

УДК 621.865.8

## УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ МЕХАТРОННОЙ СИСТЕМЫ С ГИБКИМ ВРАЩАТЕЛЬНЫМ ЗВЕНОМ: ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

Е.С. Скосарев<sup>а</sup>, С.А. Колюбин<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация

Адрес для переписки: [s.kolyubin@corp.ifmo.ru](mailto:s.kolyubin@corp.ifmo.ru)

### Информация о статье

Поступила в редакцию 04.06.18, принята к печати 18.07.18

doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-5-780-786

Язык статьи – русский

**Ссылка для цитирования:** Скосарев Е.С., Колюбин С.А. Управление движением мехатронной системы с гибким вращательным звеном: теория и эксперимент // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2018. Т. 18. № 5. С. 780–786. doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-5-780-786

### Аннотация

Рассмотрены вопросы моделирования и управления системами с гибкими звеньями при их использовании для задач манипуляции. На первом этапе на основе уравнений Эйлера–Лагранжа и метода предполагаемых мод получена динамическая модель мехатронной системы с гибким вращательным звеном. Модель имеет конечную размерность и может быть легко применена для компьютерного моделирования с целью исследования динамических характеристик системы и далее для разработки алгоритмов планирования траекторий и управления движением. Представлен алгоритм расчета программного управления, позволяющего осуществить без корректирующей обратной связи перемещение звена в горизонтальной плоскости из стартовой конфигурации в заданную за конечное время. При этом минимизируются нежелательные деформации в конечных точках траектории, вызванные эластичностью звена. Показаны результаты экспериментальной апробации алгоритма на мехатронном комплексе Quanser Rotary Flexible Link. Эксперименты продемонстрировали достижение цели управления для различных скоростей перемещения, а также достаточно точное совпадение результатов моделирования с экспериментальными.

### Ключевые слова

манипуляторы, роботы с гибкими звеньями, моделирование, динамика, управление

### Благодарности

Работа выполнена при государственной финансовой поддержке в рамках грантового соглашения «Технологии киберфизических систем: управление, вычисления, безопасность», проект № 617026.

## CONTROL OF THE MECHATRONIC SYSTEM WITH FLEXIBLE ROTATING LINK: THEORY AND EXPERIMENT

E.S. Skosarev<sup>a</sup>, S.A. Kolyubin<sup>a</sup>

<sup>а</sup> ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

Corresponding author: [s.kolyubin@corp.ifmo.ru](mailto:s.kolyubin@corp.ifmo.ru)

### Article info

Received 04.06.18, accepted 18.07.18

doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-5-780-786

Article in Russian

**For citation:** Skosarev E.S., Kolyubin S.A. Control of the mechatronic system with flexible rotating link: theory and experiment. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2018, vol. 18, no. 5, pp. 780–786 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-5-780-786

### Abstract

The paper discusses modeling and control of mechatronic systems with flexible links, which are widely used for manipulation tasks. At the first stage, a dynamic model of a mechatronic system with a flexible rotational link was obtained based on the Euler-Lagrange equations and the method of the assumed modes. The resulting model has finite dimensionality and can be easily adopted for simulation in order to study the dynamic characteristics of the system and further for trajectories planning and motion control. The algorithm for calculating feedforward control is presented, which enables transition of the link in a horizontal plane from the starting configuration to a given configuration in a finite time. In this case there is minimization of undesirable deformations at the end points of the trajectory caused by the elasticity of the link. The paper presents the results of the algorithm experimental verification on the mechatronic setup Quanser Rotary Flexible Link.

The experiments demonstrated that the control goal is achieved for different rotation velocities, as well as they show a match between simulation and experimental results.

#### **Keywords**

manipulators, robots with flexible links, modeling, dynamics, control

#### **Acknowledgements**

The work was carried out with the state financial support under the grant agreement "Technologies of cyber-physical systems: control, computation, security", project No. 617026.

### **Введение**

Роботы-манипуляторы предназначены для увеличения производительности, а также для помощи людям в утомительном труде и в опасных рабочих средах. Манипуляционный робот представляет собой пространственный управляемый механизм, заканчивающийся схватом или иным рабочим инструментом, с помощью которого можно перемещать объекты в рабочем пространстве, либо выполнять технологические операции [1].

