

УДК 532.516

УСТОЙЧИВОСТЬ ВЯЗКОЙ ПЛЕНКИ НА ПОВЕРХНОСТИ СЛАБО НАКЛОНЕННОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО ЦИЛИНДРА

И.Ф. Мелихов^a

^a Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация

Адрес для переписки: ivan.melikhov@gmail.com

Информация о статье

Поступила в редакцию 06.03.18, принята к печати 10.04.18

doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-3-529-534

Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Мелихов И.Ф. Устойчивость вязкой пленки на поверхности слабо наклоненного вращающегося вертикального цилиндра // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2018. Т. 18. № 3. С. 529–534. doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-3-529-534

Аннотация

Предмет исследования. Рассмотрена задача о динамике пленки вязкой жидкости на поверхности вращающегося цилиндра. Целью работы является анализ устойчивости системы при малых наклонах оси цилиндра к вертикали. Проанализирована устойчивость пленки на поверхности строго вертикального цилиндра, исследована динамика пленки при периодическом во времени малом отклонении барабана от вертикальной оси. **Методы.** В исходные уравнения Навье–Стокса, описывающие динамику вязких жидкостей, введен малый параметр – отношение толщины слоя жидкости к радиусу цилиндра. Благодаря этому оказалось возможным применение асимптотических методов, что позволяет вывести упрощенное уравнение толщины пленки. Полученное уравнение является нелинейным уравнением в частных производных и в общем виде не может быть разрешено аналитически. Для исследования его решения применена теория возмущений. Проведен линейный анализ устойчивости однородной пленки на поверхности вертикального цилиндра, а также изучен отклик на периодическое во времени возмущение угла наклона цилиндра. **Основные результаты.** Показано, что в случае строго вертикального цилиндра силы поверхностного натяжения влекут неустойчивость осесимметричных возмущений с длиной волны больше критической. Найденное значение критической длины волны возмущения пропорционально радиусу цилиндра. Для случая колебаний оси цилиндра около вертикали показано, что возникает слой жидкости неравномерной толщины с диаметрально противоположными утолщением и утоньшением. Продемонстрирована возможность резонанса при совпадении частоты колебаний оси цилиндра с частотой его вращения. **Практическая значимость.** Полученные результаты могут быть использованы для лучшего понимания и последующего совершенствования существующих технологических процессов.

Ключевые слова

вязкие пленки, теория смазки, жидкость на поверхности цилиндра, устойчивость течения

Благодарности

Работа частично поддержана Правительством Российской Федерации (грант 074-U01).

STABILITY OF VISCOUS FILM ON SURFACE OF SLIGHTLY INCLINED ROTATING VERTICAL CYLINDER

I.F. Melikhov^a

^a ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

Corresponding author: ivan.melikhov@gmail.com

Article info

Received 06.03.18, accepted 10.04.18

doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-3-529-534

Article in Russian

For citation: Melikhov I.F. Stability of viscous film on surface of slightly inclined rotating vertical cylinder. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2018, vol. 18, no. 3, pp. 529–534 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-3-529-534

Abstract

Subject of Research. The paper deals with the problem of viscous film evolution on a surface of rotating cylinder. The objective of the work is stability analysis of such system in the cases when the cylinder axis is nearly vertical. Stability of uniform film on a strictly vertical cylinder is analyzed, and the system dynamics under small time-periodic deviations of cylinder axis is studied. **Methods.** Initial Navier-Stokes equations, which describe dynamics of viscous fluids, are considered with introduced small parameter – the ratio of fluid layer thickness to cylinder radius. This fact allows applying of asymptotic

methods and helps to derive a simplified equation on the film thickness. The obtained equation is a non-linear partial-derivative equation and cannot be solved analytically in general form. Perturbation theory is applied for the subsequent analysis. Linear stability analysis for uniform film on the vertical cylinder surface is carried out. Response to time-periodic perturbation of the cylinder tilt is studied. **Main Results.** In the case of strictly vertical cylinder, capillary forces imply instability of axisymmetric perturbations with a wavelength exceeding critical value. The obtained critical wavelength value is proportional to the cylinder radius. It is shown that when a cylinder axis oscillates around the vertical, non-uniform fluid layer appears with diametrically opposite thickening and thinning. In the case when the axis oscillation frequency is equal to the rotation frequency, a resonance appears. **Practical Relevance.** The obtained results might be used for better understanding and further improvement of existing manufacturing processes.

