

УДК 519.6:621.396

МАТРИЧНО-ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ТОМОГРАФИЧЕСКОМ СКАНИРОВАНИИ ПРОСТРАНСТВА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАДИОЛОКАЦИОННОЙ СТАНЦИИ

М.В. Самойленко^а

^а Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, 125080, Российская Федерация

Адрес для переписки: Samoi.Mar@mail.ru

Информация о статье

Поступила в редакцию 26.02.18, принята к печати 28.03.18

doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-3-437-446

Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Самойленко М.В. Матрично-итерационный метод решения системы линейных уравнений и его применение в томографическом сканировании пространства с использованием радиолокационной станции // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2018. Т. 18. № 3. С. 437–446. doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-3-437-446

Аннотация

Предложен новый метод решения системы линейных алгебраических уравнений, названный матрично-итерационным. Метод получен при анализе решения задачи томографического сканирования пространства и является одним из методов многоканальной томографии, которую разрабатывает автор. Практически все методы многоканальной томографии сводятся к восстановлению искомого распределения некоторой физической величины с помощью решения системы линейных алгебраических уравнений, часто недоопределенной. Искомое распределение представляется вектором-оригиналом. В томографическом сканировании восстанавливается распределение мощностей точечных источников излучения по сектору обзора. Эта задача диктует определенные априорные данные, которые позволили разработать новый метод решения системы линейных уравнений: большинство компонент искомого вектора равны фоновому значению, например нулевому, а большие значения представляют собой δ -образные разреженные выбросы. Получающееся в рассматриваемой задаче векторно-матричное уравнение, идентичное системе уравнений, является недоопределенным и часто включает матрицу неполного ранга или плохо обусловленную матрицу. В отличие от известных методов решения такого уравнения при частичной априорной информации о восстанавливаемом векторе, матрично-итерационный метод не предполагает никакого его преобразования, предшествующего решению. Этот метод прост в реализации и не содержит таких неоднозначных величин, как, например, параметр регуляризации. По сути своей – это программный метод, достаточно просто реализуемый. Альтернативным вариантом решения системы уравнений без предварительного ее преобразования является метод псевдообращения, для реализации которого априорная информация вообще не нужна и который дает либо решение с минимальной нормой (если система совместна), либо решение, обеспечивающее минимальное квадратическое отклонение. Этот метод послужил основой матрично-итерационного метода, являясь, в частности, первой его итерацией. На последующих итерациях из матрицы системы исключаются столбцы, соответствующие тем значениям решения, получившегося на предыдущей итерации, которые выявляются как фоновые. Повторяется процесс псевдообратных решений с изменяющейся матрицей до тех пор, пока все получившиеся значения не окажутся превышающими фоновый уровень. Матрично-итерационный метод позволяет получить практически точное решение в случае, если вектор-оригинал входит в бесчисленное множество решений системы уравнений. Если же вектор-оригинал, из-за отклонений параметров задачи, не входит в число решений, то и в этом случае матрично-итерационный метод дает достаточно хороший результат, что позволяет говорить о его устойчивости.

Ключевые слова

многоканальная томография, матрично-итерационный метод, томографическое сканирование пространства, недоопределенная СЛАУ, коэффициент обусловленности матрицы

MATRIX-ITERATIVE SOLUTION METHOD FOR SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS AND ITS APPLICATION IN SPACE TOMOGRAPHY SCANNING USING RADAR

M.V. Samoilenko^a

^a Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125080, Russian Federation
Corresponding author: Samoi.Mar@mail.ru

Article info

Received 26.02.18, accepted 28.03.18

doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-3-437-446

Article in Russian

For citation: Samoilenko M.V. Matrix-iterative solution method for system of linear equations and its application in space tomography scanning using radar. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2018, vol. 18, no. 3, pp. 437–446 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-3-437-446

Abstract

A new solution method for a system of linear algebraic equations (SLAE), called matrix-iterative, is proposed. The method was obtained while analyzing the problem of space tomography scanning – one of the methods of multichannel tomography, which is being developed by the author. Practically all the methods of multichannel tomography are reduced to the restoration of the searched distribution of certain physical quantity by solving a SLAE, which is often underdetermined. The searched distribution is represented by vector-original. In tomography scanning the point sources power distribution over the area review sector is restored. The task determines certain a priori data, which made it possible to develop a new method of solving a SLAE: the most components of a searched vector are equal to the background value, for example, zero, and exceeding values represent the δ -shaped rare values. The resulting vector-matrix equation in the considered problem, identical to SLAE, is underdetermined and often includes a matrix of incomplete rank or badly conditioned matrix. In contrast to the known methods of solving SLAE with partial a priori information about the restored vector, the matrix-iterative method implies no transformation of the original equation preceding the solution. The method is simple in implementation and contains no such ambiguous quantities as, for example, the regularization parameter. In essence, this is a software method quite easy to be realized. The alternative possibility to solve the SLAE without its preliminary transformations is the pseudo-inverse method, which needs no a priori information and gives either the solution with minimum norm (if it is the joint system), or the solution providing a minimum quadratic deviation. This method has served as a basis for matrix-iterative method, being, in particular, its first iteration. On the following iterations the columns are excluded from the system matrix, the ones corresponding to those values of the solution on the previous iteration, that had been identified as the background. The process of pseudo-inverse solutions with changing matrix is being repeated until all the results are more than the background value. The matrix-iterative method makes it possible to receive practically exact solution if vector-original comes in countless solutions of SLAE. If the vector-original is not included in the number of solutions of SLAE, because of the deviations of the task parameters, then, in this case, the method gives a fairly good result, confirming its stability.

