УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ
январь–февраль 2019 Том 19 № 1 ISSN 2226-1494 http://ntv.ifmo.ru/
SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL OF INFORMATION TECHNOLOGIES, MECHANICS AND OPTICS
January–February 2019 Vol. 19 No 1 ISSN 2226-1494 http://ntv.ifmo.ru/en

УДК 62.50

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КАК УСЛОВНАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА С ПОДВИЖНОЙ ПРАВОЙ ГРАНИЦЕЙ

А.А. Ведяков[a], Е.В. Милованович[a,b], В.Ю. Тертычный-Даури[a], Г.В. Тимофеева[a]

[a] Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация
[b] Санкт-Петербургский государственный химико-фармацевтический университет, Санкт-Петербург, 197376, Российская Федерация
Адрес для переписки: tertychny-dauri@mail.ru

Информация о статье
Поступила в редакцию 01.12.18, принята к печати 25.12.18
doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-1-59-66
Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Ведяков А.А., Милованович Е.В., Тертычный-Даури В.Ю., Тимофеева Г.В. Оптимальное управление как условная вариационная задача с подвижной правой границей // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2019. Т. 19. № 1. С. 59–66. doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-1-59-66

Аннотация
Предмет исследования. Рассмотрена задача оптимального управления динамической системой, относящаяся к классу условных вариационных задач с подвижными границами. Выполнено вариационное исследование управляемой упругой механической системы с регулируемой жесткостью пружины. **Методы.** Задача решена с использованием схем и процедур классического вариационного исчисления, которые включают вывод вариации вспомогательного функционала качества и соответствующих уравнений Эйлера. При решении общей условной вариационной задачи изучена полученная замкнутая система дифференциальных уравнений для конструирования оптимальной системы управления исходным динамическим объектом с заданным функционалом качества. **Основные результаты.** Обобщаются результаты безусловной постановки задачи на случай дополнительных дифференциальных (неголономных) связей. В вариационной задаче оптимального управления условие трансверсальности сформулировано в терминах условия локального программирования. В модельном примере с упругим осциллятором построен алгоритм оптимального управления и найдено конечное время переходного процесса. **Практическая значимость.** Предложенная вариационная схема оптимального синтеза может быть использована при расчете и проектировании управляемых динамических систем. Эта оптимизационная схема перспективна также для применения в управляемых динамических системах, у которых время функционирования заранее не фиксировано.

Ключевые слова
подвижная граница, функционал качества, оптимальное управление, вариация функционала, условие трансверсальности

OPTIMAL CONTROL AS CONDITIONAL VARIATIONAL PROBLEM WITH VARIABLE RIGHT ENDPOINT

A.A.Vedyakov[a], E.V. Milovanovich[a,b], V. Yu. Tertychny-Dauri[a], G.V. Timofeeva[a]

[a]ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation
[b]Saint Petersburg State University of Chemical Pharmaceutics (SPCPU), Saint Petersburg, 197376, Russian Federation
Corresponding author: tertychny-dauri@mail.ru

Article info
Received 01.12.18, accepted 25.12.18
doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-1-59-66
Article in Russian

For citation: Vedyakov A.A., Milovanovich E.V., Tertychny-Dauri V. Yu., Timofeeva G.V. Optimal control as conditional variational problem with variable right endpoint. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2019, vol. 19, no. 1, pp. 59–66 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-1-59-66

Abstract
Subject of research. We consider dynamical system optimal control problem relating to a class of conditional variation problems with variable endpoints. Variational method is applied for research of the elastic mechanical system with controllable spring stiffness. **Methods.** The classical calculus of variational methods is used, which includes a variation of auxiliary functional and corresponding Euler equations. In solving a general conditional variation problem, the obtained

differential system of equations in closed form is studied for design of an optimal control system for the initial dynamic object with a given quality functional. **Main results.** Results of unconstrained optimization are generalized to the case with additional differential (nonholonomic) constraints. Transversality condition in the variational problem is formulated in terms of local programming. An optimal control algorithm is constructed in the elastic oscillator model example, and the value of finite transition period is found. **Practical relevance.** The proposed approach can be used in optimal control design for dynamical systems. This optimization scheme can be also applied to controlled dynamic systems, when operation time is not fixed in advance.

Keywords
variable endpoint, performance functional, optimal control, functional variation, transversality condition

Введение. Постановка задачи

В классическом вариационном исчислении задача с подвижными границами (или, что то же самое, со свободными концами) относительно верхнего предела интегрирования изучается в рамках безусловной постановки (см., например, работы [1–4]). В настоящей статье этот тип вариационных задач обобщается на случай наличия дополнительного условия в виде дифференциальной (неголономной) связи и свободной правой границы.

