{x})$;

– $\lim\limits_{\substack{\mathbf{x} \to 0 \\ (V,\mathbf{x}) \in \Omega}} V = 0$, $\lim\limits_{\substack{V \to 0^+ \\ (V,\mathbf{x}) \in \Omega}} \|\mathbf{x}\| = 0$, $\lim\limits_{\substack{\|\mathbf{x}\| \to \infty \\ (V,\mathbf{x}) \in \Omega}} V = +\infty$, где $\Omega = \{(V, \mathbf{x}) \in R^{n+1} : Q(V, \mathbf{x}) = 0\}$;

– неравенство $-\infty < \dfrac{\partial Q(V, \mathbf{x})}{\partial \ V} < 0$ выполняется для $\forall \mathbf{x} \in R^n \setminus \{0\}$ и $\forall V \in R_+$;

– неравенство $\dfrac{\partial Q(V, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \leq \eta V^{1-\mu} \dfrac{\partial Q(V, \mathbf{x})}{\partial V}$ выполняется для $\forall (V, \mathbf{x}) \in \Omega$ и некоторых констант $0 < \mu \leq 1$ и $\eta > 0$,

тогда начало координат системы (1) финитно глобально устойчиво с оценкой времени установления $T(\mathbf{x}_0) \leq \dfrac{V_0^\mu}{\eta\mu}$.

Основываясь на данном результате, в работе [9] был предложен финитный закон управления для системы, описывающей цепь интеграторов с внешними возмущениями и параметрическими неопределенностями:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u + \mathbf{d}(t, \mathbf{x}), \tag{3}$$

где $\mathbf{x} \in R^n$ – вектор состояния; $u \in R$ – управляющее воздействие; $\mathbf{d}(t, \mathbf{x})$ описывает неопределенности системы и внешние возмущения, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Введем неявно обозначенную функцию Ляпунова

$$Q(V,\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{D}(V^{-1})\mathbf{P}\mathbf{D}(V^{-1})\mathbf{x} - 1, \tag{4}$$

где $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T \in R^{n\times n}$ – симметрическая положительно определенная матрица, $\mathbf{D}(\lambda) = diag\{\lambda^{1+(n-i)\mu}\}_{i=1}^{n}$ – диагональная матрица, $\mu \in (0,1]$.

Теорема 3 [9]. Система (3) робастно финитно устойчива для некоторого возмущающего воздействия $\mathbf{d}(t,\mathbf{x})$, если выполняются следующие условия:

– разрешима система линейных матричных неравенств

$$\begin{cases} \mathbf{AX} + \mathbf{XA}^T + \mathbf{by} + \mathbf{y}^T\mathbf{b}^T + \alpha\mathbf{X} + \beta\mathbf{I}_n \le 0, \\ -\upsilon\mathbf{X} \le \mathbf{XH}_\mu + \mathbf{H}_\mu\mathbf{X} < 0, \quad \mathbf{X} > 0 \end{cases}$$

для $\mathbf{H}_\mu = diag\{-1-(n-1)\mu\}_{i=1}^{n}$, $\mu \in (0,1]$, $\upsilon,\alpha,\beta \in R_+ : \alpha > \beta$, $\mathbf{X} \in R^{n\times n}$, $\mathbf{y} \in R^{1\times n}$;

– управление выполнено в виде

$$u(V,\mathbf{x}) = V^{1-\mu}\mathbf{kD}\left(V^{-1}\right)\mathbf{x}, \tag{5}$$

где $V \in R_+ : Q(V,\mathbf{x}) = 0$ и функция $Q(V,\mathbf{x})$ представлена в виде (4) для $\mathbf{P} = \mathbf{X}^{-1}$, $\mathbf{k} = \mathbf{yP}$;

– функция $\mathbf{d}(t,\mathbf{x})$ удовлетворяет неравенству

$$V^{2\mu}\mathbf{d}^T(t,\mathbf{x})\mathbf{D}^2(V^{-1})\mathbf{d}(t,\mathbf{x}) \le \beta^2.$$

Оценка функции времени установления приведена в форме

$$T(\mathbf{x}_0) \le \frac{\upsilon V_0^\mu}{(\alpha-\beta)\mu}. \tag{6}$$

Однако практическая реализация данного алгоритма управления требует разработки специальной вычислительной процедуры для расчета неявно определенной функции Ляпунова в каждый момент времени, поскольку закон управления (5) зависит от значения функции Ляпунова в явном виде. Работы [6, 7] посвящены развитию данного результата и не требуют выполнения каких-либо дополнительных процедур.