Keywords

viscous films, lubrication theory, fluid on cylinder surface, flow stability

Acknowledgements

The work is partially supported by the Government of the Russian Federation (grant 074-U01).

Введение

Критерии устойчивости тонких пленок вязкой жидкости на различных твердых поверхностях играют важную роль в разнообразных технологических процессах, так как от них зависят допустимые параметры этих процессов. Один частный случай такой системы – пленка на поверхности вращающегося цилиндра. Подобные системы встречаются, например, в процессе нанесения покрытия на кабели, в стеклянной промышленности и даже при производстве шоколадных изделий.

К ранним работам по изучению слоя жидкости на горизонтальном цилиндре относится работа [1]. В ней была найдена максимальная масса жидкости с заданными свойствами, способная устойчиво оставаться на цилиндре. В статье [2] для данной задачи доказываются существование и единственность решения уравнения Навье–Стокса для случая достаточно вязкой жидкости. Несомненно, знание о существовании решения оправдывает поиск решения, но не дает его. Стоит отметить, что точные решения уравнений движения вязких жидкостей удается найти лишь в отдельных редких случаях (см., например, [3]). Поэтому многие задачи приходится исследовать при различных допущениях. Наиболее существенным допущением является предположение о малости толщины слоя жидкости по сравнению с радиусом цилиндра. Это допущение вполне оправдано при описании жидких пленок. Течение пленки по поверхности горизонтального цилиндра при различных внешних факторах изучалось в работах [4–7]. Похожая задача о слое жидкости на внутренней стороне вращающегося цилиндра была рассмотрена в [8, 9]. Однако в подавляющем большинстве работ рассматривается только горизонтальная ориентация цилиндра. Если говорить о наклонной или вертикальной конфигурациях, аналогичные задачи рассматривались для течения по плоскости. В работах [10, 11] изучалось поведение вязкой пленки на наклонной плоскости, а в [12] – на вертикальной. Методы решения подобных задач основываются на теории смазки, заложенной Рейнольдсом [13]. Современное описание этого подхода хорошо описано в работах [14, 15].

В данной работе исследуется течение жидкости по цилиндру, ось которого слабо наклонена к вертикали. С помощью методов, аналогичных представленным в работах [5, 6], выведено уравнение, описывающее толщину пленки для произвольного угла наклона цилиндра. В общем случае это уравнение не имеет аналитического решения. В представленной работе рассматриваются две частные задачи: анализ устойчивости пленки на вертикальном цилиндре и динамика пленки на цилиндре, совершающем малые колебания вокруг вертикальной оси. В этих двух случаях удастся получить аналитическое решение с помощью асимптотических методов.

Модель течения пленки по поверхности цилиндра

Рассмотрим течение пленки вязкой несжимаемой жидкости по поверхности бесконечного цилиндра радиуса R , вращающегося с круговой частотой ω , ось которого наклонена по отношению к вертикали на угол α (рисунок).

Введем цилиндрическую систему координат (r, θ, z) , где r – радиальная координата, отсчитываемая от оси цилиндра, θ – азимутальная координата, а координата z откладывается вдоль оси цилиндра. Тогда толщину пленки в каждой точке можно описать функцией $h(t, \theta, z)$, зависящей от времени t и координат θ, z .

Динамика жидкости описывается уравнениями Навье–Стокса [16]:

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \nabla \Phi,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

где ∇ – оператор набла; ρ – плотность жидкости; $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$ – вектор скорости; $\Phi = \rho g(z \cos \alpha - r \cos \theta \sin \alpha)$ – потенциал силы тяжести (здесь g – ускорение свободного падения), а $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор вязких напряжений, определяемый как

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mu(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T),$$

где p – давление; \mathbf{I} – единичный тензор; μ – динамическая вязкость жидкости. Решение указанных уравнений должно удовлетворять ряду граничных условий. На поверхности цилиндра задается условие прилипания

$$\mathbf{u}|_{r=R} = (0, \omega R, 0),$$

а на свободной границе $r = R + h(t, \theta, z)$ должны выполняться кинематические и динамические условия:

$$\partial_t h + \mathbf{u} \cdot \nabla (h(t, \theta, z) - r) = 0,$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = -\sigma \kappa,$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{t}_i = 0, \quad i = 1, 2,$$

где \mathbf{n} – нормальный вектор к поверхности; $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ – касательные вектора к поверхности; σ – коэффициент поверхностного натяжения; κ – скалярная кривизна поверхности.