Keywords

multichannel tomography, matrix-iterative method, space tomography scanning, underdetermined SLAE, matrix conditioning coefficient

Введение

В 1990-х годах д.т.н., профессор Виталий Иванович Самойленко предложил и начал применять томографический подход в обработке сигналов. В [1] этот подход назван многоканальной томографией. Такое название позволяет подчеркнуть его специфику по сравнению с другими приложениями классической томографии.

К настоящему времени автором статьи разработаны 14 томографических методов решения задач в областях локации, антенных решеток, спектрального анализа, линейных систем, обработки изображений. В большинстве этих методов заключительным этапом восстановления искомым величин является решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), как правило, недоопределенных и часто плохо обусловленных.

При работе над одним из методов многоканальной томографии – томографическим сканированием пространства для определения угловых положений точечных источников, находящихся в секторе обзора [2], – был разработан новый метод решения СЛАУ, который, в силу его специфики, будем называть матрично-итерационным. Этот метод показал хорошие результаты при восстановлении распределения мощностей источников излучения по направлениям в секторе обзора, представленного в виде вектора-оригинала f . Вектор-оригинал восстанавливался путем решения недоопределенной СЛАУ, в том числе – с матрицей неполного ранга. Решение таких СЛАУ представляет определенные трудности.

Во-первых, недоопределенная совместная СЛАУ имеет бесчисленное множество решений, и при разработке метода ставилась задача выделить то из них, которое в наибольшей степени соответствует характеру задачи. Во-вторых, плохая обусловленность матрицы системы может приводить к значительным ошибкам при незначительных отклонениях в исходных данных. Разработанный метод показал хороший результат в обоих случаях, что продемонстрировано далее на компьютерных экспериментах.

Матрично-итерационный метод относится к методам решения СЛАУ при частичной априорной информации об искомом векторе. В [3] говорится об общем принципе использования такой информации при решении недоопределенных СЛАУ. Принцип этот заключается в дополнении системы уравнений слагаемыми, учитывающими априорную информацию.

Известны различные варианты сглаживающей регуляризации Тихонова–Филлипса [4–6], в которых определенным образом изменяется матрица системы уравнений и вводится параметр регуляризации. В [7] такая задача решается при априорной информации о неотрицательности восстанавливаемого вектора. Заметим, что в нашем случае решается в определенном смысле противоположная задача: при сканировании свободного пространства с точечными источниками в секторе обзора должно получаться распределение в виде δ -образных выбросов на нулевом (или ненулевом) фоне, поэтому сглаживание, применяемое в методах регуляризации, в этом случае неуместно.

Другим направлением в решении СЛАУ с априорной информацией является регуляризация при статистической информации об искомом распределении [8–10].

Сложность реализации перечисленных методов связана с выбором параметра регуляризации, который обеспечивал бы одновременно и уменьшение коэффициента обусловленности матрицы системы (КОМ) и близость получаемого решения к истинному распределению \mathbf{f} . При стохастической регуляризации возникают дополнительные трудности с математическим представлением вероятностных характеристик и статистическим моделированием.

Еще одним направлением регуляризации при априорной информации являются дескриптивные алгоритмы [11–13]. В этих методах тоже применяется преобразование исходной СЛАУ, например, к виду функционала, решение ищется как обеспечивающее его экстремум.

Настоящая работа посвящена представлению нового, матрично-итерационного метода решения СЛАУ. Предлагаемый матрично-итерационный метод не требует предварительных преобразований исходной СЛАУ, по сути своей он является программным, достаточно прост в реализации и позволяет получать решения с δ -образными выбросами на известном фоне.

Постановка задачи

Запишем недоопределенную СЛАУ в векторно-матричном виде

$$\mathbf{p} = \mathbf{W}^T \mathbf{f}, \quad (1)$$

где \mathbf{p} – известный вектор размером $K \times 1$ (вектор-отображение в томографических терминах); \mathbf{W}^T – известная матрица (матрица отображения) размером $K \times N$; \mathbf{f} – искомый вектор (вектор-оригинал) размером $N \times 1$, $K < N$; индекс T обозначает транспонирование.

Априорная информация содержится в известном значении большей части компонент вектора \mathbf{f} (уровне фона). Превышающие фоновый уровень значения представляют собой разреженные выбросы.

Для большей ясности обратимся к физической интерпретации входящих в (1) величин. Воспользуемся для этого задачей томографического сканирования, для которой и был разработан матрично-итерационный метод. Вектор \mathbf{f} в этой задаче представляет собой дискретизированное распределение мощностей излучения источников по контролируемому сектору обзора. При этом логично предположить, что количество фоновых компонент преобладает, а число компонент, имеющих большее значение и соответствующее числу источников в секторе обзора, незначительно, положение этих компонент разрежено. Заметим, что фоном могут быть нулевые значения: такая ситуация возникает, например, при сканировании пространства, не имеющего собственного излучения.

Вектор \mathbf{p} в (1) объединяет измеренные значения, \mathbf{W}^T определяется условиями измерений. Восстанавливаемый из уравнения (1) вектор будем обозначать как $\mathbf{f}_{\text{вос}}$; он может отличаться от истинного распределения мощностей источников по сектору обзора.

Ставится задача найти решение уравнения (1) $\mathbf{f}_{\text{вос}}$, наиболее близкое к истинному вектору-оригиналу, используя при решении описанную выше априорную информацию об искомом распределении.