Как правило, конструкция манипуляторов является избыточно массивной для обеспечения жесткости и достижения высокой точности положения рабочего органа при перемещении. Однако тяжелые манипуляторы требуют громоздких приводов для манипуляций в рабочем пространстве. Кроме того, они потребляют много энергии и имеют ограниченную скорость перемещения в отношении рабочей нагрузки [2]. Уменьшение массы звеньев манипулятора при сохранении их габаритов позволяет уменьшить потребление энергии, затрачиваемой на перемещение, и использовать приводы меньшей мощности. С другой стороны, зачастую стоит задача увеличения рабочей области манипулятора или грузоподъемности при минимальной массе звеньев. Исходя из этого, исследовательский интерес к роботам-манипуляторам с гибкими звеньями не ослабевает на протяжении последних лет [3].

Свойства и возможности, предоставляемые гибкими манипуляторами, позволяют найти им применение при открытии новых приложений для роботов. Например, одним из приложений облегченных гибких звеньев является поворотная спасательная пожарная лестница. Благодаря такой конструкции увеличиваются максимальные операционные скорости, максимальная длина и, соответственно, длина охвата [4].

Гибкие манипуляторы, оснащенные активной системой контроля вибрации, могут достигать точности традиционных промышленных роботов, но с малой массой движущихся частей и сниженными затратами и энергопотреблением. Некоторые известные примеры включают применение в пищевой промышленности для роботизированной упаковки и палетизации, в сборочных задачах на производстве и в космических приложениях. Новые человекоподобные роботы, где явная потребность в сокращении массы является необходимой для их эксплуатации, представляют собой, несомненно, область, где технологии гибких манипуляторов должны играть важную роль в будущем [5].

Однако из-за того, что манипуляторы с гибкими звеньями являются системами с распределенными параметрами, т.е. в общем случае их динамика должна описываться уравнениями в частных производных по временным и пространственным координатам, задачи моделирования и управления представляют значительно большую сложность по сравнению со случаями, когда эластичностями можно пренебречь [6–8]. Более того, для компенсации эффектов изгиба и, таким образом, обеспечения надежного управления разработка регуляторов фокусируется на так называемых несомещенных контроллерах [9, 10]. Исследования роботов с гибкими звеньями варьируются от однозвенных, вращающихся вокруг фиксированной оси, до трехмерных многозвенных рук [11, 12]. При этом экспериментальные работы в большинстве случаев ограничены рассмотрением систем с одной степенью свободы.

В действительности гибкость звеньев необходимо учитывать уже на этапе моделирования системы, причем в модели должен быть найден правильный баланс между точностью и удобством использования при дальнейшем планировании траекторий и синтезе регуляторов. Задачей данной работы является синтез модели и расчет программного управления, т.е. крутящих моментов в сочленениях как функций времени, обеспечивающих движение по траектории, так что звено приходит в желаемое положение за заданное время, причем нежелательные вибрации при остановке отсутствуют [13]. Также целью является организация и проведение эксперимента на реальной мехатронной системе для сопоставления полученных данных с теоретическими расчетами. В рассматриваемом примере мехатронная система имеет одно звено, однако представленный результат применим и для многозвенных систем, где последнее (конечное) звено кинематической цепи является гибким.

### **Моделирование мехатронной системы с гибким звеном**

В данном разделе представлена разработка математической модели мехатронной системы с гибким звеном, пригодной для использования в задачах планирования траекторий и управления движением, а также решение проблемы нахождения управляющего воздействия, которое обеспечит движение от покоя к покою за определенное время, например, за время 1, 2 и 4 секунды.

Рассмотрим систему, представляющую собой вращающийся однозвенный манипулятор с гибким звеном длиной  $l$ , плотностью  $\rho$ , движущийся в горизонтальной плоскости. Система представлена на рис. 1, где  $CoM$  обозначает центр масс звена.