Зададимся функционалом следующего вида:

$$J = V[\mathbf{x}(t_1),t_1] + \int_{t_0}^{t_1} F[\mathbf{x}(t),\dot{\mathbf{x}}(t),t]dt \to \text{extr}, \tag{1}$$

экстремум которого надо найти при обеспечении n дифференциальных (неголономных) независимых связей

$$\psi(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},\mathbf{u},t) = f(\mathbf{x},\mathbf{u},t) - \dot{\mathbf{x}} = 0, \tag{2}$$

которые описывают задание движения динамической управляемой системы с уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x},\mathbf{u},t), \qquad \mathbf{x},\mathbf{u} \in R^n.$$

Здесь $\mathbf{x}(t) \in R^n$ – вектор состояния, $\dot{\mathbf{x}}(t) \in R^n$ – скорость изменения вектора состояния, $\mathbf{u}(t) \in U \subset R^n$ – вектор управления, U – множество допустимых управлений; d – дифференциал. Полагаем в (1) скалярные функции $V(\cdot)$, $F(\cdot)$ заданными и непрерывно дифференцируемыми по всем своим переменным.

Считается, что правый конец t_1 промежутка времени интегрирования $[t_0,t_1]$ не задан; более того, не указано также значение вектора $\mathbf{x}(t_1)$, т.е. правый конец по состоянию системы не фиксирован. Фиксированы лишь величины $t_0, \mathbf{x}(t_0)$.

Задача (1), (2) порождает вспомогательный функционал качества

$$J_* = V[\mathbf{x}(t_1),t_1] + \int_{t_0}^{t_1} \{F[\mathbf{x}, f(\mathbf{x},\mathbf{u},t),t] + \boldsymbol{\mu}^T(t)\psi(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},\mathbf{u},t)\}dt \to \text{extr}$$

с неопределенными множителями Лагранжа $\boldsymbol{\mu}(t) \in R^n$. Здесь надо иметь в виду, что свободные (или подвижные) параметры $(t_1, \mathbf{x}(t_1))$ наряду с множителями Лагранжа могут использоваться как еще один класс параметров, оптимизирующих выбираемую систему управления.

После интегрирования по частям J_* получим

$$J_* = V[\mathbf{x}(t_1),t_1] + \boldsymbol{\mu}^T(t)\mathbf{x}(t)\big|_{t_1}^{t_0} + \int_{t_0}^{t_1} G(\mathbf{x},\mathbf{u},t)dt,$$

$$G(\mathbf{x},\mathbf{u},t) \equiv G(\mathbf{x},\mathbf{u},t,\boldsymbol{\mu}(t),\dot{\boldsymbol{\mu}}(t)) = F(\mathbf{x},\mathbf{u},t) + \boldsymbol{\mu}^T(t) f(\mathbf{x},\mathbf{u},t) + \dot{\boldsymbol{\mu}}^T(t)\mathbf{x}(t). \tag{3}$$

Вариация функционала качества

Вычислим далее вариацию функционала (3) на экстремальных движениях (решениях) с подвижной границей $(t_1, \mathbf{x}(t_1))$, где $\delta\mathbf{x}(t_0) = 0$, учитывая возникающие вариации $\delta\mathbf{x}(t)$, $\delta\mathbf{u}(t)$, $\delta\mathbf{x}(t_1)$, δt_1 с точностью до величин второго порядка малости, используя следующее утверждение.

Теорема. В указанных предположениях вариация (3) задается выражением

$$\delta J_* = \left(\frac{\partial V[\mathbf{x}(t_1),t_1]}{\partial \mathbf{x}(t_1)} - \boldsymbol{\mu}^T(t_1)\right)\delta\mathbf{x}(t_1) + \left(\frac{\partial V[\mathbf{x}(t_1),t_1]}{\partial t_1} + G(\mathbf{x},\mathbf{u},t)\big|_{t=t_1} + \boldsymbol{\mu}^T(t_1)\dot{\mathbf{x}}(t_1)\right)\delta t_1 +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{u},t)}{\partial \mathbf{x}}\delta\mathbf{x} + \frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{u},t)}{\partial \mathbf{u}}\delta\mathbf{u}\right]dt, \tag{4}$$

полученным с точностью до малых второго порядка.

Замечание. Доказательство теоремы здесь не приводится ввиду громоздкости, отметим только, что оно полностью укладывается в известные схемы, типичные для вариационного исчисления [2, 4].

