4 МЕХАНИКА И МЕХАТРОНИКА

УДК 681.5 + 531

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ТЕНЗОРОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ

В.Г. Мельников

Представлен метод определения шести инерционных параметров твердого тела в условиях неизвестной диссипации энергии, применяемый на его полупрограммном сферическом движении частного вида – неравномерной прецессии. Движение содержит этапы свободного неуправляемого торможения и управляемого обратного симметричного ускоренного движения по программе, рассчитанной по замерам предыдущего движения. Расчет инерционных параметров выполняется по замерам потребляемой электроэнергии. Предложено исполнительное робототехническое устройство.

Ключевые слова: тензор инерции, параметрическая идентификация, реверсивно-симметричное сферическое движение, полупрограмная прецессия.

Введение

Точность экспериментального определения моментов и тензоров инерции существенно зависит от величины диссипации энергии через трение в устройстве и через сопротивление среды. В связи с этим обычно ограничиваются применением устройств с малым трением, с мультиплярными, торсионными и пружинными подвесами, газовыми подшипниками [1–5]. Применяют непосредственное определение сил, приложенных к телу, путем замеров упругих деформаций податливой платформы, тем самым исключая из рассмотрения сложное исполнительное устройство, но получая существенные погрешности от деформаций конструкции [6]. Применение теоремы моментов позволяет исключить из расчетных формул влияние на точность только сил внутреннего трения [7–8], в то же время не исключается отрицательное влияние внешних диссипативных сил. В [9–13] предложен метод идентификации осевых моментов инерции тел, согласно которому проблема борьбы с отрицательным влиянием диссипации на точность сведена к проблеме точного исполнения программных тестовых симметричных движений.

В статье предлагается модифицированный метод параметрической идентификации матрицы тензора инерции, по которому вместо шести программных осевых реверсивно-симметричных вращений применено одно полупрограммное реверсивно-симметричное сферическое движение тела с одной обобщенной координатой – углом прецессии либо углом нутации, содержащее этап свободного непрограммного торможения, переходящего после реверса в этап программного обратного ускоренного движения на прежнем угловом интервале, согласованного с прежним этапом по свойству обратной реверсивной симметрии. Преимущество метода заключается в большей точности идентификации и быстродействии, поскольку вместо шести экспериментов с шестью выставками тела в шесть угловых положений выполняется только один эксперимент, кроме того, технически сложные замеры крутящего момента здесь заменены на текущие замеры расхода электроэнергии. Предложено исполнительное устройство с двухосным кардановым подвесом с одним электродвигателем и с упругим торсионным элементом.

Определения

Пусть тело размещено во внутренней осесимметричной цилиндрической рамке 1 двухосного карданова подвеса (см. рисунок) с горизонтальной осью собственного вращения Oz и внешней рамки 2 с вертикальной осью прецессии Oz_1, соосной с торсионом 3 и ротором электродвигателя 4. Планетарный механизм 5 передает вращение на внутреннюю рамку согласно уравнению голономной связи углов прецессии и собственного вращения вида $\psi=\lambda\varphi$ при $\lambda=1{,}235=\mathrm{tg}\beta=\mathrm{tg}51^0$. Положение голономной системы тело – устройство с одной степенью свободы задаем обобщенной координатой φ. На двухоборотном угловом интервале $[\varphi_0=0,\varphi_{10}=4\pi]$ введем промежуточные узлы $[\varphi_1=h,\varphi_2=2h,...,\varphi_9=9h]$, где $h=2\pi/5$.