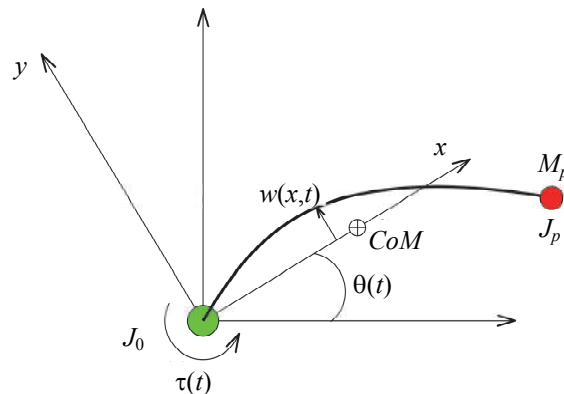


Рис. 1. Система с гибким звеном

Предполагается, что малые деформации ограничены плоскостью движения. Система приводится в движение электрическим двигателем с крутящим моментом  $\tau(t)$  и переносит полезную нагрузку на конце звена.

Полный момент инерции стержня относительно оси вращения рассчитывается по формуле:

$$J = J_0 + \frac{\rho l^3}{3} + J_p + M_p l^2,$$

где  $J_0$  – это момент инерции двигателя,  $M_p$  – масса полезной нагрузки на конце звена длиной  $l$ ,  $J_p$  – собственный момент инерции нагрузки, а  $\frac{\rho l^3}{3}$  – момент инерции стержня, где  $\rho$  – плотность стержня.

Моделирование звена будет производиться в виде балки Эйлера–Бернулли с модулем Юнга  $E$  и моментом инерции сечения балки  $I$ . Пусть  $\theta(t)$  – угол между инерциальной системой координат и осью  $x$  вращающейся системы координат. Поперечная деформация изгиба в точке  $x \in [0, l]$  вдоль звена  $w(x, t)$  удовлетворяют следующим линейным дифференциальным уравнениям [14]:

$$EIw''''(x, t) + \rho(\ddot{w}(x, t) + x\ddot{\theta}(x, t)) = 0,$$

$$\tau(t) - J\ddot{\theta}(t) = 0,$$

где  $EI$  – жесткость балки на изгиб.

Путем разделения в пространстве и времени конечномерная аппроксимация распределенной деформации изгиба получается при помощи метода предполагаемых мод по уравнению [15], являющемуся частным случаем метода Фурье [16]:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{n_e} \phi_i(x) \delta_i(t),$$

где  $n_e$  – произвольное число ортогональных мод, которые мы хотим включить,  $\phi_i(x)$  – моды деформации и  $\delta_i(t)$  – координаты деформации. Пространственное решение для мод деформации имеет форму следующего уравнения:

$$\phi_i(x) = A_i \sin(\beta_i x) + B_i \cos(\beta_i x) + C_i \sinh(\beta_i x) + D_i \cosh(\beta_i x),$$

где  $\beta_i^4 = \frac{\rho \omega_i^2}{EI}$  для  $i = 1, \dots, n_e$  –  $n_e$  первых корней характеристического уравнения, имеющего бесконечное число решений:

$$\left( \text{csh} - \text{sch} \right) - \frac{2M_p}{\rho} \beta \text{ssh} - \frac{2J_p}{\rho} \beta^3 \text{cch} - \frac{J_0}{\rho} \beta^3 (1 + \text{cch}) - \frac{M_p}{\rho^2} \beta^4 (J_0 + J_p) (\text{csh} - \text{sch}) + \frac{J_0 J_p}{\rho^2} \beta^6 (\text{csh} + \text{sch}) - \frac{J_0 J_p M_p}{\rho^3} \beta^7 (1 - \text{cch}) = 0.$$

Здесь использованы сокращенные обозначения  $s = \sin(\beta l)$ ,  $c = \cos(\beta l)$ ,  $sh = \sinh(\beta l)$ ,  $ch = \cosh(\beta l)$ , а коэффициенты  $A_i, B_i, C_i, D_i$  получены из геометрических граничных условий [17].