Далее выберем множители $\boldsymbol{\mu}(t)$, $\boldsymbol{\mu}(t_1)$ так, чтобы выражения при $\delta\mathbf{x}(t)$, $\delta\mathbf{x}(t_1)$ в соотношении (4) обратились в нуль. Получим отсюда систему n уравнений Эйлера по $\mathbf{x}$ с граничным условием на правом конце:

$$\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{u},t)}{\partial \mathbf{x}} = 0,\ \boldsymbol{\mu}(t_1) = \left(\frac{\partial V(\mathbf{x}(t_1),t_1)}{\partial \mathbf{x}(t_1)}\right)^T, \tag{5}$$

где индекс T означает транспонирование.

Таким образом, выражение (4) при наличии требований (5) переписывается в виде

$$\delta J_* = \left(\frac{\partial V(\mathbf{x}(t_1),t_1)}{\partial t_1} + G(\mathbf{x},\mathbf{u},t)\big|_{t=t_1} + \boldsymbol{\mu}^T(t_1)\dot{\mathbf{x}}(t_1)\right)\delta t_1 + \int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{u},t)}{\partial \mathbf{u}}\delta\mathbf{u}\,dt. \tag{6}$$

Положим в равенстве (6) выполненным условие

$$\frac{\partial V(\mathbf{x}(t_1),t_1)}{\partial t_1} + G(\mathbf{x}(t_1),\mathbf{u}(t_1),t_1) + \boldsymbol{\mu}^T(t_1)\dot{\mathbf{x}}(t_1) = 0,$$

которое может быть исходя из условия (5) представлено скалярным уравнением

$$\frac{\partial V(\mathbf{x}(t_1),t_1)}{\partial t_1} + \frac{\partial V(\mathbf{x}(t_1),t_1)}{\partial \mathbf{x}(t_1)}\dot{\mathbf{x}}(t_1) + G(\mathbf{x}(t_1),\mathbf{u}(t_1),t_1) = 0,$$

либо после сворачивания первых двух слагаемых

$$\frac{\mathrm{d}V(\mathbf{x}(t_1),t_1)}{\mathrm{d}t_1} + G(\mathbf{x}(t_1),\mathbf{u}(t_1),t_1) = 0,$$

либо в итоге

$$\frac{dJ_*}{dt_1} = 0. \tag{7}$$

Условие трансверсальности

Требование (7) представляет собой условие трансверсальности J_* в граничной точке t_1, оно совпадает с хорошо известным условием оптимальности в задачах локального программирования [5–8], где интегральный функционал качества имеет переменный верхний предел t.

Условие локальной оптимальности превращается в принцип минимума производной функционала качества J_* на семействе оптимальных управлений:

$$\left.\frac{dJ_*}{dt}\right|_{u_0} = \min_{\mathbf{u}\in U}\frac{dJ_*}{dt} = 0.$$

Считая условие локальной оптимальности (7) во временной точке t_1 выполненным, получим исходя из выражения (6) выполненным соотношение

$$\delta J_* = \int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{u},t)}{\partial \mathbf{u}}\delta\mathbf{u}\,dt. \tag{8}$$

Для обеспечения необходимых условий стационарности критерия качества J_* (т.е. $\delta J = \delta J_* = 0$), очевидно, требуется, чтобы в интеграле (8):

$$\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{u},t)}{\partial \mathbf{u}} = 0. \tag{9}$$

Подведем итог. Совокупность $2n$ уравнений Эйлера (5), (9) вместе с n уравнениями связей (2) представляет собой замкнутую систему уравнений для нахождения вектор-функций $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$, $\boldsymbol{\mu}(t)$, обеспечивающих решение исходной условной вариационной задачи (задачи оптимального управления) с подвижной границей на правом конце.

Модельный пример

Полученные теоретические выводы апробируем на конкретном примере. Рассмотрим движение тела массой m, связанного с неподвижной опорой при помощи пружины с регулируемой жесткостью $c = c(t) = u(t)$. Предполагается, что тело может перемещаться по горизонтальным прямолинейным направлениям, а значение c зависит от времени, меняясь, например, за счет тепловых или электромагнитных воздействий.

Назовем исследуемую систему управляемым упругим осциллятором. Его движение будем описывать уравнением, характерным для гармонического осциллятора

$$m\ddot{\mathbf{q}} = -c\mathbf{q},$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ – обобщенная координата, соответствующая отклонению тела от точки O (центра системы координат). Точка O помещена на расстоянии l от точки крепления пружины с опорой, l – длина расслабленной пружины. Данная система определяется также кинетической энергией $\mathbf{T} = m\dot{\mathbf{q}}^2/2$ и обобщенной управляющей и восстанавливающей силой $\mathbf{Q} = -c(t)\mathbf{q}$.