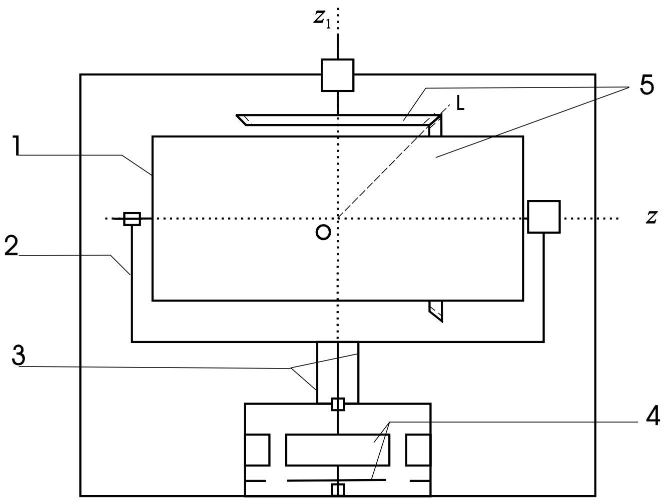

Рисунок. Исполнительное устройство

Реверсивной полупрограммной прецессией назовем сферическое двухосное движение тела с голономной связью $\psi=\lambda\varphi$, состоящее из замедленного двухоборотного непрограммного вращения по φ с уравнением, определяемым по текущим замерам движения в виде

$$\varphi = p(t) \quad \text{при} \quad \varphi \in [\varphi_0 = 0, \varphi_{10} = 4\pi], \quad t \in [t_0, t_{10}], \tag{1}$$

переходящее после реверса с некоторого момента $t'_{10} \geq t_{10}$ в обратное программное симметричное движение на интервале времени $[t'_{10}, t'_0]$ при $t'_0 = t'_{10} + t_{10} - t_0$, удовлетворяющее уравнению

$$\varphi=f(t) \quad \text{при} \quad f(t) = p(t^*), \quad t^* = t'_{10} + t_{10} - t\,. \tag{2}$$

Динамические уравнения энергии прецессионного движения

Применим теорему об изменении кинетической энергии к системе тело–устройство (рисунок) на полнооборотных пересекающихся угловых интервалах $\Phi_i=[\varphi_i,\varphi_{i+5}]$ при $i=1,...,5$. Учитывая равенство нулю работы силы тяжести тела на полных оборотах по φ независимо от ψ и симметричность движений, получаем:

$$\begin{aligned} &T_{i+5} - T_i = \Pi_i - \Pi_{i+5} + A_i + B_i + V_i, \ i = 1,...,5; \\ &T_i - T_{i+5} = \Pi_{i+5} - \Pi_i + A'_i + B'_i + V'_i, \ B'_i = B_i, V'_i = V_i + \varepsilon_i^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь T_i и Π_i – узловые значения кинетической энергии системы и потенциальной энергии торсиона, A_i, A'_i – работы момента электродвигателя на интервале Φ_i тормозного и обратного движений, B_i, B'_i – работы внутреннего трения в торсионе и сил сопротивления среды, одинаковые при цилиндрической форме кожуха, V_i, V_i' – работы сил трения в устройстве, в том числе в подшипниках электродвигателя, которые могут отличаться на положительную величину ε_i^2 в случае малого трения порядка ε_i. Из уравнений (3) получаем десять уравнений для работ сил и кинетических энергий:

$$A'_i + A_i = 2|B_i + V_i| - \varepsilon_i^2, \qquad 2T_i - 2T_{i+5} = 2\Pi_{i+5} - 2\Pi_i + A'_i - A_i + \varepsilon_i^2. \tag{4}$$

В случае $A_i = 0$, когда тормозное движение исполняется при выключенном электродвигателе, получаем $A'_i = 2|B_i + V_i| - \varepsilon_i^2$, т.е. на обратном движении управляющий момент электродвигателя работает в маломощном режиме компенсации малой диссипации, следовательно, $\varepsilon_i^2 \approx 0$. Если вместо передаточного механизма применен второй электродвигатель, соосный с валом внутренней рамки, также имеем $\varepsilon^2 = 0$. Угловая скорость сферического двухосного движения $\bar{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\varphi}\bar{\mathbf{k}} + \dot{\psi}\bar{\mathbf{k}}_1 = \mu\Omega\bar{\mathbf{e}}$ при $\mu = \sqrt{1+\lambda} = 1{,}5890$, где $\bar{\mathbf{k}}, \bar{\mathbf{k}}_1, \bar{\mathbf{e}}$ – орты осей Oz, Oz_1 и мгновенной оси OL. Кинетическая энергия тела $T = J(\varphi)\mu^2\Omega^2/2$, где $J(\varphi)$ – момент инерции тела относительно OL, $J\mu^2$ – приведенный момент инерции тела. Для цилиндрической рамки имеем $T = I\mu^2\Omega^2/2$, где $I = \text{const}$ – момент инерции рамки относительно OL. Подставляя выражение кинетической энергии системы в уравнения (4), получим:

$$(J_i\mu^2 + I)(\Omega_i^2 - \Omega_{i+5}^2) = 2\Pi_{i+5} - 2\Pi_i + A'_i - A_i + \varepsilon_i^2, \quad J_i = J(\varphi_i) = J(\varphi_{i+5}).$$