Теорема 4 [6]. Если разрешима система линейных матричных неравенств

$$\begin{cases} \mathbf{AX} + \mathbf{XA}^T + \mathbf{by} + \mathbf{y}^T\mathbf{b}^T + \alpha\mathbf{X} + \beta\mathbf{I}_n \le 0, \\ -\upsilon\mathbf{X} \le \mathbf{XH}_\mu + \mathbf{H}_\mu\mathbf{X} < 0, \ \mathbf{X} > 0, \ \beta\mathbf{I}_n \ge \gamma\mathbf{X}, \\ \begin{pmatrix} \gamma & \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^T & \mathbf{X} \end{pmatrix} \ge 0, \ \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I}_n - \mathbf{H}(c) \\ \mathbf{I}_n - \mathbf{H}(c) & \beta\mathbf{I}_n \end{pmatrix} \ge 0 \end{cases}$$

для $\mathbf{H}_\mu = diag\{-1-(n-1)\mu\}_{i=1}^{n}$, $\mathbf{H}(\lambda) = diag\{\lambda^{(n+1-i)\mu}\}_{i=1}^{n}$, $\mu \in (0,1]$, $\alpha,\beta,\gamma,c \in R_+ : \alpha > \beta$, $\mathbf{X} \in R^{n\times n}$, $\mathbf{y} \in R^{1\times n}$ и существует такое c_u, которое удовлетворяет одному из неравенств –

$$\frac{c_1}{c} \ge c_u \ge c_2,$$

$$c_1 \ge c_u \ge \frac{c_2}{c},$$

где коэффициенты c_1 и c_2 удовлетворяют неравенству (2), тогда управление

$$u(\mathbf{x}) = \left(c_u\|\mathbf{x}\|_r\right)^{1-\mu}\mathbf{kD}\left(\left(c_u\|\mathbf{x}\|_r\right)^{-1}\right)\mathbf{x}, \tag{7}$$

где $\mathbf{k} = \mathbf{yX}^{-1}$, финитно стабилизирует систему (3) при $\mathbf{d}(t,\mathbf{x}) = 0$.

Оценка функции времени установления в соответствии с (6) приведена в форме

$$T(\mathbf{x}_0) \le \frac{\upsilon V_0^\mu}{(\alpha-\beta)\mu} \le \frac{\upsilon c_2\|\mathbf{x}\|_r^\mu}{(\alpha-\beta)\mu}.$$

Аналогичный результат для случая $\mathbf{d}(t,\mathbf{x}) \ne 0$ представлен в [7].

Постановка задачи

Приведем результаты численного моделирования для системы (3) третьего порядка ($n = 3$) для $d_1(t,\mathbf{x}) = d_2(t,\mathbf{x}) = 0$, $d_3(t,\mathbf{x}) = 0,2\sin(x_1^{0,8})$ и законов управления (5) и (7) соответственно. На рис. 1 и 2 представлены результаты моделирования при $\mu = 0,2$ для систем управления (3), (7) и (3), (5), синтезированных соответственно теореме 3 и теореме 4. Из результатов численного моделирования видно, что скорость сходимости для системы (3), (7) (рис. 1) может быть значительно меньше по сравнению с результатами работы [9] (рис. 2), что объясняется наложением дополнительных ограничений при синтезе регулятора (7).