Требуется в этих условиях оптимальным образом синтезировать движение упругого осциллятора, с тем чтобы обеспечить минимизацию энергетического функционала качества

$$J = \mathbf{x}^2(t_1) + \int_0^{t_1}(\mathbf{x}^2(t) + \dot{\mathbf{x}}^2(t))\mathrm{d}t = = \mathbf{x}^2(t_1) + \int_0^{t_1}(\mathbf{x}^2(t) + f^2(\mathbf{x},u))dt \to \min_{u\in U},$$

где введены обозначения для векторов $\mathbf{x}, f \in R^2$ и скалярного управления $u(t) = c(t) \in R$:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}\mathbf{q}\\ \dot{\mathbf{q}}\end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix}\dot{\mathbf{q}}\\ -u\mathbf{q}/m\end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^2 = \mathbf{q}^2 + \dot{\mathbf{q}}^2, \quad f^2 = \dot{\mathbf{q}}^2 + \frac{u^2\mathbf{q}^2}{m^2}$$

относительно компонентов уравнения движения, переписанного в нормальном виде

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x},u), \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix}x_2\\ -ux_1/m\end{pmatrix}.$$

Здесь $u(t)$ – фунция управления, выбираемая из множества допустимых $U = C^1[0,t_1]$, где $C^1[0,t_1]$ – множество непрерывно дифференцируемых по t функций, определенных на промежутке времени $[0,t_1]$. Величина $\mathbf{x}(0) \neq 0$ предполагается заданной, т.е. кинематика растянутой пружины в начальный момент времени считается известной. Величины $\mathbf{x}(t_1)$ и t_1 будут задаваться из некоторых дополнительных условий.

Отметим, что функционал качества в терминах $\mathbf{x}$ и u может быть записан также в виде

$$J = \mathbf{x}^2(t_1) + \int_0^{t_1}\mathbf{x}^*\mathbf{A}(u)\mathbf{x}\mathrm{d}t, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix}1+u^2/m^2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix},$$

где $u = u(t)$ – регулируемая жесткость пружины, $\mathbf{A}(u)$ – положительно определенная $\forall t \in [0,t_1]$ матрица, $\mathbf{x}^*$ – вектор, транспонированный по отношению к вектору $\mathbf{x}$.

Приступим к решению поставленной условной вариационной задачи со свободным правым концом путем сведения ее к безусловной задаче. Согласно полученным результатам имеем дифференциальную связь: $\psi(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},u) = f - \dot{\mathbf{x}} = 0$ и вспомогательный функционал

$$J_* = \mathbf{x}^2(t_1) + \int_0^{t_1}(\mathbf{x}^2(t) + f^2(\mathbf{x},u) + \boldsymbol{\mu}^T(t)\psi(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},u))dt,$$

где $\boldsymbol{\mu}(t) = (\mu_1(t),\mu_2(t))^T \in R^2$ – множители Лагранжа, либо

$$J_* = \mathbf{x}^2(t_1) + \boldsymbol{\mu}^*(t)\mathbf{x}(t)\Big|_{t_1}^{0} + \int_0^{t_1}(\mathbf{x}^2(t) + f^2(\mathbf{x},u) + \boldsymbol{\mu}^T(t)f(\mathbf{x},u) + \dot{\boldsymbol{\mu}}^T(t)\mathbf{x}(t))dt.$$

Составим далее по разработанной схеме вариацию этого функционала согласно выражению (4):

$$\delta J_* = (2\mathbf{x}(t_1) - \boldsymbol{\mu}(t_1))^T\delta\mathbf{x}(t_1) + (\mathbf{x}^2(t_1) + f^2(t_1) + \boldsymbol{\mu}^T(t_1)f(t_1) +$$

$$+\dot{\boldsymbol{\mu}}^T(t_1)\mathbf{x}(t_1) + \boldsymbol{\mu}^T(t_1)\dot{\mathbf{x}}(t_1))\delta t_1 + \int_0^{t_1}\left[\left(2x_1 + \frac{2u^2x_1}{m^2} - \frac{\mu_2 u}{m} + \dot{\mu}_1\right)\delta x_1 +\right.$$

$$\left.+(4x_2 + \mu_1 + \dot{\mu}_2)\delta x_2 + \left(\frac{2ux_1^2}{m^2} - \frac{\mu_2 x_1}{m}\right)\delta u\right]dt.$$