Линейная динамическая модель для мехатронной системы с гибким звеном получена из уравнений Эйлера–Лагранжа в следующем виде:

$$J\ddot{\theta} = \tau, \tag{1}$$

$$\ddot{\delta}_i + \omega_i^2 \delta_i = \phi_i'(0) \tau, i = 1, \dots, n_e. \tag{2}$$

Рассмотрим желаемое движение от покоя к покою для однозвенного гибкого манипулятора, смоделированного при помощи уравнений (1) и (2). Манипулятор перемещается от начальной недеформированной конфигурации,  $q_i = (\theta_i, 0)$  в момент времени  $t_i = 0$ , к конечной недеформированной конфигурации,  $q_i = (\theta_f, 0)$  в момент времени  $t_f = T$ , с  $\dot{q}(0) = \dot{q}(T) = 0$ .

Проблема движения от покоя к покою может быть решена путем определения интерполяционной траектории  $y = y_d(t)$  с подходящими граничными условиями. Достаточно положить, что  $y_d(0) = \theta_i$ ,  $y_d(T) = \theta_f$  со всеми производными, равными нулю в начальное и конечное время.

$$y_d^{[k]}(0) = y_d^{[k]}(T) = 0 \quad k = 1, \dots, (2n_e + 1).$$

Выбирая полином степени  $4n_e + 5$  и накладывая условие, что  $y_d^{2n_e+2} = 0$ , гарантируется, что график изменения момента начинается и заканчивается в нуле.

В конкретном случае движения от покоя к покою можно получить выражение для номинального крутящего момента в общем виде:

$$\tau(t) = \frac{J}{\prod_{i=1}^{n_e} \omega_i^2} [y_d^{2n_e+2} + \sum_{i=0}^{n_e-1} \alpha_i y_d^{2i+2}],$$

где  $n_e$  коэффициентов  $\alpha_i$  получаются сверткой полиномов  $(s^2 + \omega^2)$ . Крутящие моменты при различных заданиях времени представлены на рис. 2.

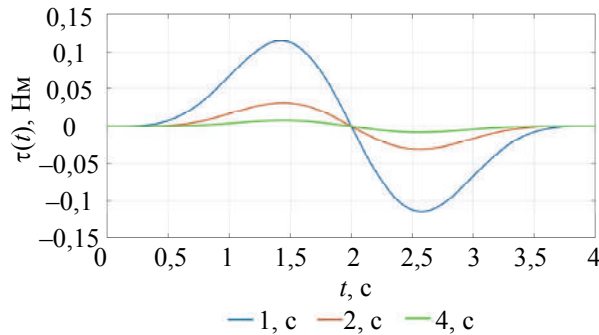


Рис. 2. Крутящие моменты  $\tau(t)$

Из рис. 2 видно, что при уменьшении времени на совершение одного и того же перемещения гибкого звена общий характер зависимости крутящего момента от времени сохраняется, а максимальная амплитуда увеличивается, при этом сигналы не достигают порогов насыщения.

Пример желаемой траектории  $y_d(t)$  для времени перемещения в 2 с представлен на рис. 3. Перемещение происходит из позиции 0 рад до  $\frac{\pi}{2}$  рад, причем наблюдается очень плавное изменение координаты в начальной и конечных фазах движения.

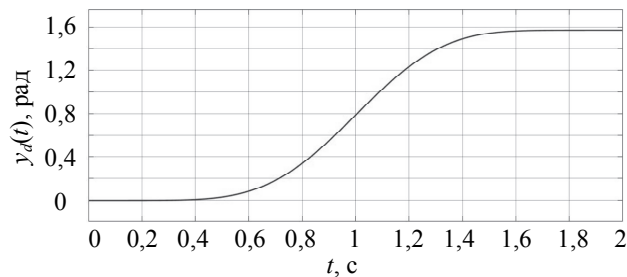


Рис. 3. Желаемая траектория  $y_d(t)$

Первые (значимые) моды координаты деформации  $\delta(t)$  представлены на рис. 4. Как видно из рис. 4, при уменьшении времени на перемещение деформация на старте значительно возрастает, но при приближении к конечному положению всегда затухает до нулевого значения. Это подтверждает, что крутящие моменты для поставленной задачи были рассчитаны верно.

