



УДК 517.958, 517.938

ПОЛНОТА СИСТЕМЫ РЕЗОНАНСНЫХ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ ГРАФОВ РАЗЛИЧНОЙ ГЕОМЕТРИИ

И.В. Блинова, Я.М. Ван-Юн-Сян, И.Ю. Попов

Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация

Адрес для переписки: popov1955@gmail.com

Информация о статье

Поступила в редакцию 01.12.18, принята к печати 25.12.18

doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-1-166-172

Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Блинова И.В., Ван-Юн-Сян Я.М., Попов И.Ю. Полнота системы резонансных состояний для графов различной геометрии // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2019. Т. 19. № 1. С. 166–172. doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-1-166-172

Аннотация

Резонансные состояния (квазисобственные функции) играют большую роль в задаче рассеяния и при описании транспортных процессов. Для квантовых графов, имеющих как конечные, так и бесконечные ребра, рассматривается полнота системы резонансных состояний на конечном подграфе. На ребрах графов действует оператор Шредингера. Учитывается связь задачи рассеяния с функциональной моделью Секефальви–Надя. В частности, матрица рассеяния является характеристической функцией функциональной модели, а вопрос о полноте системы резонансных состояний сводится к выяснению типа факторизации характеристической функции на произведение Бляшке и сингулярную внутреннюю функцию. Это позволяет использовать для доказательства полноты (неполноты) имеющийся в функциональной модели эффективный признак отсутствия сингулярного множителя при разложении на множители характеристической функции. Доказана неполнота системы резонансных состояний для графа типа «кольцо», соединенного с волноводом в одной точке (исходный граф). Исследуется зависимость полноты системы резонансных состояний от изменения геометрии исходного графа.

Ключевые слова

квантовый граф, полнота системы резонансных состояний, оператор Шредингера

Благодарности

Работа частично поддержана Правительством Российской Федерации (грант 08-08), Российским научным фондом (грант 16-11-10330).

SYSTEM COMPLETENESS OF RESONANCE STATES FOR GRAPHS WITH DIFFERENT GEOMETRY

I.V. Blinova, Ya.M. Van-Yun-Syan, I.Yu. Popov

ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

Corresponding author: popov1955@gmail.com

Article info

Received 01.12.18, accepted 25.12.18

doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-1-166-172

Article in Russian

For citation: Blinova I.V., Van-Yun-Syan Ya.M., Popov I.Yu. System completeness of resonance states for graphs with different geometry. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2019, vol. 19, no. 1, pp. 166–172 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-1-166-172

Abstract

Resonant states (quasi-intrinsic functions) play an important role in the scattering problem and in the description of transport processes. We consider the system completeness of resonance states on a finite subgraph for quantum graphs with both finite and infinite edges. The Schrodinger operator acts on the graph edges. The relationship of the scattering problem with the Szökefalvi-Nagy functional model is taken into account. In particular, the scattering matrix is a characteristic function of the functional model, and the question of the system completeness of resonance states is reduced to factorization type determining of the characteristic function on the Blaschke product and the singular internal function. This fact makes it possible to use an effective sign of a singular factor absence in the decomposition of the characteristic function for the proof of completeness (incompleteness) available in the functional model. The system incompleteness of resonance states for a "ring-type" graph connected to a waveguide at one point (initial graph) is proved. The dependence of the system completeness of resonant states on initial graph geometry changes is studied.

Keywords

quantum graph, system completeness of resonant states, Schrodinger operator

Acknowledgements

The work was partially supported by the Government of the Russian Federation (grant 08-08) and the Russian Science Foundation (grant 16-11-10330).

Введение

Во многих нанотехнологических проблемах возникает необходимость моделирования наноэлектронных систем квазиодномерного типа [1–4]. В этой ситуации удобно использовать модель квантовых графов [5]. В задачах баллистического квантового транспорта, в частности в графовой модели, важную роль играют резонансы и соответствующие резонансные состояния [6–8]. При этом возникает вопрос полноты системы этих состояний в конечной подобласти (на ограниченном подграфе). Он связан, с одной стороны, с математической возможностью разложения функций в ряды по резонансным состояниям, а с другой стороны, с физической возможностью возбуждать любое состояние в ограниченной подобласти с помощью приходящих волн.