Анализ задачи. Недоопределенная СЛАУ может не иметь решения или иметь бесчисленное множество решений. Условием существования решений является выполнение равенства

$$\mathbf{W}^T (\mathbf{W}^T)^+ \mathbf{p} = \mathbf{p}, \quad (2)$$

где индекс $+$ обозначает псевдообратную матрицу. Если условие (2) выполнено, то бесчисленное множество решений уравнения (1) определяется выражением

$$\mathbf{f}_{\text{вос}} = (\mathbf{W}^T)^+ \mathbf{p} + \left[\mathbf{I} - (\mathbf{W}^T)^+ \mathbf{W}^T \right] \mathbf{z},$$

где \mathbf{I} – единичная матрица; \mathbf{z} – произвольный вектор размером $N \times 1$.

В отсутствии априорной информации обычно ищут решение с минимальной нормой, которое определяется выражением [14]

$$\mathbf{f}_{\text{вос}} = (\mathbf{W}^T)^+ \mathbf{p}. \quad (3)$$

Это решение методом псевдообращения. Оно может оказаться (и оказывается, как это будет видно в компьютерных экспериментах) лишь отдаленно схожим с истинным вектором-оригиналом. Разработанный в процессе анализа томографического сканирования матрично-итерационный метод позволяет исправить ситуацию, выявив другое решение, с большей нормой, чем решение (3), зато в большей степени соответствующее решаемой задаче. И при этом не требуется ни подбирать параметр регуляризации, ни выявлять статистические особенности искомого вектора, ни модифицировать тем или иным образом исходное уравнение (1).

Матрично-итерационный метод. Возьмем за основу решение методом псевдообращения (3). Однако результат будем рассматривать не как окончательное решение, а как первую его итерацию:

$$\mathbf{f}_{\text{вос}}^{(1)} = (\mathbf{W}^T)^+ \mathbf{p}.$$

Метод псевдообращения дает решение в форме колебательной функции, поэтому часть полученных значений компонент вектора $\mathbf{f}_{\text{вос}}^{(1)}$ выйдет за априори известный нижний уровень Φ . Из условия задачи известно, что таких значений в истинном векторе-оригинале нет. Поэтому естественно предположить, что вышедшие за уровень Φ значения в действительности равны Φ .

Заметим, что в общем случае можно ввести дополнительную величину – порог Π , близкий к Φ , но учитывающий дополнительно известную информацию, если таковая имеется. Будем для общности полагать, что выбран каким-либо образом порог Π , который, в принципе, может быть равным Φ .

Найдем все компоненты $\mathbf{f}_{\text{вос}}^{(1)}$, имеющие значение $f_{\text{вос}i}^{(1)} < \Pi$, и приравняем их к априори известному уровню Φ . Обозначим номера найденных компонент как $n_1, n_2, \dots, n_{M^{(1)}}$, где $M^{(1)}$ – их количество в векторе $\mathbf{f}_{\text{вос}}^{(1)}$.

Обратимся теперь к уравнению (1) и перепишем его в виде

$$\mathbf{p} = \mathbf{W}^T \mathbf{f} = \mathbf{v}_1 f_1 + \mathbf{v}_2 f_2 + \dots + \mathbf{v}_N f_N, \quad (4)$$

где \mathbf{v}_i – i -й столбец матрицы \mathbf{W}^T ; f_i – i -я компонента вектора \mathbf{f} . В правой части (4) на место выявленных компонент $f_{n_1}, f_{n_2}, \dots, f_{n_{M^{(1)}}}$ подставим значения Φ и перенесем соответствующие слагаемые векторы из правой части в левую. При этом вектор-отображение \mathbf{p} изменится:

$$\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{p} - \Phi (\mathbf{v}_{n_1} + \mathbf{v}_{n_2} + \dots + \mathbf{v}_{n_{M^{(1)}}}),$$

где $\mathbf{p}^{(2)}$ – вектор-отображение для второй итерации.

В правой части (4) слагаемых векторов станет на $M^{(1)}$ меньше. Исключим столбцы $\mathbf{v}_{n_1}, \mathbf{v}_{n_2}, \dots, \mathbf{v}_{n_{M^{(1)}}}$ из матрицы \mathbf{W}^T . Получившуюся матрицу размером $K \times (N - M^{(1)})$ обозначим как $\mathbf{W}^{T(2)}$. Соответственно и размер вектора $\mathbf{f}^{(2)}$, представляющий собой искомым вектор во второй итерации, будет иметь размер $(N - M^{(1)}) \times 1$. Такой размер получится после исключения из вектора \mathbf{f} компонент $f_{n_1}, f_{n_2}, \dots, f_{n_{M^{(1)}}}$, которые уже определены как равные Φ . В итоге на второй итерации получаем уравнение $\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{W}^{T(2)} \mathbf{f}^{(2)}$. Это уравнение снова решаем методом псевдообращения: $\mathbf{f}_{\text{вос}}^{(2)} = (\mathbf{W}^{T(2)})^+ \mathbf{p}^{(2)}$. Снова, теперь уже в векторе $\mathbf{f}_{\text{вос}}^{(2)}$, находим компоненты, меньшие порогового значения, и повторяем описанные выше процедуры с векторами $\mathbf{p}^{(2)}, \mathbf{f}^{(2)}$ и матрицей $\mathbf{W}^{T(2)}$.

Итерационную вычислительную процедуру

$$\mathbf{f}_{\text{вос}}^{(i)} = (\mathbf{W}^{T(i)})^+ \mathbf{p}^{(i)} \quad (5)$$

повторяем до тех пор, пока не окажется, что в решении (5) нет компонент, меньших Π , т.е. $M^{(j)} = 0$, где J – число итераций восстановления вектора-оригинала \mathbf{f} .