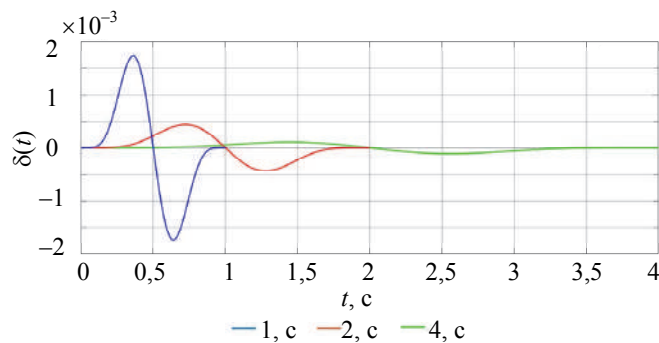


Рис. 4. Координаты деформации  $\delta(t)$

## Экспериментальная апробация результатов

Технические характеристики робота с гибким звеном представлены в таблице.

Символ	Описание	Значение	Единица измерения
$L_1$	Длина гибкого звена	0,45	м
$m_1$	Масса звена	0,06	кг
$J_l$	Момент инерции	0,0038	кг·м <sup>2</sup>
$EI$	Жесткость при изгибе	0,1621	Н·м <sup>2</sup>
$\rho$	Линейная плотность	0,1333	кг/м
$F_v$	Коэффициент вязкого трения	0,015	Н·м/(рад/с)

Таблица. Технические характеристики

Экспериментальные результаты, представленные далее, получены при использовании  $n_e = 3$  мод в динамической модели и представляют собой поворотное движение на  $90^\circ$  за время  $T = 1, 2$  и  $4$  с. Выходная траектория – полином 19-й степени, что гарантирует нулевой крутящий момент и нулевую производную по времени крутящего момента в начальный и конечный моменты движения.

Для получения моментов, имеющих графики изменения по времени, представленные на рис. 2, необходимо подать входное напряжение, которое рассчитывается по следующей формуле [18]:

$$V_m = \frac{\tau R_m}{\eta_g K_g \eta_m k_t} + K_g k_m \dot{\theta},$$

где  $R_m$  – сопротивление ротора двигателя;  $\eta_g$  – КПД редуктора;  $K_g$  – общее передаточное отношение;  $\eta_m$  – КПД двигателя;  $k_t$  – постоянная тока двигателя;  $k_m$  – постоянная противо-ЭДС двигателя.

Чтобы обеспечить переход из одной недеформированной конфигурации в другую за конечное время, необходимо учесть в модели вязкое трение. В номинальный крутящий момент необходимо добавить член, вычисляемый по следующей формуле:

$$\tau_{F,d}(t) = F_s \text{sign}(\dot{\theta}_{c,d}) + F_v \dot{\theta}_{c,d},$$

где  $F_s$  и  $F_v$  – коэффициенты статического и вязкого трения соответственно. В данной работе учитывается только  $F_v = 0,015$  Н·м/(рад/с).

Крутящий момент с учетом вязкого трения для двух секунд представлен на рис. 5. График изменения момента, представленный на рис. 6, имеет несколько другую форму, чем тот, который был представлен на рис. 2, за счет учета вязкого трения.

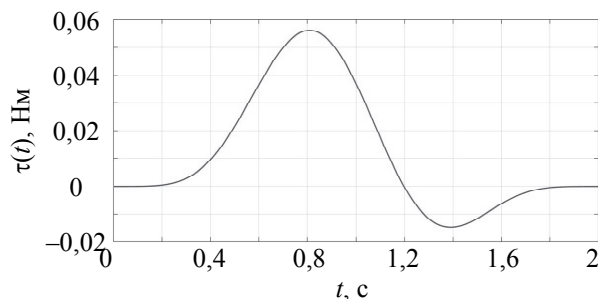


Рис. 5. Крутящий момент  $\tau$  с учетом трения

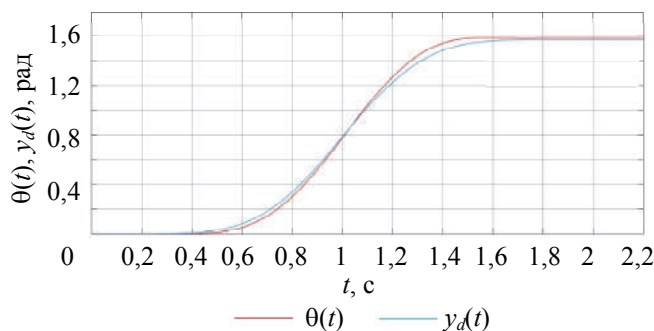


Рис. 6. Траектория  $y_d(t)$  и реальное значение  $\theta(t)$

Спланированная траектория  $y_d(t)$  для двух секунд и реальное значение  $\theta(t)$ , снимаемое с оптического энкодера, представлены на рис. 6. Как видно из рис. 6, графики спланированной траектории и ре-