Расчетные формулы для моментов инерции тела

Находим расчетные формулы моментов инерции тела относительно пяти мгновенных осей, равномерно распределенных в теле по круговому конусу с углом $\beta = 51°$ между образующей OL и собственной осью Oz:

$$J_i = (A'_i - A_i + 2\Pi_{i+5} - 2\Pi_i + \varepsilon_i^2)(\Omega_i^2 - \Omega_{i+5}^2)^{-2}\mu^{-2} - I\mu^{-2}, \quad i = 1,...,5.. \tag{5}$$

Шестой момент инерции тела определяется на реверсивно-симметричном вращении системы вокруг неподвижной оси Oz_1 при угле $\varphi = 0°$ на конечном угле поворота $[\psi_1, \psi_2]$ по формуле

$$J_6 = J_{z1} = (A'_{21} - A_{12} + 2\Pi(\psi_2) - 2\Pi(\psi_1))(\dot{\psi}_1^2 - \dot{\psi}_2^2)^{-2} - I_{z1}, \tag{6}$$

где J_{z1} и I_{z1} – осевые моменты инерции тела и устройства при $\varphi \equiv 0$. Единое твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной вертикальной оси, оказывает динамическое давление на подшипники, не зависящее от направления вращения, поэтому в (6) принимаем $\varepsilon_6^2 = 0$. Работа крутящего момента электродвигателя равна потребляемой им электроэнергии E_i за вычетом омических тепловых потерь в обмотках δ_i, в которые включаем и расходы на приращение энергии электромагнитного поля $A_i = E_i - \delta_i$, $A'_i = E'_i - \delta'_i$. Отсюда

$$A'_i - A_i = E'_i - E_i - (\delta'_i - \delta_i), \quad A'_{21} - A_{12} = E'_{21} - E_{12} - (\delta' - \delta). \tag{7}$$

В результате осевые моменты инерции определены формулами (5)–(6), где разности работ активного момента электродвигателя определяются формулами (7) через разности расходов электроэнергии и разности омических потерь.

Расчетные формулы для матрицы тензора инерции

Моменты инерции тела относительно осей связаны с элементами тензора инерции – осевыми декартовыми и центробежными моментами инерции – следующими формулами:

$$J_i = \mathbf{I}\mathbf{U}_i, \quad i = 1,...,5 \quad \text{при} \quad \mathbf{I} = [J_x\ J_y\ J_z\ J_{xy}\ J_{yz}\ J_{xz}],$$

$$\mathbf{U}_i = [e_{i1}^2, e_{i2}^2, e_{i3}^2, 2e_{i1}e_{i2}, 2e_{i2}e_{i3}, 2e_{i1}e_{i3}]^T.$$

Здесь e_{ix}, e_{iy}, e_{iz} – проекции ортов осей, равные направляющим косинусам осей. Горизонтальная конкатенация этих выражений приводит к матричному выражению вектор-строки осевых моментов инерции через вектор-строку элементов тензора инерции, умноженную на квадратную матрицу перехода:

$$\mathbf{J} = \mathbf{I}\mathbf{U} \quad \text{при} \quad \mathbf{J} = [J_1,...,J_6], \quad \mathbf{U} = [U_1,...,U_6].$$

Отсюда получаем расчетную формулу для вектор-строки, составленной из моментов инерции относительно декартовых осей и центробежных моментов инерции:

$$\mathbf{I} = \mathbf{J}\mathbf{U}^{-1} \quad \text{или} \quad \mathbf{I}^{\mathbf{T}} = \left(\mathbf{U}^{-1}\right)^{\mathbf{T}} \mathbf{J}^T. \tag{8}$$

Для вышеуказанного пучка из шести осей имеем следующие вектор-строки ортов:

$$\mathbf{e}_i = \sin\beta\,[\cos(i\varphi - \varphi), \sin(i\varphi - \varphi), \operatorname{ctg}\beta], \quad i = 1,...,5; \quad \mathbf{e}_6 = [1, 0, 0]$$

Решение (8) хорошо обусловлено, поскольку $\det(\mathbf{U}) = 0,9657$.