В последнем соотношении выберем множители $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ так, чтобы выполнялись уравнения Эйлера (5) по x_1 и x_2 с граничными условиями на правом конце:

$$\dot{\mu}_1 = \frac{u}{m}\mu_2 - 2\left(1 + \frac{u^2}{m^2}\right)x_1, \quad \mu_1(t_1) = 2x_1(t_1),$$

$$\dot{\mu}_2 = -\mu_1 - 4x_2, \qquad \mu_2(t_1) = 2x_2(t_1).$$

Следовательно, при наличии этих соотношений выражение для δJ_* перепишется в виде

$$\delta J_* = \int_0^{t_1}\left(\frac{2ux_1^2}{m^2} - \frac{\mu_2 x_1}{m}\right)\delta u\,dt + (\mathbf{x}^2(t_1) + f^2(t_1) + \boldsymbol{\mu}^T(t_1)f(t_1) + \dot{\boldsymbol{\mu}}^T(t_1)\mathbf{x}(t_1) + \boldsymbol{\mu}^T(t_1)\dot{\mathbf{x}}(t_1))\delta t_1.$$

Пусть выполнено условие трансверсальности (7), а именно обеспечено требование на выбор момента времени t_1:

$$\mathbf{x}^2(t_1)+f^2(t_1)+\boldsymbol{\mu}^*(t_1)f(t_1)+\dot{\boldsymbol{\mu}}^*(t_1)\mathbf{x}(t_1)+\boldsymbol{\mu}^*(t_1)\dot{\mathbf{x}}(t_1)=0.$$

Здесь все слагаемые могут быть выписаны через элементы соответствующих векторов

$$\mathbf{x}^2=x_1^2+x_2^2,\qquad f^2=x_2^2+\frac{u^2x_1^2}{m^2},\qquad \boldsymbol{\mu}^*f=\mu_1x_2-\frac{\mu_2ux_1}{m},$$

$$\dot{\boldsymbol{\mu}}^*\mathbf{x}=\dot{\mu}_1x_1+\dot{\mu}_2x_2,\qquad \boldsymbol{\mu}^*\dot{\mathbf{x}}=\mu_1\dot{x}_1+\mu_2\dot{x}_2.$$

Тогда

$$\delta J_*=\int_0^{t_1}\left(\frac{2ux_1^2}{m^2}-\frac{\mu_2x_1}{m}\right)\delta u\,dt,$$

откуда обеспечит стационарность функционала качества J_* формула для задания оптимального управления $u_0(t)$ при $x_1(t)\neq 0$:

$$u(t)=u_0(t)=\frac{\mu_2(t)m}{2x_1(t)}.$$

Рассмотрим теперь системы дифференциальных уравнений для определения соответствующих переменных $\mathbf{x}(t)$ и $\boldsymbol{\mu}(t)$ при заданных $\mathbf{x}(0)$ и $\mathbf{x}(t_1)$ после подстановки в них $u_0(t)$. Имеем

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2(t)\\ -\mu_2(t)/2\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}\dot{\mu}_1(t)\\ \dot{\mu}_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x_1(t)\\ \mu_1(t)+4x_2(t)\end{pmatrix}.$$

Для нахождения общего решения введем вектор $\mathbf{z}=(x_1,x_2,\mu_1,\ \mu_2)^T$ относительно линейной однородной системы дифференциальных уравнений первого порядка с постоянной матрицей коэффициентов системы:

$$\dot{\mathbf{z}}(t)=\mathbf{B}\mathbf{z}(t),\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&-1/2\\-2&0&0&0\\0&-4&-1&0\end{pmatrix}.$$

Решая характеристическое уравнение $\Delta=\det(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I})=0$, где $\mathbf{I}$ – единичная матрица размерности 4, λ – набор собственных значений, нетрудно найти $\Delta=(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2=0$, откуда найдем собственные числа $\lambda_1=1$ и $\lambda_2=-1$ кратности 2. Применяя далее стандартные приемы поиска фундаментальной системы решений $\mathbf{z}^{(\lambda_1)}(t),\mathbf{z}^{(\lambda_2)}(t)$ для случая кратных корней характеристического уравнения, получим

$$\mathbf{z}^{(\lambda_1)}\mathrm{e}^{-t}=\begin{pmatrix}C_1+C_2t\\ C_1+C_2+C_2t\\ 2(C_2-C_1-C_2t)\\ -2(2C_2+C_1+C_2t)\end{pmatrix},\ \mathbf{z}^{(\lambda_2)}\mathrm{e}^{t}=\begin{pmatrix}C_3+C_4t\\ C_4-C_3-C_4t\\ 2(C_4+C_3+C_4t)\\ 2(2C_4-C_3-C_4t)\end{pmatrix},$$

где C_1,C_2,C_3,C_4 – произвольные постоянные.