Полученный на последней итерации вектор $\mathbf{f}_{\text{вос}}^{(j)}$ будет меньшего размера, чем вектор-оригинал \mathbf{f} . Для получения окончательного решения $\mathbf{f}_{\text{вос}}$ необходимо восстановить на нужных местах определенные ранее компоненты, равные Φ . Это сделать не сложно, так как все компоненты, кроме определенных на последней итерации, равны Φ , необходимо только аккуратно отслеживать номера остающихся в $\mathbf{f}_{\text{вос}}^{(i)}$ компонент на каждой итерации.

На этом завершается работа матрично-итерационного метода решения СЛАУ вида (1). Название метода связано с тем, что на каждой итерации изменяется матрица системы \mathbf{W}^T за счет исключения из нее столбцов, соответствующих приравненным к Φ компонентам полученного на предыдущей итерации вектора решений.

Смысловая составляющая предлагаемого метода следующая. На i -ой итерации размер матрицы $\mathbf{W}^{T(i)}$ равен $K \times [N - (M^{(1)} + M^{(2)} + \dots + M^{(i)})]$. Если окажется, что

$$M^{(1)} + M^{(2)} + \dots + M^{(i)} > N - K, \quad (6)$$

то на этой итерации мы получим вместо недоопределенной системы, с которой начинались итерации, переопределенную СЛАУ. Эта система уже будет иметь не бесконечное множество, а единственное решение при выполнении условия [15]

$$\text{rank } \mathbf{W}^{T(i)} = N - (M^{(1)} + M^{(2)} + \dots + M^{(i)}). \quad (7)$$

И если приравненные Φ на предыдущих итерациях компоненты вектора \mathbf{f} выделены верно, то это единственное решение обеспечит точное восстановление вектора-оригинала: $\mathbf{f}_{\text{вос}} = \mathbf{f}$, если только это решение входит во множество решений СЛАУ (1).

Конечно, в общем случае выполнение условия (6) не гарантировано, для этого необходимо, чтобы число «фоновых» компонент было достаточно большим, превышающим значение $N - K$. С другой стороны, именно такую задачу мы и рассматриваем, ориентируясь на томографическое сканирование пространства. Нет также гарантии, что верно были выделены компоненты, равные Φ . Наконец, матрица $\mathbf{W}^{T(i)}$ может иметь неполный ранг, так что равенство (7) не будет выполняться. Однако возможность удачного стечения обстоятельств есть. И при ее реализации мы получим либо точное решение (если истинный вектор-оригинал входит во множество решением СЛАУ), либо близкое к нему.

Применение в томографическом сканировании

Промоделируем в среде MATLAB решение задачи томографического сканирования с использованием матрично-итерационного метода решения СЛАУ (1).

Условия моделирования примем следующие. Сектор обзора лежит в одной плоскости и ограничен углами от -30° до $+30^\circ$. Принимается излучение линейной 10-элементной фазированной антенной решеткой (ФАР). Число измерений выберем $K = 20$, сектор обзора разобьем на $N = 70$ элементов разрешения (ЭР). Излучение принимается на длине волны $\lambda = 5$ см, межэлементное расстояние ФАР составляет $\lambda/2$. Этих данных достаточно для формирования матрицы отображения \mathbf{W}^T . Ее размер равен

$$\dim \mathbf{W}^T = 20 \times 70,$$

т.е. СЛАУ (1) является недоопределенной. Матрица \mathbf{W}^T имеет неполный ранг:

$$\text{rank } \mathbf{W}^T = 19.$$

Коэффициент обусловленности матрицы стремится к бесконечности:

$$\text{КОМ } \mathbf{W}^T = \text{cond}(\mathbf{W}^T) = 7,2182 \cdot 10^{15}.$$

Фоновое излучение положим равным нулю, таким же выберем порог: $\Phi = \Pi = 0$.

В секторе обзора находятся шесть точечных источников излучения. В первом эксперименте угловые положения источников выберем совпадающими с центрами ЭР: $\theta_1 = -24,7826^\circ$, $\theta_2 = -17,8261^\circ$, $\theta_3 = -4,7826^\circ$, $\theta_4 = -0,4348^\circ$, $\theta_5 = 11,7391^\circ$, $\theta_6 = 14,3478^\circ$. Мощности источников равны 2, 1, 4, 3, 5 и 6 (единиц мощности) соответственно. На рис. 1, а, приведено истинное распределение мощностей источников по направлениям, а на рис. 1, б, – результат классического сканирования сектора обзора лучом ФАР.

Задача томографического сканирования – восстановить вектор-оригинал \mathbf{f} , приведенный на рис. 1, а. Для этого проведем намеченные 20 измерений мощности при разных направлениях оси диаграммы направленности (ДН) антенны. На рис. 2 показаны измеренные значения выходной мощности ФАР при соответствующих направлениях оси ДН. Эти измерения составляют вектор-отображение \mathbf{p} , а коэффициенты усиления антенны по мощности в направлении всех ЭР при каждом направлении ДН формируют матрицу отображения \mathbf{W}^T . Теперь известны все необходимые данные для восстановления вектора-оригинала путем решения уравнения (1).