Заключение

В статье излагается обобщение метода идентификации шести компонент тензора инерции твердого тела. Предложено вместо пяти программных тестирующих реверсивно-симметричных вращений вокруг неподвижных осей использовать одно сферическое неравномерное прецессионное движение. Кроме того, вместо программного движения использовано удобное для исполнения полупрограммное движение, состоящее из неуправляемого неравномерного движения и программного обратного управляемого движения, симметричного с предыдущим движением. Данный метод может быть реализован на предлагаемом робототехническом устройстве, а также на существующих в технике идентификационных устройствах при небольших изменениях в конструкции. Возможно применение метода в задачах идентификации крупногабаритных транспортных изделий – автомашин, спутников – при исполнении ими полупрограммных движений в условиях неизвестных диссипативных моментов.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Комитета по науке и высшей школе Санкт-Петербурга за 2009 г.

Литература

1. Гернет М.М., Ратобыльский В.Ф. Определение моментов инерции. – М.: Машиностроение, 1969.
2. Previati G., Mastinu G., Gobbi M, Advances on inertia tensor and centre of gravity measurement: The INTENSO+ system // SAWE paper. – 2009. – № 3465.
3. Беляков А.О., Блаженнова-Микулич Л.Ю. Идентификация инерционной матрицы консервативной колебательной системы // Вестн. Моск. ун-та. – 2005. – №3. – С. 25–28.
4. Беляков А.О., Сейранян А.П. Определение моментов инерции крупногабаритных тел по колебаниям в упругом подвесе // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2008. – № 2. – С. 49–62.
5. Bogdanov V.V., Volobuev V.S., Kudryashov A.I., Travin V.V. A Suite for Measuring Mass, Coordinates of the Center of Mass, and Moments of Inertia of Engineering Components // Measurement Techniques. – 2002. – V. 45. – № 2. – P. 168–172.
6. Hahn H., Niebergall M. Development of a measurement robot for identifying all inertia parameters of a rigid body in a single experiment// IEEE Trans. Control Systems Technol. – 2001. – № 9 (2). – P. 416–423.

7. Банит Ю.Р., Беляев М.Ю., Добринская Т.А., Ефимов Н.И., Сазонов В.В., Стажков В.М. Определение тензора инерции Международной космической станции по телеметрической информации // Космические исследования. – 2005. – Т. 43. – № 2. – С. 135–146.
8. Алексеев К.Б., Шадян А.В. Определение динамических параметров космического летательного аппарата по признакам динамической асимметрии // Машиностроение и инженерное образование. – 2007. – № 2. – С. 53–58.
9. Мельников В.Г. Метод идентификации тензоров инерции и центров масс твердых тел // III Всерос. совещание-семинар зав. каф. теоретической механики РФ – Пермь: ПГУ, 2004.
10. Мельников В.Г. Многочленные преобразования нелинейных систем управления// Известия вузов. Приборостроение. – 2007. – Т. 50. – № 5. – С. 20–25.
11. Патент РФ на изобр. №2262678. Мельников В.Г. Способ определения тензора инерции тела. – Опубл. БИ № 29, 20.10. 2005.
12. Мельников В.Г. Использование программных движений для идентификации тензора инерции и центра масс твердого тела // Известия вузов. Приборостроение. – 2007. – Т. 50. – № 8. – С. 33–36.
13. Шаховал С.Н. Исследование матричных алгебраических уравнений, определяющих тензор инерции через осевые моменты инерции // Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. – 2008. – № 47. – С. 196–201.

Мельников Виталий Геннадьевич – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой, melnikov@mail.ifmo.ru