Чтобы однозначно определить экстремаль $\mathbf{x}(t)$:

$$\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1+C_2t\\ C_1+C_2+C_2t\end{pmatrix}\mathrm{e}^{t}+\begin{pmatrix}C_3+C_4t\\ C_4-C_3-C_4t\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-t},$$

т.е. найти постоянные интегрирования C_1,C_2,C_3,C_4 и время t_1, надо задать четыре граничных условия с выбранными числами $\alpha_0,\beta_0,\alpha_1,\beta_1$:

$$\begin{pmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}x_1(t_1)\\ x_2(t_1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}$$

и условие трансверсальности (7) для нахождения момента времени t_1:

$$\frac{\partial V(\mathbf{x}(t_1))}{\partial t_1}+\frac{\partial V(\mathbf{x}(t_1))}{\partial \mathbf{x}(t_1)}\cdot\dot{\mathbf{x}}(t_1)+G(\mathbf{x}(t_1),u(t_1),t_1)=0,\ V(\mathbf{x}(t_1))=\mathbf{x}^2(t_1),$$

где

$$\frac{\partial V(\mathbf{x}(t_1))}{\partial t_1}=0,\frac{\partial V(\mathbf{x}(t_1))}{\partial \mathbf{x}(t_1)}=(2x_1(t_1),2x_2(t_1)),\ G(\mathbf{x}(t_1),u_0(t_1),t_1)=$$

$$=\left.\left(-x_1^2-2x_2^2-\frac{u_0^2x_1^2}{m^2}\right)\right|_{t=t_1}=-\left.\left(x_1^2+2x_2^2+\frac{\mu_2^2}{4}\right)\right|_{t=t_1}=-(x_1^2+3x_2^2)|_{t=t_1}.$$

Таким образом, условие трансверсальности приобретает вид

$$2x_1(t_1)\dot{x}_1(t_1)+2x_2(t_1)\dot{x}_2(t_1)=x_1^2(t_1)+3x_2^2(t_1),$$

либо

$$\alpha_1[(C_1+C_2+C_2t_1)\mathrm{e}^{t_1}+(C_4-C_3-C_4t_1)\mathrm{e}^{-t_1}]+$$
$$+\beta_1[(C_1+2C_2+C_2t_1)\mathrm{e}^{t_1}+(C_3-2C_4+C_4t_1)\mathrm{e}^{-t_1}]=(1/2)(\alpha_1^2+3\beta_1^2).$$

В общем случае для граничных условий на правом конце при $t=t_1$ величины α_1 и β_1 – это заданные функции параметра t_1, т.е. $\alpha_1=\alpha_1(t_1)$ и $\beta_1=\beta_1(t_1)$, выбираемые из каких-либо конкретных физических требований на состояние системы в момент времени t_1. Решение уравнения трансверсальности зависит от этих условий.

Рассмотрим числовой пример: для следующих параметров и начальных условий

$$m=1,\ l=10,\quad \alpha_0=2{,}5,\ \beta_0=0,\ \alpha_1=0{,}5,\ \beta_1=-5$$

рассчитаны значения (с точностью до двух знаков после запятой)

$$t_1=0{,}87,\ \mu_1(0)=4{,}32,\ \mu_2(0)=10{,}16,\ J=70{,}50.$$

На рис. 1–3 представлены результаты моделирования в программной среде MATLAB Simulink. За время t_1 регулируемые переменные $x_1(t)$ и $x_2(t)$ достигают заданных конечных значений α_1 и β_1 соответственно. График вырабатываемого сигнала управления $u(t)$ изображен на рис. 3.