В настоящей работе исследуется полнота системы резонансных состояний оператора Шредингера для квантовых графов различной геометрии. В предыдущих работах рассмотрена полнота системы резонансных состояний оператора Шредингера для графа типа «пучок ребер между двумя вершинами» [9], для графа «отрезок, присоединенный к прямой» [10, 11], для графа типа «кольцо» [12]. Использование оператора Дирака на ребрах графа, а также вставка в конечную часть подграфа элементов другой размерности (сфер, шаров) не влияет на полноту [13]. Для всех указанных графов обнаруживалась полнота системы резонансных состояний, кроме графа типа «кольцо». Поэтому возникает естественный вопрос о влиянии геометрии графа на полноту системы резонансных состояний. Будем выделять в графе внешние вершины, к которым подсоединены бесконечные ребра. Остальные вершины будем называть внутренними. В качестве исходного рассмотрим граф типа «кольцо» (рис. 1) с одной внешней вершиной. Будем исследовать два типа возмущений этого графа: внесение изменений, затрагивающих или не затрагивающих внешнюю вершину.

Постановка задачи. Построение модели

Рассмотрим граф типа «кольцо», изображенный на рис. 1. На ребрах графа задан оператор Шредингера $H = -\frac{d^2}{dx^2}$. Ищем волновую функцию, удовлетворяющую стационарному уравнению Шредингера $\psi'' + k^2\psi = 0$, где k – волновое число. Для вершин графа заданы условия, связывающие волновые функции на смежных ребрах:

$$\begin{cases} \psi_1(0) = \psi_2(0) = \psi_3(0) = \psi_3(L) \\ -\psi_1'(0) + \psi_2'(0) - \psi_3'(0) + \psi_3'(L) = \alpha\psi_1(0) \end{cases}, \quad (1)$$

где α характеризует силу точечного потенциала в вершине графа, ψ_1, ψ_2, ψ_3 – волновые функции на ребрах 1, 2, 3 графа соответственно, L – длина окружности кольца.

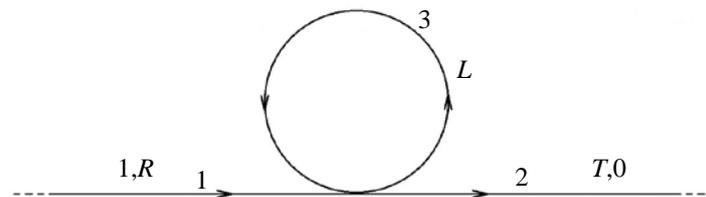


Рис. 1. Граф 1а

Матрица рассеяния имеет вид: $\mathbf{S}(k) = \begin{pmatrix} R & T \\ T & R \end{pmatrix}$, где R и T – коэффициенты отражения и прохождения, которые находятся из условий в вершине графа. Так как матрица $\mathbf{S}(k)$ симметрична, то при удовлетворении условиям (1) получим $R = T - 1$ и $\mathbf{S}(k) = 1 - 2T$. Также из (1) найдем

$T = \frac{2ik(1 + e^{ikL})}{(2ik - \alpha)(1 + e^{ikL}) + 2ik(1 - e^{ikL})}$. Получим определитель матрицы рассеяния:

$$s(k) = |\det \mathbf{S}(k)| = \left| \frac{\alpha(1 + e^{ikL}) + 4ike^{ikL}}{\alpha(1 + e^{ikL}) - 4ik} \right|.$$

При $\alpha = 0$ получаем $s(k) = |e^{ikL}| = e^{-L \text{Im} k}$. Для определения полноты системы резонансных состояний будем использовать соответствующий критерий [14, 15]:

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} \ln s(P(r)e^{it} + iC(r)) \frac{P(r)}{(P(r)e^{it} + C(r) + i)^2} dt = 0,$$

где $P(r) = \frac{2r}{1-r^2}$, $C(r) = \frac{1+r^2}{1-r^2}$. В рассматриваемом случае $s(k)$ имеет экспоненциальный вид, что

приводит к возрастанию порядка $\frac{1}{1-r^2}$ при $r \rightarrow 1$ для $\ln s(k)$. С учетом поведения другого множителя в подынтегральном выражении это дает конечное ненулевое предельное значение, т.е. нарушение критерия, означающее неполноту системы резонансных состояний для графа, изображенного на рис. 1. В рассмотренном случае интеграл может быть явно вычислен, критерий работает и в более сложных ситуациях, позволяя выявить наличие или отсутствие экспоненциального множителя. При отсутствии экспоненциального множителя $\ln s(k)$ имеет меньший порядок роста при $r \rightarrow 1$, поэтому предел оказывается нулевым.