Проверим условие (2) существования решений уравнения (1). Для простоты анализа введем скалярный аналог этого условия:

$$R = \left[\left(\mathbf{W}^T (\mathbf{W}^T)^+ \mathbf{p} - \mathbf{p} \right)^T \left(\mathbf{W}^T (\mathbf{W}^T)^+ \mathbf{p} - \mathbf{p} \right) \right]^{1/2}.$$

Если решения существуют, то $R=0$, что явствует из (2). В рассматриваемом эксперименте $R=1,4641 \cdot 10^{-12}$, что близко к нулю. Следовательно, уравнение (1) имеет бесчисленное множество решений. При указанных выше положениях источников истинное распределение мощностей по ЭР входит в это множество. Чтобы убедиться в этом, подставим истинный \mathbf{f} в выражение $\Delta_{\text{ист}} = \left[\left(\mathbf{W}^T \mathbf{f} - \mathbf{p} \right)^T \left(\mathbf{W}^T \mathbf{f} - \mathbf{p} \right) \right]^{1/2}$. Если \mathbf{f} является решением, то $\Delta_{\text{ист}} = 0$. Программное вычисление дает значение $\Delta_{\text{ист}} = 5,8593 \cdot 10^{-14}$, т.е. практически ноль.

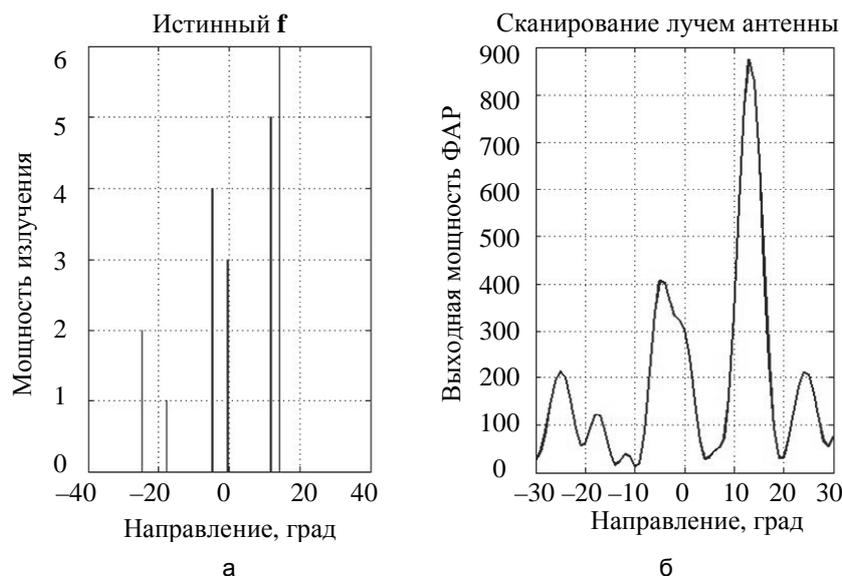


Рис. 1. Истинное распределение мощностей источников по направлениям (а) и сканирование сектора обзора лучем антенны (б)

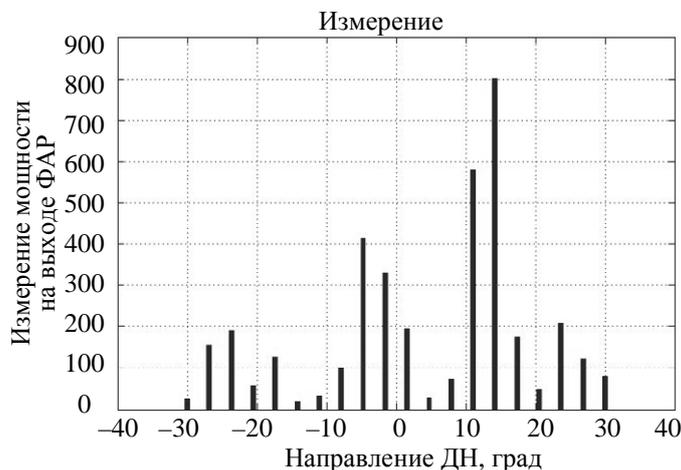


Рис. 2. Измеренная мощность на выходе антенны при разных направлениях оси ее диаграммы направленности

На рис. 3 показаны результаты восстановления распределения мощностей источников по ЭР путем решения уравнения (1) псевдообратным методом и матрично-итерационным методом. Тонкими линиями показано истинное распределение мощностей источников.

Сравнив рис. 3, а, с рис. 1, б, можно заметить, что третий и четвертый источники, которые при сканировании лучем антенны не разрешались, при восстановлении методом псевдообращения разрешаются. Однако разрешение пятого и шестого источников по-прежнему не достигается. Оценки мощностей источников, которые можно сделать по максимумам восстановленного распределения, представленного

на рис. 3, а, весьма далеки от истинных значений. Полученное методом псевдообращения распределение, которое обозначим как $\mathbf{f}_{\text{вос}}^{\text{пс}}$, является решением уравнения (1):

$$\Delta_{\text{пс}} = \left[(\mathbf{W}^T \mathbf{f}_{\text{вос}}^{\text{пс}} - \mathbf{p})^T (\mathbf{W}^T \mathbf{f}_{\text{вос}}^{\text{пс}} - \mathbf{p}) \right]^{1/2} = 1,4935 \cdot 10^{-12}.$$

Это одно из бесчисленного множества решений, которое имеет минимальную норму $\|\mathbf{f}_{\text{вос}}^{\text{пс}}\| = 5,3265$.