ального значения угла поворота практически совпадают благодаря правильно рассчитанному крутящему моменту, что в результате позволяет совершить движение от покоя к покою.

Пример движения звена при различных заданиях времени на перемещение звена от начального положения к конечному представлен на рис. 7. Графики на рис. 7 показывают, что для всех временных интервалов рассчитанное программное управление переводит звено из начальной в заданную конечную конфигурацию.

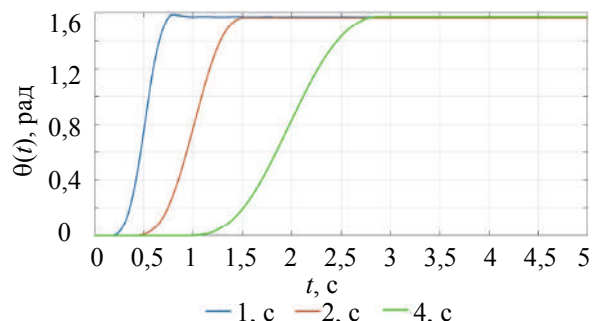


Рис. 7. Графики углов поворота гибкого звена для различного времени перехода между конфигурациями

Угол деформации гибкого звена  $\alpha(t)$ , определяемый тензодатчиком, установленным на закрепленном конце звена, представлен на рис. 8. Рис. 8 иллюстрирует, что на практике, как и в моделировании, при уменьшении времени на перемещение угол отклонения звена от недеформированного состояния значительно возрастает. При этом в эксперименте прослеживаются колебания эластичного звена в конечной конфигурации с амплитудой, не превышающей 0,003 градуса. Это связано с тем, что реальные и номинальные параметры мехатронной системы отличаются, и мы пренебрегаем возможными люфтами и сухим трением в сочленении. Однако наличие малых затухающих колебаний не противоречит тому, что алгоритм программного управления справляется с поставленной задачей перемещения гибкого звена из состояния покоя в состояние покоя с гашением паразитных колебаний. Различие между рис. 3 и рис. 8 обосновано тем, что на них представлены графики величин, имеющих разный физический смысл.

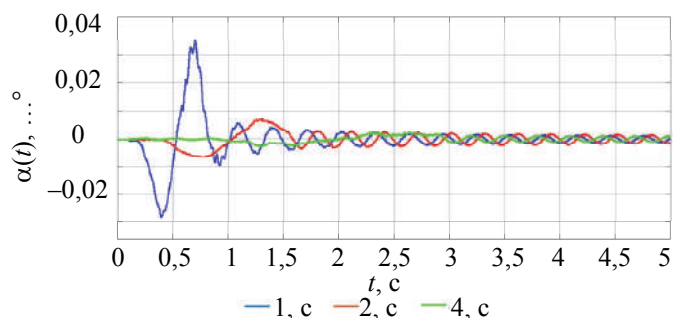


Рис. 8. Угол деформации гибкого звена  $\alpha(t)$

### Заключение

В результате выполненной работы получена модель звена в виде балки Эйлера–Бернулли. Конечномерная аппроксимация осуществлена методом предполагаемых мод. Представленная модель может быть использована в системах управления при синтезе регуляторов. Получены уравнения движения и проведено компьютерное моделирование, а также экспериментальная апробация алгоритмов управления для перемещения из одной недеформированной конфигурации в другую на базе мехатронного комплекса Quanser. При этом учтено вязкое трение.