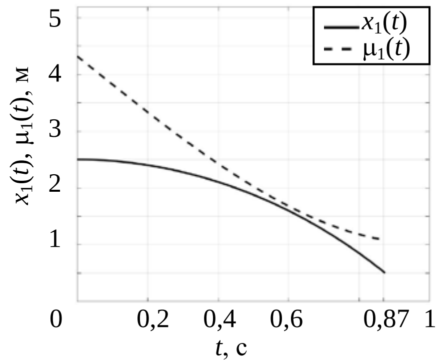

Рис. 1. Графики изменения $x_1(t)$ и $\mu_1(t)$

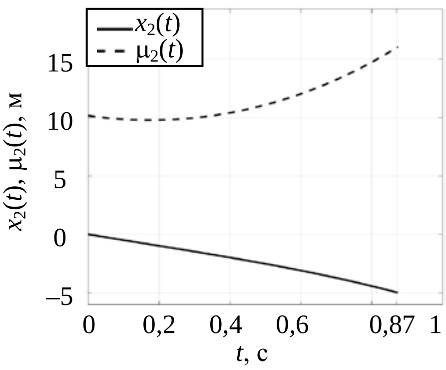

Рис. 2. Графики изменения $x_2(t)$ и $\mu_2(t)$

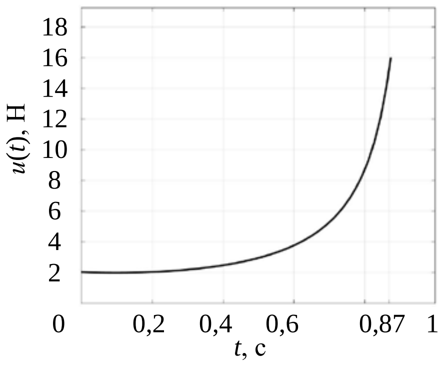

Рис. 3. График изменения $u(t)$

Заключение

В работе предложена схема синтеза оптимального управления для нелинейных динамических систем в рамках решения условной вариационной задачи со свободным правым концом траектории и нефиксированным временем окончания процесса регулирования. Эта схема частично была реализована в работах [9–11] в задачах адаптивного управления.

Стоит добавить, что различные алгоритмы вычисления вариаций функционалов качества в задачах вариационного исчисления и оптимального управления динамическими системами предлагались многими исследователями, в том числе зарубежными (см., например, работы [12–14]).

Из представленного решения задачи оптимального синтеза движения упругого осциллятора с регулируемым коэффициентом жесткости вытекает вывод о том, что определенный выбор граничных значений $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, t_1$ обеспечивает соответствующий режим движения: оптимальное энергетическое сжатие или растяжение пружины и перевод ее из начального в конечное состояние без пребывания в каком-либо промежуточном колебательном процессе.

Аналогичный результат можно получить, если для исследуемого объекта управления в качестве критерия оптимальности взять так называемый «интеграл рассеиваемой энергии» [15], т.е. интеграл по времени от квадрата управляющего воздействия, при этом параметр $\mathbf{x}(t)$ будет являться уже не экспоненциальной функцией времени, а кубическим многочленом по t.

Литература

1. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 228 с.
2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
3. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974. 488 с.
4. Тертычный-Даури В.Ю. Галамех. Т. 4. Оптимальная механика. М.: Физматлит, 2008. 608 с.
5. Дегтярев Г.Л. Синтез оптимального управления в системах с распределенными параметрами с помощью функций Ляпунова // Прямой метод в теории устойчивости и его приложения. Новосибирск: Наука, 1981. С. 75–83.
6. Матвеев А.С. Вариационный анализ в задачах оптимизации систем с распределенными параметрами и вектор-функции множества // Сибирский математический журнал. 1990. Т. 31. № 6. С. 127–141.
7. Панченков А.Н. Экстремальные задачи управления движением с локальными функционалами. В кн. Проблемы устойчивости движения, аналитической механики и управления движением. Новосибирск: Наука, 1979. С. 190–202.
8. Тертычный-Даури В.Ю. Галамех. Т. 1. Адаптивная механика. М.: Физматлит, 2008. 544 с.
9. Тертычный-Дaури В.Ю. Решение вариационных динамических задач в условиях параметрической неопределенности // Проблемы передачи информации. 2005. Т. 41. № 1. С. 53–67.
10. Тертычный-Даури В.Ю. Вариационные динамические задачи с параметрами и их адаптивная интерпретация // Автоматика и телемеханика. 2005.№ 9. С. 114–128.
11. Тертычный-Даури В.Ю. Условная задача оптимального