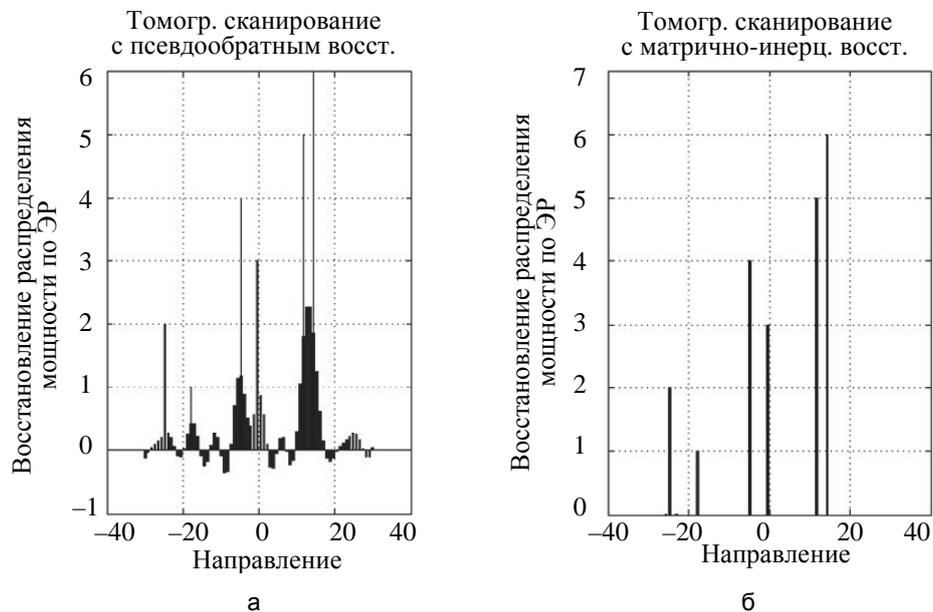


Рис. 3. Восстановленный вектор-оригинал: методом псевдообращения (а); матрично-итерационным методом (б)

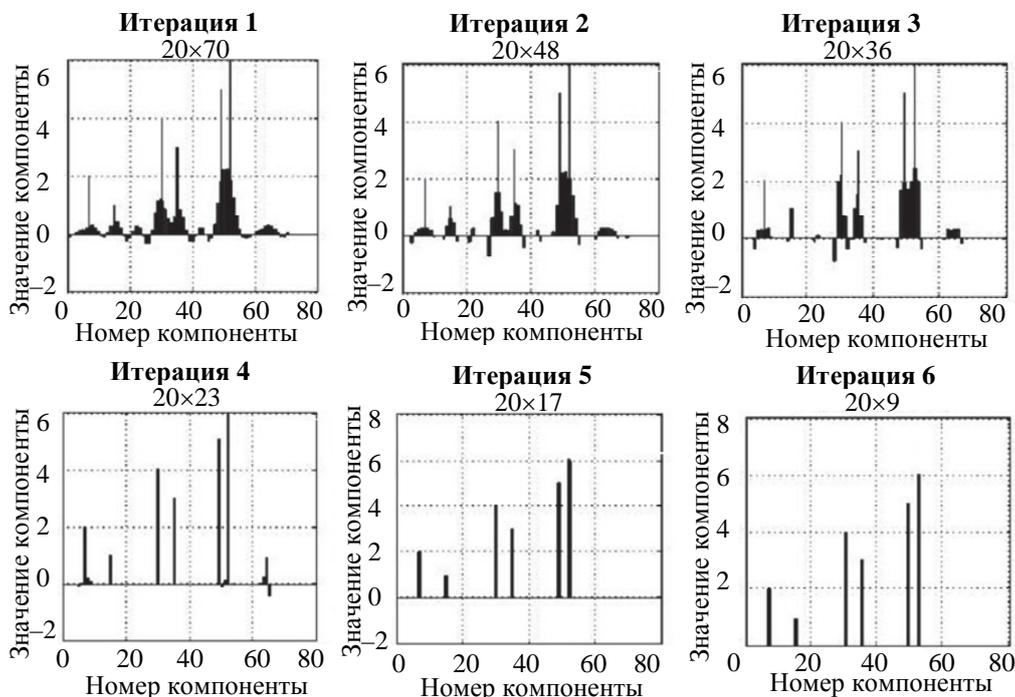


Рис. 4. Итерации реализации матрично-итерационного метода решения уравнения (1) в задаче томографического сканирования

Матрично-итерационный метод позволяет улучшить результат. Полученное этим методом восстановленное распределение обозначим как $\mathbf{f}_{\text{вос}}^{\text{ми}}$. Как видно из рис. 3, б, оно совпало с истинным распреде-

лением мощностей источников по ЭР. Как и решение $\mathbf{f}_{\text{вос}}^{\text{пс}}$, восстановленное распределение $\mathbf{f}_{\text{вос}}^{\text{ми}}$ является решением уравнения (1):

$$\Delta_{\text{ми}} = \left[(\mathbf{W}^T \mathbf{f}_{\text{вос}}^{\text{ми}} - \mathbf{p})^T (\mathbf{W}^T \mathbf{f}_{\text{вос}}^{\text{ми}} - \mathbf{p}) \right]^{1/2} = 8,3610 \cdot 10^{-13}.$$

Это решение с большей нормой, чем решение методом псевдообращения: $\|\mathbf{f}_{\text{вос}}^{\text{ми}}\| = 9,5394$. Но степень совпадения получившегося матрично-итерационным методом решения с истинным распределением \mathbf{f} очень высока:

$$\left[(\mathbf{f} - \mathbf{f}_{\text{вос}}^{\text{ми}})^T (\mathbf{f} - \mathbf{f}_{\text{вос}}^{\text{ми}}) \right]^{1/2} = 1,0071 \cdot 10^{-14}.$$

На рис. 4 приведены все последовательные итерации процесса восстановления вектора-оригинала матрично-итерационным методом. Тонкими линиями показаны значения истинных компонент \mathbf{f} .

Конечно, на итерациях, начиная со второй, решения представляют собой векторы все меньших и меньших размеров. Но для иллюстрации процесса решения на каждой итерации сделано восстановление полного вектора путем включения в него ранее определенных нулевых компонент. Для каждой итерации дополнительно указан размер матрицы отображения. Как видно, на пятой и шестой итерациях СЛАУ уже переопределена, в результате получилось точное восстановление вектора-оригинала. Но такой результат получается только в случае, если истинный вектор-оригинал \mathbf{f} является одним из бесчисленного множества решений уравнения (1).