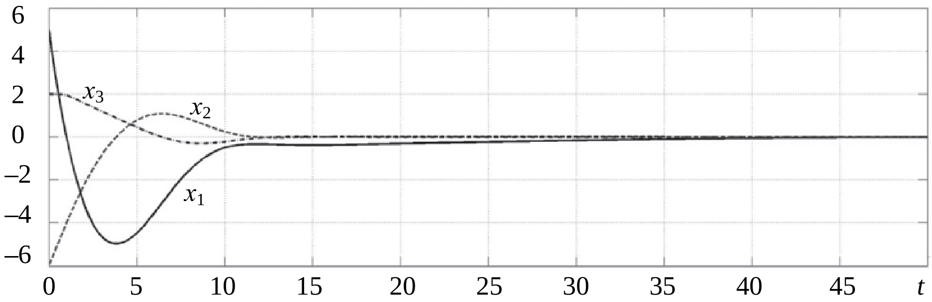

Рис. 1. Переходные процессы системы (3), (7) для $n = 3$ и $\mu = 0,2$

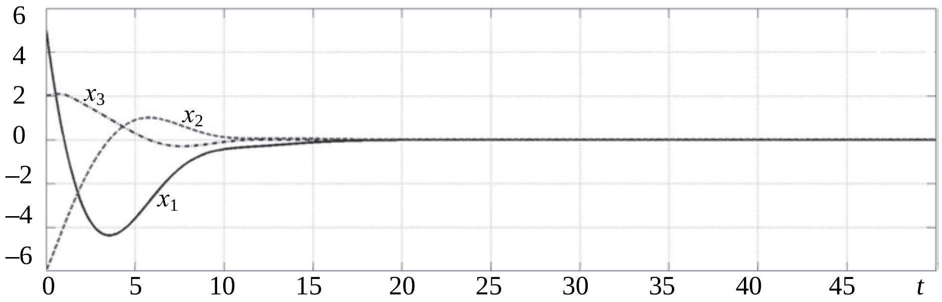

Рис. 2. Переходные процессы системы (3), (5) для $n = 3$ и $\mu = 0,2$

Основываясь на этом, в рамках данной работы была поставлена цель модифицировать алгоритм финитной стабилизации (7), позволяющий повысить скорость сходимости системы.

Увеличение скорости сходимости финитно устойчивой системы

Увеличению скорости сходимости финитно устойчивых систем посвящен ряд работ (см., например, [16, 17]). В данной работе сокращение времени переходных процессов замкнутой системы достигается с использованием сочетания метода неявной функции Ляпунова с теорией обобщенно однородных систем. Приведем алгоритм управления, основанный на (7), который позволяет увеличивать скорость схождения финитно устойчивой системы вида (3).

Лемма. Для параметра $\lambda \geq 1$ и диагональной матрицы $\mathbf{L} = diag\{\lambda^{1-i}\}_{i=1}^{n}$ алгоритм управления в виде

$$u_\lambda(\mathbf{x}) = \lambda^n \left(c\|\mathbf{Lx}\|_r\right)^{1-\mu} \mathbf{kD}\left(\left(c\|\mathbf{Lx}\|_r\right)^{-1}\right)\mathbf{Lx} \qquad (8)$$

стабилизирует систему (3), $\mathbf{d}(t,\mathbf{x}) = 0$ за конечное время с функцией времени установления, не превосходящей значения $T\dfrac{\overline{c}_2^{\mu}}{c_2^{\mu}\lambda}$, где T соответствует выражению (6), $\overline{c}_2$ аналогично выражениям (2) и (4) соответствует

$$\overline{c}_1\|\mathbf{x}\|_r \leq V_y(\mathbf{x}) \leq \overline{c}_2\|\mathbf{x}\|_r, \qquad (9)$$
$$Q(V_y,\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{D}(V_y^{-1})\overline{\mathbf{P}}\mathbf{D}(V_y^{-1})\mathbf{x} - 1,$$

где $V_y \in R_+ : Q(V_y,\mathbf{x}) = 0$, $\overline{\mathbf{P}} = \mathbf{LPL}$.

Доказательство. Рассмотрим систему (3) с законом управления в виде (8) для $\mathbf{d}(t,\mathbf{x}) = 0$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}u_\lambda(\mathbf{x}) =$$
$$= \mathbf{AL}^{-1}\mathbf{Lx} + \lambda^n\mathbf{b}\left(c\|\mathbf{Lx}\|_r\right)^{1-\mu}\mathbf{kD}\left(\left(c\|\mathbf{Lx}\|_r\right)^{-1}\right)\mathbf{Lx} = \quad ,$$
$$= \lambda\mathbf{L}^{-1}\mathbf{ALx} + \lambda\mathbf{L}^{-1}\mathbf{b}\left(c\|\mathbf{Lx}\|_r\right)^{1-\mu}\mathbf{kD}\left(\left(c\|\mathbf{Lx}\|_r\right)^{-1}\right)\mathbf{Lx},$$