References

1. Gel'fand I.M., Fomin S.V. *Calculus of Variations*. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961, 228 p. (in Russian)
2. El'sgol'ts L.E. *Differential Equations and Calculus of Variations*. Moscow, Nauka Publ., 1969, 424 p. (in Russian)
3. Yang L. *Lectures on Calculus of Variations and Optimal Control Theory*. Moscow, Mir Publ., 1974, 488 p. (in Russian)
4. Tertychny-Dauri V.Yu. *Galamech. Vol. 4. Optimum Mechanics*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008, 608 p. (in Russian)
5. Degtyarev G.L. Synthesis of optimal control in systems with distributed parameters using Lyapunov functions. In *Direct Method in Stability Theory and its Applications*. Novosibirsk, Nauka Publ., 1981, pp. 75–83. (in Russian)
6. Matveev A.S. Variational analysis in optimization problems of systems with distributed parameters and set vector functions. *Siberian Mathematical Journal,* 1990, vol. 31, no. 6, pp. 127–141. (in Russian)
7. Panchenkov A.N. Extreme problems of motion control with local functionals. In *Problems of Motion Stability, Analytical Mechanics and Motion Control*. Novosibirsk, Nauka Publ., 1979, pp. 190–202. (in Russian)
8. Tertychny-Dauri V.Yu. Galamech. Vol. 1. *Adaptive Mechanics*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008, 544 p. (in Russian)
9. Tertychny-Dauri V.Yu. Solution of variational dynamic problems under parametric uncertainty. *Problems of Information Transmission*, 2005, vol. 41, no. 1, pp. 45–58. (in Russian)
10. Tertychny-Dauri V.Yu. Variational dynamical problems with parameters and their adaptive interpretation. *Automation and Remote Control*, 2005, vol. 66, no. 9, pp. 1465–1477. doi: 10.1007/s10513-005-0185-z
11. Tertychnyi-Dauri V.Yu. A conditional optimal control problem and its adaptive solution method. *Automation and Remote*

управления: адаптивный метод решения // Автоматика и телемеханика. 2006.№ 3. С. 54–67.
12. Блэтт Д., Лайнесс Д. Практическое использование вариационных принципов в нелинейной механике. В сб. Механика. М.: Мир, 1964. № 5. С. 3–11.
13. Mayne D.Q., Polak E. First order strong variation algorithm for optimal control // Journal of Optimization Theory and Applications. 1975. V. 16. № 3/4. P. 277–301. doi: /10.1007/bf01262938
14. Leitmann G. The Calculus of Variations and Optimal Control. NY: Plenum Press, 1986. 312 p. doi: 10.1007/978-1-4899-0333-4
15. Лернер А.Я., Розенман Е.А. Оптимальное управление. М: Энергия, 1970. 360 с.

Control, 2006, vol. 67, no. 3, pp. 393–404.
12. Blatt J.M., Lyness J.N. The practical use of variation principles in non-linear mechanics. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 1962, vol. 2, no. 3, pp. 357. doi: 10.1017/s144678870002694x (in Russian)
13. Mayne D.Q., Polak E. First order strong variation algorithm for optimal control. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1975, vol. 16, no. 3/4, pp. 277–301. doi: /10.1007/bf01262938
14. Leitmann G. *The Calculus of Variations and Optimal Control*. NY, Plenum Press, 1986, 312 p. doi: 10.1007/978-1-4899-0333-4
15. Lerner A.Ya., Rozenman E.A. *Optimal Control*. Moscow, Energiya Publ., 1970, 360 p. (in Russian)

Авторы

Ведяков Алексей Алексеевич – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Scopus ID: 49664023200, ORCID ID: 0000-0003-4336-1220, vedyakov@gmail.com

Милованович Екатерина Воиславовна – кандидат технических наук, доцент, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация; заведующий кафедрой, Санкт-Петербургский государственный химико-фармацевтический университет, Санкт-Петербург, 197376, Российская Федерация, Scopus ID: 33156677, ORCID ID: 0000-0002-9069-8574, milovanovich@mail.ru

Тертычный-Даури Владимир Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Scopus ID: 8980267000, ORCID ID: 0000-0003-4671-7659, tertychny-dauri@mail.ru

Тимофеева Галина Васильевна – кандидат физико-математических наук, доцент, тьютор, Университет ИТМО, ORCID ID: 0000-0002-9325-2244, 3233850@mail.ru

Authors

Alexey A. Vedyakov – PhD, Senior scientific researcher, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Scopus ID: 49664023200, ORCID ID: 0000-0003-4336-1220, vedyakov@gmail.com

Ekaterina V. Milovanovich – PhD, Associate Professor, Associate Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation; Head of Chair, Saint Petersburg State University of Chemical Pharmaceutics (SPCPU), Saint Petersburg, 197376, Russian Federation, Scopus ID: 33156677, ORCID ID: 0000-0002-9069-8574, milovanovich@mail.ru

Vladimir Yu. Tertychny-Dauri – D.Sc., Full Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Scopus ID: 8980267000, ORCID ID: 0000-0003-4671-7659, tertychny-dauri@mail.ru

Galina V. Timofeeva – PhD, Associate Professor, tutor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, ORCID ID: 0000-0002-9325-2244, 3233850@mail.ru