По результатам экспериментов можно сделать вывод, что представленный алгоритм управления для движения от покоя к покою справляется с поставленной задачей для различных значений времени, причем при увеличении времени на перемещение уменьшается угол отклонения звена в процессе перемещения. Также стоит отметить, что при задании времени, большего 4с, при перемещении используется меньший крутящий момент, который в начальные мгновения движения не позволяет преодолеть момент сопротивления трения, из-за чего график изменения угла  $\theta(t)$  отстает от  $y_d(t)$ , а для малого времени в конечной фазе движения наблюдается опережение желаемой траектории. Для преодоления указанных недостатков в дальнейшем можно к используемому регулятору без обратной связи добавить пропорционально-дифференциальный регулятор.

## Литература

1. Колобин С.А. Динамика робототехнических систем. СПб.: Университет ИТМО, 2017. 117 с.
2. Hirzinger G., Fischer M. et al. Advances in robotics: the DLR experience // *The International Journal of Robotics Research*. 1999. V. 18. N 11. P. 1064–1087. doi: 10.1177/02783649922067726
3. Wang F.Y., Gao Y. *Advanced Studies of Flexible Robotic Manipulators: Modeling, Design, Control, and Applications*. World Scientific, 2003. 456 p.
4. Sawodny O., Aschemann H., Bulach A. Mechatronical designed control of fire rescute turntable ladders as flexible link robots // *Proc. 15<sup>th</sup> IFAC World Congress*. Barcelona, 2002. V. 35. N 1. P. 509–514. doi: 10.3182/20020721-6-es-1901.00897
5. Aubrun J. Theory of the control structures by low-authority controllers // *Journal of Guidance and Control*. 1980. V. 3. N 5. P. 444–451. doi: 10.2514/3.56019
6. Siciliano B., Yuan B.S., Book W.J. Model reference adaptive control of a link flexible arm // *Proc. 25<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*. 1986. P. 91–95. doi: 10.1109/cdc.1986.267160
7. Plunkell R., Lee C.T. Length optimization for constrained viscoelastic layer damping // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1970. V. 48. P. 150–161. doi: 10.1121/1.1912112
8. Cannon R.H., Schmitz E. Initial experiments on end-point control of a flexible one-link robot // *The International Journal of Robotics Research*. 1984. V. 3. N 3. P. 62–75. doi: 10.1177/027836498400300303
9. Harashima F., Ueshiba T. Adaptive control of flexible arm using the endpoint position sensing // *Proc. Japan-USA Symposium on Flexible Automation*. Osaka, 1986. P. 225–229.
10. Hastings G., Book W. A linear dynamic model for flexible robotic manipulators // *IEEE Control Systems Magazine*. 1987. V. 7. N 1. P. 61–64. doi: 10.1109/MCS.1987.1105233
11. Nagathan G., Soni A.H. Non-linear flexibility studies for spatial manipulators // *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*. San Francisco, 1986. V. 3. P. 373–378. doi: 10.1109/ROBOT.1986.1087719
12. Tokhi M., Azad A.K.M. *Flexible Robot Manipulators: Modelling, Simulation and Control*. London, 2008. 579 p.
13. DeLuca A. Feedforward/feedback laws for the control of flexible robots // *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation. Symposia Proceedings*. 2000. V. 1. P. 233–240. doi: 10.1109/ROBOT.2000.844064
14. DeLuca A., Valerio C., Del Vecovo D. Experiments on rest to rest motion of a flexible arm // *Experimental Robotics VIII*. 2003. V. 5. P. 338–349. doi: 10.1007/3-540-36268-1\_30
15. Meirovitch L. *Elements of Vibration Analysis*. NY: McGraw-Hill, 1975. 560 p.
16. Знаменская Л.Н. Управление упругими колебаниями. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 176 с.
17. DeLuca A., Di Giovanni G. Rest-to-rest motion of a one-link flexible arm // *Proc. IEEE/ASME Int. Conf. on Advanced Intelligent Mechatronics*. 2001. V. 2. P. 923–928. doi: 10.1109/AIM.2001.936793
18. *User Manual: Flexible Link Experiment. Set Up and Configuration*. Quanser Inc., 2012.