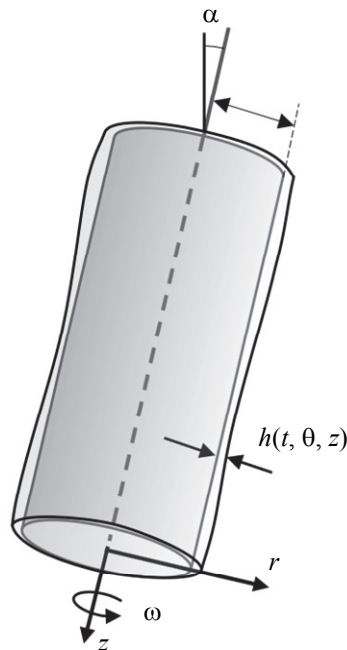


Рисунок. Течение пленки по наклонному вращающемуся цилиндру

Представленные уравнения крайне сложны для решения. Дополнительной трудностью является тот факт, что границы расчетной области зависят от решения (поля скоростей) и меняются во времени. Однако в случае малой толщины жидкости оказывается возможным получение упрощенного уравнения, описывающего динамику пленки. Для этого необходимо перейти к безразмерным величинам, ввести малый параметр – отношение толщины пленки к радиусу цилиндра – и искать решение в виде ряда по этому малому параметру. Мы опускаем детали этой громоздкой процедуры, отметив, что подробности аналогичного вывода можно найти в работе [5].

Вводя обозначение $\tilde{\nabla} = (R^{-1}\partial_\theta, \partial_z)$ для оператора набла, действующего на поверхности цилиндра, выписываем окончательное уравнение на толщину пленки $h(t, \theta, z)$ в размерных величинах:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{h}{R}\right) \partial_t h + \omega \partial_\theta \left(h + \frac{h^2}{2R}\right) + \frac{\rho g}{3\mu} \frac{1}{R} \partial_\theta \left[\left(h^3 + \frac{3h^4}{2R}\right) \sin \theta \sin \alpha\right] + \\ & + \frac{\rho g}{3\mu} \partial_z \left[\left(h^3 + \frac{h^4}{R}\right) \cos \alpha\right] - \tilde{\nabla} \cdot \left[\frac{\rho g}{3\mu} h^3 \tilde{\nabla} h \cos \theta \sin \alpha + \frac{\sigma}{3\mu} h^3 \tilde{\nabla} \left(\frac{h}{R^2} + \tilde{\nabla}^2 h\right)\right] = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Первое слагаемое в этом уравнении – изменение толщины во времени; второе слагаемое – конвективный перенос жидкости, вызванный вращением барабана; третье и четвертое слагаемые описывают стекание, вызванное гравитацией, в азимутальном и осевом направлениях соответственно; наконец, в последних квадратных скобках первое слагаемое представляет действие гравитации в радиальном направлении, а второе слагаемое – капиллярных сил.

Полученное уравнение (1) согласуется с аналогичным уравнением работы [5] для горизонтального цилиндра с несколькими различиями. Во-первых, в настоящей работе введен наклон цилиндра, что приводит к появлению дополнительного слагаемого с множителем $\cos \alpha$, а также добавляет множитель $\sin \alpha$ к нескольким другим слагаемым. Во-вторых, мы пренебрегли всеми инерциальными силами, в то время как в работе [5] учитывается дополнительное слагаемое, вызванное центробежной силой.

В дальнейшем будем считать, что угол наклона барабана либо нулевой, либо мал.

Устойчивость вертикального цилиндра

В случае вертикального цилиндра угол наклона α равен нулю, и уравнение (1) существенно упрощается. В частности, оно допускает простое стационарное решение – константу $h = h_0$. Исследуем это решение на устойчивость. Для этого будем искать решения уравнения (1) в виде суммы стационарного решения и малого возмущения:

$$h = h_0 + \hat{h} e^{\lambda t} e^{in\theta} e^{ikz}, \quad (2)$$

где \hat{h} соответствует возмущению в начальный момент времени; λ – показатель скорости роста (или затухания) возмущения; n – номер азимутальной гармоники возмущения; k – волновое число возмущения в осевом направлении; i – мнимая единица. Подставляя выражение (2) в уравнение (1) и линеаризуя результат, находим показатель скорости роста возмущения:

$$\lambda = -i \left[\omega n + \frac{\rho g h_0^2}{\mu} \left(1 + \frac{1}{3(h_0 + R)} \right) k \right] - \frac{\sigma h_0^3}{3\mu R^3 (h_0 + R)} \left[(n^2 + R^2 k^2)^2 - (n^2 + R^2 k^2) \right]. \quad (3)$$

Здесь первое, мнимое, слагаемое отвечает за перенос возмущения по спирали вдоль оси цилиндра, а второе, действительное, слагаемое показывает скорость роста амплитуды возмущения (отрицательная скорость соответствует затуханию).