Неполнота системы резонансных состояний

Рассмотрим модификацию геометрии графа, не затрагивающую внешней вершины. Во всех рассмотренных ниже модификациях Graph 1b, 1c, 1d (рис. 2–4) свойство неполноты системы резонансных состояний сохраняется, что проверяется с помощью описанного выше критерия.

Граф 1b. К кольцу исходного графа прикрепляется отрезок длины N (рис. 2).

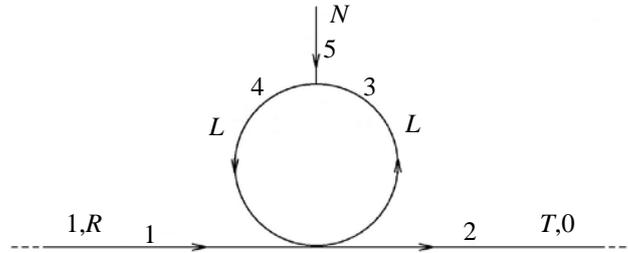


Рис. 2. Граф 1b

Определитель матрицы рассеяния имеет вид:

$$\det \mathbf{S}(k) = \frac{(2\gamma - 8)\beta_1 + 8e^{-ikL} + (i \text{ctg} kN - \gamma)(\gamma\beta_2 + 4e^{-ikL} - 4\beta_2)}{2\gamma\beta_1 + 8e^{-ikL} + (i \text{ctg} kN - \gamma)(\gamma\beta_2 + 4e^{-ikL})},$$

где $\gamma = \alpha / (ik)$, $\beta_1 = e^{-ikL} + e^{ikL}$, $\beta_2 = e^{-ikL} - e^{ikL}$. Если $\alpha = 0$, то $\det \mathbf{S}(k) = -e^{2ikL} \frac{3e^{2ikN} - 1}{e^{2ikN} - 3}$.

Граф 1c. К конечному ребру исходного графа прикрепляется кольцо с длиной окружности N (рис. 3).

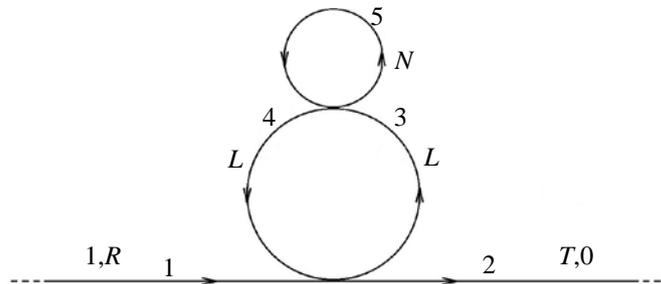


Рис. 3. Граф 1c

Определитель матрицы рассеяния таков:

$$\det \mathbf{S}(k) = \frac{-2\gamma Q_1 \beta_2 + 16e^{-ikL} + (2Q_2 - \gamma Q_1)\beta_2(\gamma - 4) - 8\beta_1 Q_1}{-2\gamma Q_1 \beta_2 + 16e^{-ikL} + \beta_2 \gamma (2Q_2 - Q_1 \gamma)},$$

где $\gamma = \alpha / (ik)$, $\beta_1 = e^{-ikL} + e^{ikL}$, $\beta_2 = e^{-ikL} - e^{ikL}$, $Q_1 = 1 + e^{ikN}$, $Q_2 = 1 - e^{ikN}$.

Если $\alpha = 0$, то $\det \mathbf{S}(k) = -e^{2ikL} e^{ikN} / 2$.

Граф 1d. Конечное ребро исходного графа претерпевает в центре разрыв. Рассматривается граф, состоящий из двух полуосей и двух отрезков длины L (рис. 4).

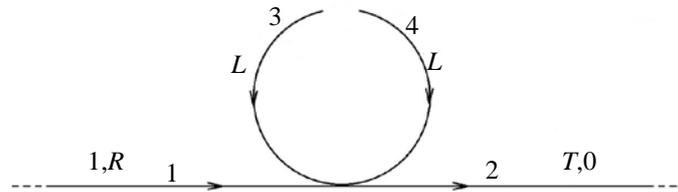


Рис. 4. Граф 1d

Имеем: $\det \mathbf{S}(k) = \frac{\alpha + 2ik + 2k \operatorname{ctg} kL}{\alpha - 2ik + 2k \operatorname{ctg} kL}$. Если $\alpha = 0$, то $\det \mathbf{S}(k) = e^{2ikL}$.