Во втором эксперименте рассмотрим другой случай – когда истинный вектор-оригинал \mathbf{f} не входит в число решений СЛАУ. Такая ситуация получится, если положения источников не совпадают с серединами ЭР. Во втором эксперименте угловые положения источников составляют $\theta_1 = -25^\circ$, $\theta_2 = -18^\circ$, $\theta_3 = -5^\circ$, $\theta_4 = 0^\circ$, $\theta_5 = 12^\circ$, $\theta_6 = 14^\circ$. В этом случае истинный \mathbf{f} решением уравнения (1) не является: $\Delta_{\text{ист}} = 116,4195$, что очень далеко от нуля. Однако и в этом случае, при той же матрице отображения неполного ранга и с КОМ, стремящимся к бесконечности, матрично-итерационный метод позволяет получить неплохой результат. На рис. 5 представлены решения методом псевдообращения и матрично-итерационным методом, тонкими линиями показано истинное распределение.

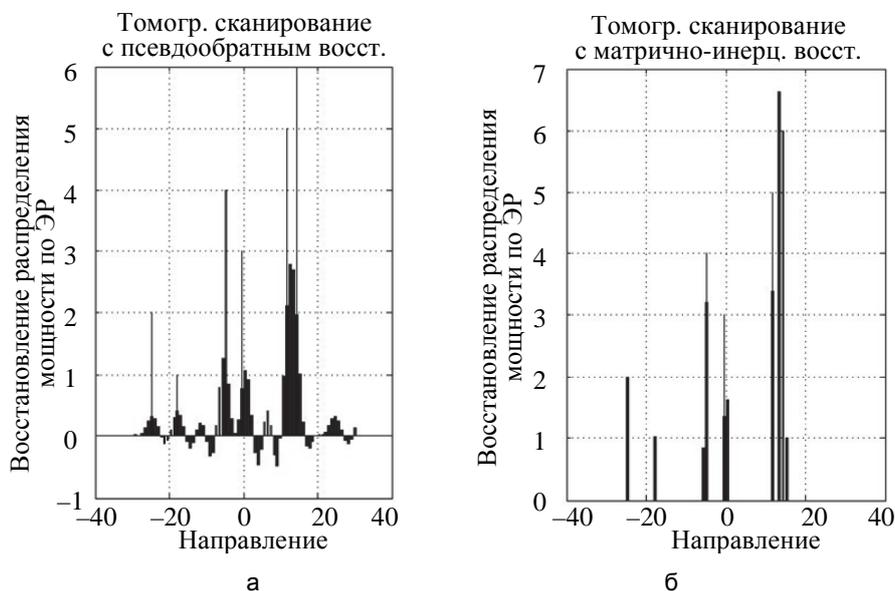


Рис. 5. Восстановление вектора-оригинала, не являющегося точным решением системы уравнений, методом псевдообращения (а) и матрично-итерационным методом (б)

Как видно из рис. 5, угловые положения источников определены матрично-итерационным методом правильно; появилось несколько ложных выбросов вблизи источников, и возникли ошибки в определении их мощностей. Однако в целом восстановление получилось близким к истинному. Учитывая, что такое восстановление получилось при матрице неполного ранга, следует сделать вывод об устойчивости матрично-итерационного метода к вариациям параметров задачи.

Заключение

Предложенный в данной работе матрично-итерационный метод показал свою эффективность в задаче томографического сканирования пространства, при анализе которой он и был разработан. Особенностью этой задачи является получающаяся при ее решении недоопределенная система уравнений, причем большое число компонент искомого вектора-оригинала имеет фоновое значение, а небольшое число разреженных компонент имеет большие значения. При решении такой системы уравнений в итерационном процессе происходит переход от недоопределенной системы к переопределенной. Эффективность применения матрично-итерационного метода в других условиях требует дополнительных исследований. Однако даже если он окажется эффективным лишь в задачах рассмотренного класса, то и этот результат представляется весьма полезным.

Компьютерные эксперименты показали возможность практически точного восстановления распределения мощностей излучения по элементам разрешения в виде вектора-оригинала \mathbf{f} в случае, если этот вектор входит в бесчисленное множество решений системы линейных алгебраических уравнений. В случае если из-за вариаций параметров задачи вектор \mathbf{f} не является решением системы линейных алгебраических уравнений, полученный матрично-итерационным методом результат оказывается гораздо ближе к истинному распределению, чем решение методом псевдообращения. Подчеркнем, что компьютерные эксперименты проводились с матрицей отображения \mathbf{W}^T неполного ранга, что позволяет сделать вывод об устойчивости метода. Проведенные эксперименты показали высокую скорость сходимости итерационной процедуры: в проведенных экспериментах для решения потребовалось 6 и 7 итераций.

Матрично-итерационный метод прост в реализации, не требует дополнительных математических преобразований исходной системы уравнений, не предполагает поиска эффективного параметра регуляризации или статистического моделирования. По сути своей – это программный метод, достаточно просто реализуемый. Характерной особенностью матрично-итерационного метода является отсутствие эффекта сглаживания, свойственного методам регуляризации, что позволило успешно использовать его для решения задачи восстановления распределения с δ -образными выбросами.