тогда, обозначив $\mathbf{y} = \mathbf{Lx}$, получим

$$\dot{\mathbf{y}} = \lambda[\mathbf{Ay} + \mathbf{b}u(\mathbf{y})], \qquad (10)$$

где $u(\mathbf{y})$ представлен в форме (7). Система (10) финитно устойчива, так как ввиду обобщенной однородности системы можно получить $Y_\lambda(t,\mathbf{y}_0)=Y(\lambda t,\mathbf{y}_0)$, где $Y_\lambda(t,\mathbf{y}_0)$ является решением системы (10), $Y(\lambda t,\mathbf{y}_0)$ является решением системы $\dot{\mathbf{y}}=\mathbf{A}\mathbf{y}+\mathbf{b}u(\mathbf{y})$. Тогда функция установления системы (10), согласно выражению (6), ограничена выражением

$$T_y \le \frac{\upsilon V_{y0}^{\mu}}{(\alpha-\beta)\mu}\lambda^{-1},$$

где $V_{y0}=V_y(0)$, функция V_y неявно обозначена следующим алгебраическим выражением:

$$\mathbf{y}^T\mathbf{D}\left(V_y^{-1}\right)\mathbf{P}\mathbf{D}\left(V_y^{-1}\right)\mathbf{y}=1.$$

Таким образом, функция установления системы (3), (8) ограничена выражением

$$T_y \le \frac{\upsilon V_{y0}^{\mu}}{(\alpha-\beta)\mu}\lambda^{-1} \le \frac{\upsilon \overline{c}_2^{\mu}\left\|\mathbf{x}\right\|_r^{\mu}}{(\alpha-\beta)\mu}\lambda^{-1}=T\frac{\overline{c}_2^{\mu}}{c_2^{\mu}\lambda},$$

где $\overline{c}_2$ соответствует выражению (9).

Аналогичный результат можно получить и для случая $\mathbf{d}(t,\mathbf{x})\ne 0$, согласно [16].

Отметим, что параметры c_1, c_2, $\overline{c}_1$, $\overline{c}_2$ могут быть численно найдены на некоторой сетке, т.е. задается некоторая числовая сетка с заданным шагом, в узлах которой вычисляется значение параметров, а затем выбирается максимальное (минимальное) значение из всех вычисленных.

Для того чтобы сравнить полученный алгоритм с алгоритмом управления (7), было проведено компьютерное моделирование системы (3), (8) с такими же параметрами $\mathbf{P}$, $\mathbf{k}$, μ и $\mathbf{x}_0$, как и для примера, приведенного на рис. 1. На рис. 3 и 4 представлены результаты компьютерного моделирования для параметров $\lambda=2$ и $\lambda=4$ соответственно. Таким образом, скорость схождения системы к началу координат была увеличена в $\frac{c_2^{\mu}\lambda}{\overline{c}_2^{\mu}}=2,748$ раз при $\lambda=2$ и в $\frac{c_2^{\mu}\lambda}{\overline{c}_2^{\mu}}=5,496$ при $\lambda=4$.