Полнота системы резонансных состояний

Рассмотрим модификации базового графа, затрагивающие внешнюю вершину. При таких преобразованиях ситуация может измениться, что показывают рассмотренные ниже примеры.

Граф 2a. К вершине графа присоединен отрезок длины N (рис. 5).

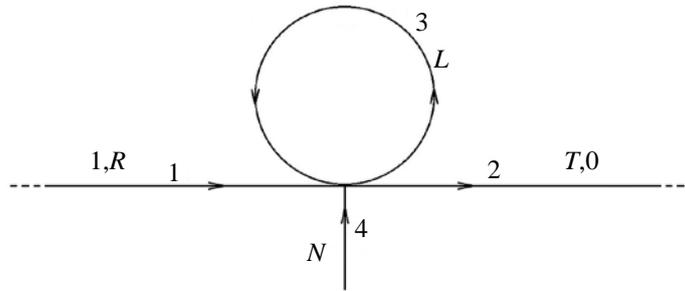


Рис. 5. Граф 2a

При этом получим: $\det \mathbf{S}(k) = \frac{(1 + e^{ikL})(k \operatorname{ctg} kN - \alpha) - 4ike^{ikL}}{(1 + e^{ikL})(k \operatorname{ctg} kN - \alpha) + 4ik}$.

Если $\alpha = 0$, то $\det \mathbf{S}(k) = \frac{(1 + e^{ikL}) \operatorname{ctg} kN - 4ie^{ikL}}{(1 + e^{ikL}) \operatorname{ctg} kN + 4i}$.

Граф 2b. К вершине графа присоединено кольцо с длиной окружности N (рис. 6).

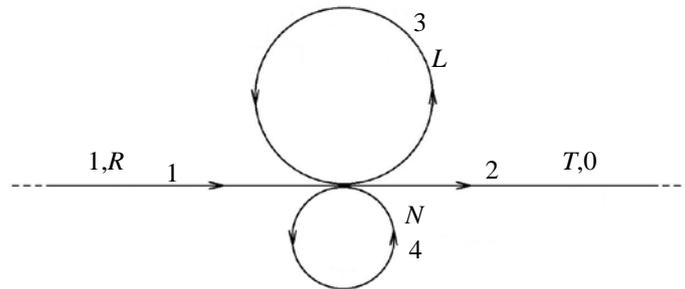


Рис. 6. Граф 2b

В данном случае:

$\det \mathbf{S}(k) = \frac{(1 - 3e^{ikL} e^{ikN} - e^{ikL} - e^{ikN})2ik - \alpha(1 + e^{ikL})(1 + e^{ikN})}{(3 - e^{ikL} e^{ikN} + e^{ikL} + e^{ikN})2ik - \alpha(1 + e^{ikL})(1 + e^{ikN})}$.

Если $\alpha = 0$, то $\det \mathbf{S}(k) = \frac{1 - 3e^{ikL} e^{ikN} - e^{ikL} - e^{ikN}}{3 - e^{ikL} e^{ikN} + e^{ikL} + e^{ikN}}$.

Граф 2с. В вершине графа один конец отсоединен от вершины (рис. 7).

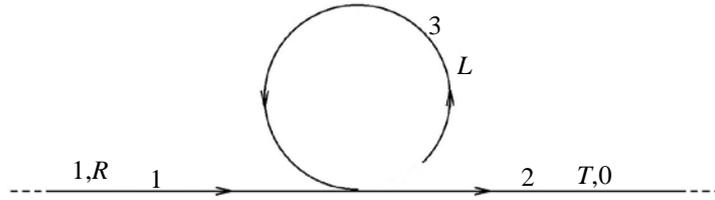


Рис. 7. Граф 2с

Определитель матрицы рассеяния: $\det \mathbf{S}(k) = -\frac{2ik(2 - i \operatorname{ctg} kL) + \alpha}{2ik(2 - i \operatorname{ctg} kL) - \alpha}$.