Литература

1. Самойленко М.В. Обработка сигналов в задачах локационных измерений и оценивания. М.: Спектр, 2016. 260 с.
2. Самойленко М.В. Способ определений направлений на источники излучения и углового разрешения источников. Патент № 2392634. Бюл. № 17 от 20.06.2010.
3. Кирьянов Д.В., Кирьянова Е.Н. Вычислительная физика. М.: Полибук Мультимедиа, 2006. 352 с.
4. Тихонов А.Н. О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения // Докл. АН СССР. 1965. Т. 163. № 6. С. 591–595.
5. Севастьянов Л.А., Ловецкий К.П., Ланеев Е.Б. Регулярные методы и алгоритмы расчета обратных задач в моделях оптических структур. М.: РУДН, 2008. 155 с.
6. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. 3-е изд. М.: Наука, 1986. 288 с.
7. Butler J.P., Reeds J.A., Dawson S.V. Estimating solutions of first kind integral equations with nonnegative constraints and optimal smoothing // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1981. V. 18. N 3. P. 410–421. doi: 10.1137/0718025
8. Антюфеев В.С. Регуляризация решения системы линейных алгебраических уравнений методом максимального правдоподобия // Сибирский журнал вычислительной математики. 2013. Т. 16. № 3. С. 217–228.
9. Турчин В.Ф., Козлов В.Л., Малкевич С.М. Использование методов математической статистики для решения некорректных задач // УФН. 1970. Т. 102. С. 345–386. doi: 10.3367/UFN.0102.197011a.0345
10. Mosegaard K., Tarantola A. Monte Carlo sampling of solutions to inverse problem // Journal of Geophysical Research. 1995. V. 100. N B7. P. 12431–12447.
11. Мицель А.А., Воскобойников Ю.Е. Современные проблемы прикладной математики. Часть 1. Лекционный курс. Томск, ТУСУР, 2015. 136 с.
12. Воскобойников Ю.Е., Втюрин К.А., Литасов В.А. Deskriptivnyy algoritm vosstanovleniya vkhodnykh signalov opticheskikh sistem // Автотметрия. 2005. Т. 41. № 3. С. 3–10.
13. Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: УИФ «Наука», 1993. 264 с.

References

1. Samoilenko M.V. *Signal Processing in Problems of Location Measurements and Estimation*. Moscow, Spectr Publ., 2016, 260 p. (In Russian)
2. Samojlenko M.V. *Method for Definition of Directions to Radiation Sources and Angular Discrimination of Sources*. Patent RU2392634, 2010.
3. Kir'yanov D.V., Kir'yanova E.N. *Computational Physics*. Moscow, Polibuk Multimedia Publ., 2006, 352 p. (In Russian)
4. Tikhonov A.N. On Ill-Posed Problems in Linear Algebra and a Stable Method for Their Solution. *Doklady AN USSR*, 1965, vol. 163, no. 6, pp. 591–595. (In Russian)
5. Sevast'yanov L.A., Lovetskii K.P., Laneev E.B. *Regular Methods and Algorithms for Calculating Ill-Posed Problems in Models of Optical Structures*. Moscow, RUDN Publ., 2008, 155 p. (In Russian)
6. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Solutions of Ill-Posed Problems*. New York, Wiley, 1977.
7. Butler J.P., Reeds J.A., Dawson S.V. Estimating solutions of first kind integral equations with nonnegative constraints and optimal smoothing. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1981, vol. 18, no. 3, pp. 410–421. doi: 10.1137/0718025
8. Antyufeev V.S. Finding the most probable nonnegative solutions of systems of linear algebraic equations by the maximum likelihood method. *Numerical Analysis and Applications*, 2013, vol. 6, no. 3, pp. 187–196. doi: 10.1134/S1995423913030026
9. Turchin V.F., Kozlov V.P., Malkevich M.S. The use of mathematical-statistics methods in the solution of incorrectly posed problems. *Soviet Physics Uspekhi*, 1971, vol. 13, no. 6, pp. 681–703. doi: 10.1070/PU1971v013n06ABEH004273
10. Mosegaard K., Tarantola A. Monte Carlo sampling of solutions to inverse problem. *Journal of Geophysical Research*, 1995, vol. 100, no. B7, pp. 12431–12447.
11. Voskoboynikov Yu.E., Mitsel' A.A. *Modern Problems of Applied Pathematics*. Part 1. Lecture Course. Tomsk, TUSUR Publ., 2015, 136 p. (In Russian)
12. Voskoboynikov Yu.E., Vtyurin K.A., Litasov V.A. Descriptive algorithm for restoring input signals of optical systems. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2005, vol. 41, no. 3, pp. 3–10. (In Russian)

14. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. 4-е изд. М.: Наука, 1988. 552 с.
15. Самойленко В.И., Пузырев В.А., Грубрин И.В. Техническая кибернетика: Учеб. пособие. М.: МАИ, 1994. 280 с.
13. Vasin V.V., Ageev A.L. *Ill-Posed Problems with A Priori Information*. Ekaterinburg, UIF Nauka Publ., 1993, 264 p. (in Russian)
14. Gantmakher F.R. *Matrix Theory*. Moscow, Nauka Publ., 1988, 552 p. (In Russian)
15. Samoilenko V.I., Puzyrev V.A., Grubrin I.V. *Technical Cybernetics: Textbook*. Moscow, MAI Publ., 1994, 280 p. (In Russian)

Авторы

Самойленко Марина Витальевна – кандидат технических наук, доцент, доцент, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, 125080, Российская Федерация, ORCID ID: 0000-0002-4798-2414, Samoi.Mar@mail.ru

Authors

Marina V. Samoilenko – PhD, Associate Professor, Associate Professor, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125080, Russian Federation, ORCID ID: 0000-0002-4798-2414, Samoi.Mar@mail.ru