Проанализировав выражение (3), нетрудно заметить, что возрастая (действительная часть показателя скорости роста больше нуля, $\text{Re} \lambda > 0$) могут только осесимметричные возмущения ($n = 0$) с волновыми числами $0 \leq |k| \leq R^{-1}$. Таким образом, возмущения с длиной волны больше критической $\lambda_{crit} = 2\pi R$ будут расти, в то время как коротковолновые возмущения будут затухать, разглаживаясь силами поверхностного натяжения. При этом наиболее быстро будут нарастать возмущения с длиной волны

$$\lambda_{max} = 2\sqrt{2}\pi R.$$

Помимо описанных осесимметричных возмущений, незатухающими окажутся моды $n = \pm 1$ при $k = 0$. В этих случаях $\text{Re} \lambda = 0$, и, вообще говоря, линейного анализа недостаточно для установления устойчивости. Этим модам соответствуют постоянные в осевом направлении конфигурации толщин вида $h = h_0 + A \sin(\theta - \omega t) + B \cos(\theta - \omega t)$. Все остальные возмущения затухают со временем ($\text{Re} \lambda < 0$).

Случай колеблющейся оси цилиндра

Рассмотрим теперь случай, когда ось цилиндра не является строго вертикальной, а совершает малые периодические колебания около вертикали с круговой частотой Ω . Это может быть описано следующей зависимостью угла наклона от времени:

$$\alpha = \delta \sin(\Omega t).$$

Примем во внимание, что величина отклонения δ мала. В этом случае решение уравнения (1) можно искать в виде асимптотического ряда по δ в виде

$$h = h_0 + \delta h_1 + O(\delta^2), \quad (4)$$

а множители $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ представить в виде

$$\cos \alpha = 1 + O(\delta^2), \quad \sin \alpha = \delta \sin(\Omega t) + O(\delta^3), \quad (5)$$

где $O(\delta^2)$, $O(\delta^3)$ означают бесконечно малые величины порядка δ^2 и δ^3 соответственно.

Подставляя выражения (4)–(5) в уравнение (1) и собирая множители при одинаковых степенях δ , получаем уравнения для h_0 и h_1 . В нулевом порядке отклонение оси барабана не проявляется, поэтому, как и в предыдущей части, решением является постоянная толщина пленки $h_0 = \text{const}$. Решение уравнения в первом порядке будем искать в виде $h_1 = \hat{h}(t) e^{in\theta} e^{ikz}$, что позволяет перейти к уравнению

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{h} + i \left[\omega n + \frac{\rho g h_0^2}{\mu} \left(1 + \frac{1}{3(h_0 + R)} \right) k \right] \hat{h} + \frac{\sigma h_0^3}{3\mu R^3 (h_0 + R)} \left[(n^2 + R^2 k^2)^2 - (n^2 + R^2 k^2) \right] \hat{h} = \\ = - \frac{\rho g h_0^3}{3\mu R} \left(1 + \frac{1}{2(h_0 + R)} \right) \sin(\Omega t) \frac{\delta_{n,1} + \delta_{n,-1}}{2} \delta(k), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\delta_{n,1}$, $\delta_{n,-1}$ – дельта-символ Кронекера; $\delta(k)$ – дельта-функция Дирака.

Уравнение (6) является линейным дифференциальным уравнением относительно $\hat{h}(t)$. Отметим, что оно является неоднородным только в случаях $n = \pm 1$ при $k = 0$. В остальных случаях решение будет нулевым при отсутствии начального возмущения (решение при его наличии описано в предыдущей части). Для случаев с ненулевой правой частью уравнение (6) упрощается и принимает вид

$$\partial_t \hat{h} \pm i\omega \hat{h} = - \frac{\rho g h_0^3}{6\mu R} \left(1 + \frac{1}{2(h_0 + R)} \right) \sin(\Omega t). \quad (7)$$

Решение уравнения (7) при заданных начальных условиях легко может быть получено аналитически и представляет собой суперпозицию колебаний с частотами ω и Ω . Однако при совпадении частоты вращения цилиндра с частотой колебания его оси, $\omega = \Omega$, в решении уравнения (7) появляется слагаемое, линейно растущее во времени. Физически этому соответствует попадание системы в резонанс, и амплитуда колебаний толщины пленки существенно возрастает.