Если $\alpha = 0$, то $\det \mathbf{S}(k) = \frac{i \operatorname{ctg} kL - 2}{i \operatorname{ctg} kL + 2}$.

Граф 2d. В вершине графа между кольцом и осью добавлен отрезок длины N (рис. 8).

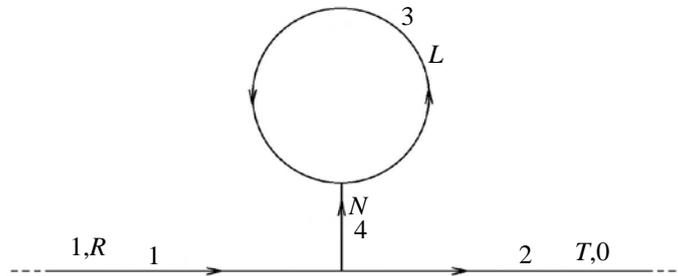


Рис. 8. Граф 2d

Определитель матрицы рассеяния:

$$\det \mathbf{S}(k) = \frac{e^{ikN}(\gamma + 3)(1 - 3e^{ikL} - \gamma(1 + e^{ikL})) - e^{-ikN}(\gamma + 1)(3 - e^{ikL} - \gamma(1 + e^{ikL}))}{e^{ikN}(\gamma - 1)(1 - 3e^{ikL} - \gamma(1 + e^{ikL})) + e^{-ikN}(3 - \gamma)(3 - e^{ikL} - \gamma(1 + e^{ikL}))}, \text{ где } \gamma = \frac{\alpha}{ik}.$$

Если $\alpha = 0$, то $\det \mathbf{S}(k) = \frac{3e^{ikN}(1 - 3e^{ikL}) - e^{-ikN}(3 - e^{ikL})}{-e^{ikN}(1 - 3e^{ikL}) + e^{-ikN}(3 - e^{ikL})}$.

Граф 2е. К вершине графа добавлены два отрезка длиной L , при этом второй конец этих отрезков присоединен к кольцу в одной точке. Таким образом, граф состоит из четырех отрезков одинаковой длины и двух вершин (рис. 9).

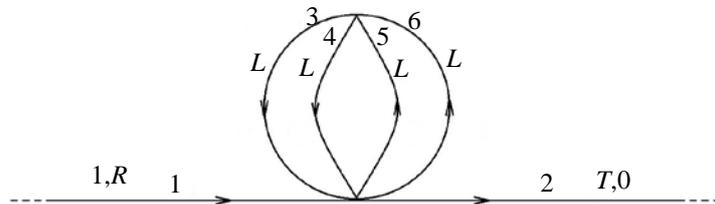


Рис. 9. Граф 2е

Определитель матрицы рассеяния:

$$\det \mathbf{S}(k) = \frac{8e^{-ikL} - 24e^{ikL} + (e^{-ikL} - e^{ikL})(\gamma^2 - 6\gamma)}{24e^{-ikL} - 8e^{ikL} + (e^{-ikL} - e^{ikL})(\gamma^2 - 10\gamma)},$$

где $\gamma = \frac{\alpha}{ik}$. Если $\alpha = 0$, то $\det \mathbf{S}(k) = \frac{e^{-ikL} - 3e^{ikL}}{3e^{-ikL} - e^{ikL}}$.

Граф 2f. В вершину графа добавлен отрезок длиной N (рис. 10).

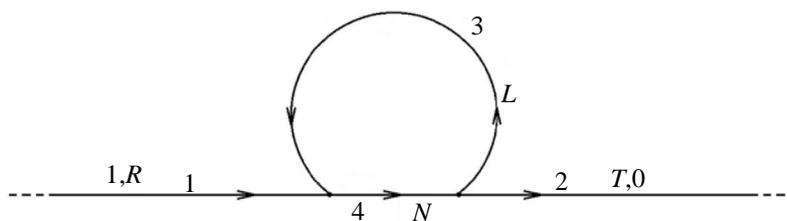


Рис. 10. Граф 2f

Определитель матрицы рассеяния:

$$\det \mathbf{S}(k) = \frac{-2 - (1 + \gamma)^2 - \operatorname{tg} \frac{kN}{2} \operatorname{ctg} \frac{kL}{2} - \operatorname{tg} \frac{kL}{2} \operatorname{ctg} \frac{kN}{2} + 2i(1 + \gamma)(\operatorname{ctg} kN + \operatorname{ctg} kL)}{-2 - (1 - \gamma)^2 - \operatorname{tg} \frac{kN}{2} \operatorname{ctg} \frac{kL}{2} - \operatorname{tg} \frac{kL}{2} \operatorname{ctg} \frac{kN}{2} - 2i(1 - \gamma)(\operatorname{ctg} kN + \operatorname{ctg} kL)},$$