## Авторы

**Скосарев Евгений Сергеевич** – инженер, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, ORCID ID: 0000-0002-4446-2077, skosarew@mail.ru

**Колобин Сергей Алексеевич** – кандидат технических наук, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Scopus ID: 35303066700, ORCID ID: 0000-0002-8057-1959, s.kolyubin@corp.ifmo.ru

## References

1. Kolyubin S.A. *Dynamics of Robotic Systems*. St. Petersburg, ITMO University Publ., 2017, 117 p. (in Russian)
2. Hirzinger G., Fischer M. et al. Advances in robotics: the DLR experience. *The International Journal of Robotics Research*, 1999, vol. 18, no. 11, pp. 1064–1087. doi: 10.1177/02783649922067726
3. Wang F.Y., Gao Y. *Advanced Studies of Flexible Robotic Manipulators: Modeling, Design, Control, and Applications*. World Scientific, 2003, 456 p.
4. Sawodny O., Aschemann H., Bulach A. Mechatronical designed control of fire rescute turntable ladders as flexible link robots. *Proc. 15<sup>th</sup> IFAC World Congress*. Barcelona, 2002, vol. 35, no. 1, pp. 509–514. doi: 10.3182/20020721-6-es-1901.00897
5. Aubrun J. Theory of the control structures by low-authority controllers. *Journal of Guidance and Control*, 1980, vol. 3, no. 5, pp. 444–451. doi: 10.2514/3.56019
6. Siciliano B., Yuan B.S., Book W.J. Model reference adaptive control of a link flexible arm. *Proc. 25<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, 1986, pp. 91–95. doi: 10.1109/cdc.1986.267160
7. Plunkell R., Lee C.T. Length optimization for constrained viscoelastic layer damping. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1970, vol. 48, pp. 150–161. doi: 10.1121/1.1912112
8. Cannon R.H., Schmitz E. Initial experiments on end-point control of a flexible one-link robot. *The International Journal of Robotics Research*, 1984, vol. 3, no. 3, pp. 62–75. doi: 10.1177/027836498400300303
9. Harashima F., Ueshiba T. Adaptive control of flexible arm using the endpoint position sensing. *Proc. Japan-USA Symposium on Flexible Automation*. Osaka, 1986, pp. 225–229.
10. Hastings G., Book W. A linear dynamic model for flexible robotic manipulators. *IEEE Control Systems Magazine*, 1987, vol. 7, no. 1, pp. 61–64. doi: 10.1109/MCS.1987.1105233
11. Nagathan G., Soni A.H. Non-linear flexibility studies for spatial manipulators. *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*. San Francisco, 1986, vol. 3, pp. 373–378. doi: 10.1109/ROBOT.1986.1087719
12. Tokhi M., Azad A.K.M. *Flexible Robot Manipulators: Modelling, Simulation and Control*. London, 2008, 579 p.
13. DeLuca A. Feedforward/feedback laws for the control of flexible robots. *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation. Symposia Proceedings*, 2000, vol. 1, pp. 233–240. doi: 10.1109/ROBOT.2000.844064
14. DeLuca A., Valerio C., Del Vecovo D. Experiments on rest to rest motion of a flexible arm. *Experimental Robotics VIII*, 2003, vol. 5, pp. 338–349. doi: 10.1007/3-540-36268-1\_30
15. Meirovitch L. *Elements of Vibration Analysis*. NY, McGraw-Hill, 1975, 560 p.
16. Znamenskaya L.N. *Control of Elastic Vibrations*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004, 176 p. (in Russian)
17. DeLuca A., Di Giovanni G. Rest-to-rest motion of a one-link flexible arm. *Proc. IEEE/ASME Int. Conf. on Advanced Intelligent Mechatronics*, 2001, vol. 2, pp. 923–928. doi: 10.1109/AIM.2001.936793
18. *User Manual: Flexible Link Experiment. Set Up and Configuration*. Quanser Inc., 2012.

## Authors

**Evgeny S. Skosarev** – engineer, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, ORCID ID: 0000-0002-4446-2077, skosarew@mail.ru

**Sergey A. Kolyubin** – PhD, Associate Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Scopus ID: 35303066700, ORCID ID: 0000-0002-8057-1959, s.kolyubin@corp.ifmo.ru