Заключение

В представленной работе рассматривается задача течения вязкой жидкости по поверхности вращающегося цилиндра, ось которого слабо наклонена к вертикали. С помощью асимптотических методов, аналогичных представленным в работах [5, 6], получено уравнение, описывающее динамику толщины пленки.

Вообще говоря, это нелинейное уравнение в частных производных не может быть разрешено аналитически. Однако для случая строго вертикального цилиндра оно допускает решение-константу. Анализ устойчивости этого решения показал, что неустойчивыми являются лишь осесимметричные возмущения с длиной волны больше $2\pi R$. Стоит отметить, что если длина цилиндра в реальном приложении меньше $2\pi R$, то длинноволновые возмущения не могут на нем возникнуть, и течение будет устойчивым.

Случай малого колебания оси цилиндра вокруг вертикали также оказывается аналитически разрешимым. При отсутствии начальных возмущений на таком цилиндре возникает пленка неравномерной толщины с диаметрально противоположными утолщением и утоньшением. Совпадение частоты колебаний оси с частотой вращения цилиндра приводит к резонансу, который влечет нарастание неравномерности толщины со временем. Несомненно, это может привести к потере устойчивости и разрушению пленки, поэтому в практических реализациях следует избегать такого сценария.

Литература

1. Moffat H.K. Behaviour of a viscous film on the outer surface of a rotating cylinder // *Journal de Mecanique*. 1977. V. 16. N 5. P. 651–673.
2. Пухначев В.В. Движение жидкой пленки на поверхности вращающегося цилиндра в поле тяжести // *Прикладная механика и техническая физика*. 1977. Т. 18. № 3. С. 78–88.
3. Макеев И.В., Попов И.Ю., Блинова И.В. Эталонные решения уравнений Стокса с переменной вязкостью в цилиндрических и сферических координатах для тестирования алгоритмов // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2016. Т. 16. № 1. С. 161–167. doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-1-161-167
4. Duffy B., Wilson. S. Thin-film and curtain flows on the outside of a rotating horizontal cylinder // *Journal of Fluid Mechanics*. 1999. V. 394. P. 29–49.
5. Evans P.L., Schwartz L.W., Roy R.V. Steady and unsteady solutions for coating flow on a rotating horizontal cylinder: two-dimensional theoretical and numerical modeling // *Physics of Fluids*. 2004. V. 16. P. 2742–2756. doi: 10.1063/1.1758943
6. Evans P.L., Schwartz L.W., Roy R.V. Three-dimensional solutions for coating flow on a rotating horizontal cylinder: theory and experiment // *Physics of Fluids*. 2005. V. 17. N 7.

References

1. Moffat H.K. Behaviour of a viscous film on the outer surface of a rotating cylinder. *Journal de Mecanique*, 1977, vol. 16, no. 5, pp. 651–673.
2. Pukhnachov V.V. Motion of a liquid film on the surface of a rotating cylinder in a gravitational field. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1977, vol. 18, no. 3, pp. 344–351.
3. Makeev I.V., Popov I.Yu., Blinova I.V. Benchmark solutions for Stokes equations with variable viscosity in cylindrical and spherical coordinates for algorithm testing. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2016, vol. 16, no. 1, pp. 161–167. doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-1-161-167
4. Duffy B., Wilson. S. Thin-film and curtain flows on the outside of a rotating horizontal cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 1999, vol. 394, pp. 29–49.
5. Evans P.L., Schwartz L.W., Roy R.V. Steady and unsteady solutions for coating flow on a rotating horizontal cylinder: two-dimensional theoretical and numerical modeling. *Physics of Fluids*, 2004, vol. 16, pp. 2742–2756. doi: 10.1063/1.1758943
6. Evans P.L., Schwartz L.W., Roy R.V. Three-dimensional solutions for coating flow on a rotating horizontal cylinder: theory and experiment. *Physics of Fluids*, 2005, vol. 17, no. 7. doi: 10.1063/1.1942523