$$\text{Если } \alpha = 0, \text{ то } \det \mathbf{S}(k) = \frac{-3 - \operatorname{tg} \frac{kN}{2} \operatorname{ctg} \frac{kL}{2} - \operatorname{tg} \frac{kL}{2} \operatorname{ctg} \frac{kN}{2} + 2i(\operatorname{ctg} kN + \operatorname{ctg} kL)}{-3 - \operatorname{tg} \frac{kN}{2} \operatorname{ctg} \frac{kL}{2} - \operatorname{tg} \frac{kL}{2} \operatorname{ctg} \frac{kN}{2} - 2i(\operatorname{ctg} kN + \operatorname{ctg} kL)}.$$

Заключение

Рассмотрена задача о полноте системы резонансных состояний оператора Шредингера для квантовых графов различной геометрии. Исследовано влияние геометрии графа на полноту системы резонансных состояний. В качестве исходного графа рассмотрен граф типа «кольцо», для которого доказана неполнота системы резонансных состояний на кольце. Исследованы возмущения этого графа, затрагивающие и не затрагивающие внешнюю вершину.

Показано, что при внесении изменений, не меняющих ситуацию во внешней вершине графа, сохраняется неполнота системы резонансных состояний. При внесении модификаций, меняющих соотношение числа конечных и бесконечных ребер, подсоединенных к внешней вершине, восстанавливается полнота системы резонансных состояний на конечном подграфе.

Литература

1. Leble S. Cyclic-periodic ZRP structures. Scattering problem for generalized Bloch functions and conductivity // *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*. 2018. V. 9. N 2. P. 225–243. doi: 10.17586/2220-8054-2018-9-2-225-243
2. Boitsev A.A., Brasche J., Neidhardt H., Popov I.Y. A model of electron transport through a boson cavity // *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*. 2018. V. 9. N 2. P. 171–178. doi: 10.17586/2220-8054-2018-9-2-171-178
3. Cevizovic D., Chizhov A.V., Galovic S. Vibron transport in macromolecular chains with squeezed phonons // *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*. 2018. V. 9. N 5. P. 597–602. doi: 10.17586/2220-8054-2018-9-5-597-602
4. Багмутов А.С., Попов И.Ю. Вольт-амперные характеристики для двух систем квантовых волноводов с присоединенными квантовыми резонаторами // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2016. Т. 16. № 4(104). С. 725–730. doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-4-725-730
5. Berkolaiko G., Kuchment P. *Introduction to Quantum Graphs*. Providence: AMS, 2012. 418 p. doi: 10.1090/surv/186
6. Popov I.Y., Popova S.L. Zero-width slit model and resonances in mesoscopic systems // *Europhysics Letters*. 1993. V. 24. N 5. P. 373–377. doi: 10.1209/0295-5075/24/5/009
7. Borisov D., Exner P., Golovina A. Tunneling resonances in systems without a classical trapping // *Journal of Mathematical Physics*. 2013. V. 54. N 1. doi: 10.1063/1.4773098
8. Botman S.A., Leble S.B. Electrical conductivity model for quasi-one-dimensional structures // *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*. 2017. V. 8. N 2. P. 231–235. doi: 10.17586/2220-8054-2017-8-2-231-235
9. Gerasimov D.A., Popov I.Y. Completeness of resonance states for quantum graph with two semi-infinite edges // *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2018. V. 63. N 7–8. P. 996–1010. doi: 10.1080/17476933.2017.1289517
10. Popov I.Y., Popov A.I. Line with attached segment as a