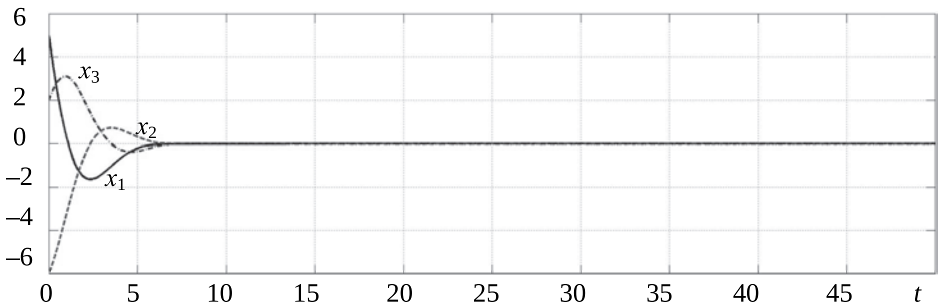

Рис. 3. Переходные процессы системы (3), (8) для $n=3$, $\mu=0,2$ и $\lambda=2$

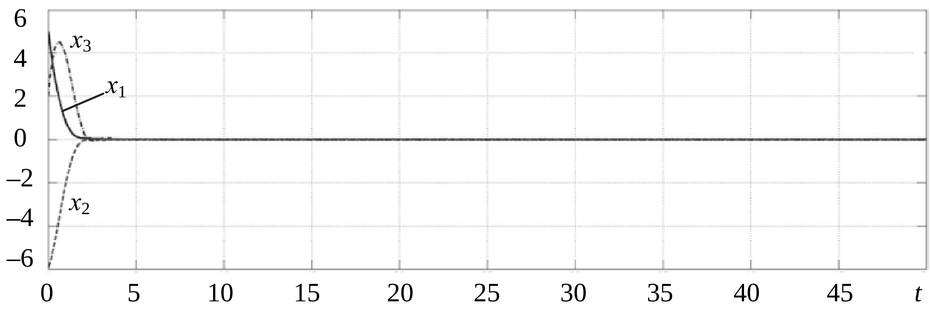

Рис. 4. Переходные процессы системы (3), (8) для $n=3$, $\mu=0,2$ и $\lambda=4$

Заключение

В работе представлен модифицированный алгоритм финитной стабилизации для системы вида (3), позволяющий уменьшить время завершения всех переходных процессов. Статья представляет развитие результатов работ [6, 7]. Полученный результат основан на сочетании метода неявной функции Ляпунова с теорией обобщенно однородных систем. Эффективность предложенного метода подтверждается результатами компьютерного моделирования.

Литература

1. Bhat S.P., Bernstein D.S. Finite-time stability of continuous autonomous systems // SIAM Journal of Control and Optimization. 2000. V. 38. N 3. P. 751–766. doi: 10.1137/s0363012997321358
2. Moulay E., Perruquetti W. Finite-time stability and stabilization: state of the art // Lecture Notes in Control and Information Sciences. 2006. V. 334. P. 23–41. doi: 10.1007/11612735_2
3. Orlov Y. Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems // SIAM Journal of Control and Optimization. 2004. V. 43. N 4. P. 1253–1271. doi: 10.1137/s0363012903425593
4. Haimo V.T. Finite time controllers // SIAM Journal of Control and Optimization. 1986. V. 24. N 4. P. 760–770. doi: 10.1137/0324047
5. Utkin V.I., Guldner J., Shi J. Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems. 2nd ed. CRC Press, 2009. 503 p.
6. Зименко К.А., Поляков А.Е., Ефимов Д.В., Кремлев А.С. Устойчивость системы последовательно соединенных интеграторов на конечном интервале времени // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2015. Т. 58. № 9. С. 681–686. doi: 10.17586/0021-3454-2015-58-9-681-686
7. Zimenko K.A., Polyakov A.E., Efimov D.V. Stabilization of chain of integrators with arbitrary order in finite-time // Proc. 54th IEEE Conf. on Decision and Control (CDC). 2016. P. 4637–4641. doi: 10.1109/cdc.2015.7402942
8. Polyakov A., Efimov D., Perruquetti W. Robust stabilization of MIMO systems in finite/fixed time // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2015. V. 26. N 1. P. 69–90. doi: 10.1002/rnc.3297
9. Polyakov A., Efimov D., Perruquetti W. Finite-time and fixed-time stabilization: implicit Lyapunov function approach // Automatica. 2015. V. 51. P. 332–340. doi: 10.1016/j.automatica.2014.10.082
10. Roxin E. On finite stability in control systems // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 1966. V. 15. N 3. P. 273–282. doi: 10.1007/bf02844106
11. Зубов В.И. Методы А.М. Ляпунова и их применение. Л.: ЛГУ, 1957. 242 с.
12. Зубов В.И. О системах обыкновенных дифференциальных уравнений с обобщенно-однородными правыми частями // Известия вузов. Математика. 1958. № 1. С. 80–88.
13. Bacciotti A., Rosier L. Lyapunov Functions and Stability in Control Theory. Springer, 2005. 236 p.
14. Коробов В.И. Решение задачи синтеза с помощью функции управляемости // Доклады АН СССР. 1979. Т. 248. № 5. С. 1051–1055.
15. Adamy J., Flemming A. Soft variable-structure controls: a survey // Automatica. 2004. V. 40. N 11. P. 1821–1844. doi: 10.1016/j.automatica.2004.05.017
16. Levant A., Dvir Y. Accelerated high-order MIMO sliding mode control // Proc. 13th Int. Workshop on Variable Structure Systems. 2014. P. 4753–6. doi: 10.1109/vss.2014.6881095
17. Efimov D., Levant A., Polyakov A., Perruquetti W. Supervisory acceleration of convergence for homogeneous systems // International Journal of Control. 2017. P. 1–11.