- doi: 10.1063/1.1942523
7. Soliman M.A., Alhumaizi K. Dynamics of a coating film flow on horizontal cylinders with van der Waals forces // *Mathematical and Computer Modelling*. 2013. V. 57. N 11-12. P. 2984–2997. doi: 10.1016/j.mcm.2013.03.006
 8. Aggarwal H., Tiwari N. Generalized linear stability of non-inertial rimming flow in a rotating horizontal cylinder // *European Physical Journal E*. 2015. V. 38. N 10. 11 p. doi: 10.1140/epje/i2015-15111-7
 9. Leslie G., Wilson S., Duffy B. Three-dimensional coating and rimming flow: a ring of fluid on a rotating horizontal cylinder // *Journal of Fluid Mechanics*. 2013. V. 716. P. 51–82. doi: 10.1017/jfm.2012.509
 10. Roskes G.J. Three-dimensional long waves on a liquid film // *Physics of Fluids*. 1970. V. 13. N 6. P. 1440–1445.
 11. Lin S.P., Krishna M.V.G. Stability of a liquid film with respect to initially finite three-dimensional disturbances // *Physics of Fluids*. 1977. V. 20. N 12. P. 2005–2011.
 12. Joo S.W., Davis S.H. Instabilities of three-dimensional viscous falling films // *Journal of Fluid Mechanics*. 1992. V. 242. P. 529–549. doi: 10.1017/S0022112092002489
 13. Reynolds O. On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil // *Proc. Royal Society of London*. 1886. V. 177. P. 157–234. doi: 10.1098/rstl.1886.0005
 14. Oron A., Davis S.H., Bankoff S.G. Long-scale evolution of thin liquid films // *Reviews of Modern Physics*. 1997. V. 69. N 3. P. 931–980.
 15. Craster R.V., Matar O.K. Dynamics and stability of thin liquid films // *Reviews of Modern Physics*. 2009. V. 81. N 3. P. 1131–1198. doi: 10.1103/RevModPhys.81.1131
 16. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
 7. Soliman M.A., Alhumaizi K. Dynamics of a coating film flow on horizontal cylinders with van der Waals forces. *Mathematical and Computer Modelling*, 2013, vol. 57, no. 11-12, pp. 2984–2997. doi: 10.1016/j.mcm.2013.03.006
 8. Aggarwal H., Tiwari N. Generalized linear stability of non-inertial rimming flow in a rotating horizontal cylinder. *European Physical Journal E*, 2015, vol. 38, no. 10, 11 p. doi: 10.1140/epje/i2015-15111-7
 9. Leslie G., Wilson S., Duffy B. Three-dimensional coating and rimming flow: a ring of fluid on a rotating horizontal cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 2013, vol. 716, pp. 51–82. doi: 10.1017/jfm.2012.509
 10. Roskes G.J. Three-dimensional long waves on a liquid film. *Physics of Fluids*, 1970, vol. 13, no. 6, pp. 1440–1445.
 11. Lin S.P., Krishna M.V.G. Stability of a liquid film with respect to initially finite three-dimensional disturbances. *Physics of Fluids*, 1977, vol. 20, no. 12, pp. 2005–2011.
 12. Joo S.W., Davis S.H. Instabilities of three-dimensional viscous falling films. *Journal of Fluid Mechanics*, 1992, vol. 242, pp. 529–549. doi: 10.1017/S0022112092002489
 13. Reynolds O. On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil. *Proc. Royal Society of London*, 1886, vol. 177, pp. 157–234. doi: 10.1098/rstl.1886.0005
 14. Oron A., Davis S.H., Bankoff S.G. Long-scale evolution of thin liquid films. *Reviews of Modern Physics*, 1997, vol. 69, no. 3, pp. 931–980.
 15. Craster R.V., Matar O.K. Dynamics and stability of thin liquid films. *Reviews of Modern Physics*, 2009, vol. 81, no. 3, pp. 1131–1198. doi: 10.1103/RevModPhys.81.1131
 16. Landau L.D., Lifshits E.M. *Theoretical Physics*, vol. 6. Hydrodynamics. Moscow, Nauka Publ., 1986, 736 p. (In Russian)

Авторы

Мелихов Иван Федорович – аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Scopus ID: 57198030937, ORCID ID: 0000-0002-2199-7837, ivan.melikhov@gmail.com

Authors

Ivan F. Melikhov – postgraduate, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Scopus ID: 57198030937, ORCID ID: 0000-0002-2199-7837, ivan.melikhov@gmail.com