References

1. Bhat S.P., Bernstein D.S. Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 2000, vol. 38, no. 3, pp. 751–766. doi: 10.1137/s0363012997321358
2. Moulay E., Perruquetti W. Finite-time stability and stabilization: state of the art. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 2006, vol. 334, pp. 23–41. doi: 10.1007/11612735_2
3. Orlov Y. Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 2004, vol. 43, no. 4, pp. 1253–1271. doi: 10.1137/s0363012903425593
4. Haimo V.T. Finite time controllers. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 1986, vol. 24, no. 4, pp. 760–770. doi: 10.1137/0324047
5. Utkin V.I., Guldner J., Shi J. *Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems*. 2nd ed. CRC Press, 2009, 503 p.
6. Zimenko K.A., Polyakov A.E., Efimov D.V., Kremlev A.S. Finite-time stability of system of series-connected integrators. *Journal of Instrument Engineering*, 2015, vol. 58, no. 9, pp. 681–686. (In Russian) doi: 10.17586/0021-3454-2015-58-9-681-686
7. Zimenko K.A., Polyakov A.E., Efimov D.V. Stabilization of chain of integrators with arbitrary order in finite-time. *Proc. 54th IEEE Conf. on Decision and Control, CDC*, 2016, pp. 4637–4641. doi: 10.1109/cdc.2015.7402942
8. Polyakov A., Efimov D., Perruquetti W. Robust stabilization of MIMO systems in finite/fixed time. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2015, vol. 26, no. 1, pp. 69–90. doi: 10.1002/rnc.3297
9. Polyakov A., Efimov D., Perruquetti W. Finite-time and fixed-time stabilization: implicit Lyapunov function approach. *Automatica*, 2015, vol. 51, pp. 332–340. doi: 10.1016/j.automatica.2014.10.082
10. Roxin E. On finite stability in control systems. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1966, vol. 15, no. 3, pp. 273–282. doi: 10.1007/bf02844106
11. Zubov V.I. *A.M. Lyapunov Methods and Their Application*. Leningrad, LSU Publ., 1957, 242 p. (In Russian)
12. Zubov V.I. On systems of ordinary differential equations with generalized-homogeneous right-hand sides. *Izvestiya Vuzov. Matematika*, 1958, no. 1, pp. 80–88. (In Russian)
13. Bacciotti A., Rosier L. *Lyapunov Functions and Stability in Control Theory*. Springer, 2005, 236 p.
14. Korobov V.I. Solution of the synthesis problem using the controllability function. *Doklady AN SSSR*, 1979, vol. 248, no. 5, pp. 1051–1055. (In Russian)
15. Adamy J., Flemming A. Soft variable-structure controls: a survey. *Automatica*, 2004, vol. 40, no. 11, pp. 1821–1844. doi: 10.1016/j.automatica.2004.05.017
16. Levant A., Dvir Y. Accelerated high-order MIMO sliding mode control. *Proc. 13th Int. Workshop on Variable Structure Systems*, 2014, pp. 4753–6. doi: 10.1109/vss.2014.6881095
17. Efimov D., Levant A., Polyakov A., Perruquetti W. Supervisory acceleration of convergence for homogeneous systems. *International Journal of Control*, 2017, pp. 1–11.

Авторы

Зименко Константин Александрович – аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, kostyazimenko@gmail.com

Поляков Андрей Евгеньевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация; научный сотрудник первого класса, Государственный институт исследований в информатике и автоматике, Лилль, 59650, Франция, andrey.polyakov@inria.fr

Authors

Konstantin A. Zimenko – postgraduate, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, kostyazimenko@gmail.com

Andrey E. Polyakov – PhD, Senior Researcher, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation; Researcher, Institut national de rechercheeninformatique et enautomatique, Lille, 59650, France, andrey.polyakov@inria.fr