References

1. Leble S. Cyclic-periodic ZRP structures. Scattering problem for generalized Bloch functions and conductivity. *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*, 2018, vol. 9, no. 2, pp. 225–243. doi: 10.17586/2220-8054-2018-9-2-225-243
2. Boitsev A.A., Brasche J., Neidhardt H., Popov I.Y. A model of electron transport through a boson cavity. *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*, 2018, vol. 9, no. 2, pp. 171–178. doi: 10.17586/2220-8054-2018-9-2-171-178
3. Cevizovic D., Chizhov A.V., Galovic S. Vibron transport in macromolecular chains with squeezed phonons. *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*, 2018, vol. 9, no. 5, pp. 597–602. doi: 10.17586/2220-8054-2018-9-5-597-602
4. Bagmutov A.S., Popov I.Yu. Current-voltage characteristics for two systems of quantum waveguides with connected quantum resonators. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2016, vol. 16, no. 4, pp. 725–730. (in Russian) doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-4-725-730
5. Berkolaiko G., Kuchment P. *Introduction to Quantum Graphs*. Providence, AMS, 2012, 418 p. doi: 10.1090/surv/186
6. Popov I.Y., Popova S.L. Zero-width slit model and resonances in mesoscopic systems. *Europhysics Letters*, 1993, vol. 24, no. 5, pp. 373–377. doi: 10.1209/0295-5075/24/5/009
7. Borisov D., Exner P., Golovina A. Tunneling resonances in systems without a classical trapping. *Journal of Mathematical Physics*, 2013, vol. 54, no. 1. doi: 10.1063/1.4773098
8. Botman S.A., Leble S.B. Electrical conductivity model for quasi-one-dimensional structures. *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*, 2017, vol. 8, no. 2, pp. 231–235. doi: 10.17586/2220-8054-2017-8-2-231-235
9. Gerasimov D.A., Popov I.Y. Completeness of resonance states for quantum graph with two semi-infinite edges. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2018, vol. 63, no. 7–8, pp. 996–1010. doi: 10.1080/17476933.2017.1289517
10. Popov I.Y., Popov A.I. Line with attached segment as a model of Helmholtz resonator: Resonant states completeness. *Journal of*

- model of Helmholtz resonator: Resonant states completeness // Journal of King Saud University Science. 2017. V. 29. N 1. P. 133–136. doi: 10.1016/j.jksus.2016.07.004
11. Popov A.I., Popov I.Y., Gerasimov D.A. Resonance state completeness problem for quantum graph // AIP Conference Proceedings. 2017. V. 1863. Art. 390002. doi: 10.1063/1.4992567
 12. Blinova I.V., Popov I.Y. Quantum graph with the Dirac operator and resonance states completeness // Operator Theory: Advances and Applications. 2018. V. 268. P. 111–124. doi: 10.1007/978-3-319-75996-8_5
 13. Popov I.Y., Popov A.I. Quantum dot with attached wires: resonant states completeness // Reports on Mathematical Physics. 2017. V. 80. N 1. P. 1–10. doi: 10.1016/s0034-4877(17)30054-x
 14. Nikol'skii N. Treatise on the Shift Operator: Spectral Function Theory. Berlin: Springer, 1986. 491 p. doi: 10.1007/978-3-642-70151-1
 15. Sz.-Nagy B., Foias C., Bercovici H., Kerchy L. Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space. 2nd ed. Berlin: Springer, 2010. 474 p. doi: 10.1007/978-1-4419-6094-8
- King Saud University Science*, 2017, vol. 29, no. 1, pp. 133–136. doi: 10.1016/j.jksus.2016.07.004
11. Popov A.I., Popov I.Y., Gerasimov D.A. Resonance state completeness problem for quantum graph. *AIP Conference Proceedings*, 2017, vol. 1863, art. 390002. doi: 10.1063/1.4992567
 12. Blinova I.V., Popov I.Y. Quantum graph with the Dirac operator and resonance states completeness. *Operator Theory: Advances and Applications*, 2018, vol. 268, pp. 111–124. doi: 10.1007/978-3-319-75996-8_5
 13. Popov I.Y., Popov A.I. Quantum dot with attached wires: resonant states completeness. *Reports on Mathematical Physics*, 2017, vol. 80, no. 1, pp. 1–10. doi: 10.1016/s0034-4877(17)30054-x
 14. Nikol'skii N. *Treatise on the Shift Operator: Spectral Function Theory*. Berlin, Springer, 1986, 491 p. doi: 10.1007/978-3-642-70151-1
 15. Sz.-Nagy B., Foias C., Bercovici H., Kerchy L. *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space*. 2nd ed. Berlin, Springer, 2010, 474 p. doi: 10.1007/978-1-4419-6094-8

Авторы

Блинова Ирина Владимировна – кандидат технических наук, доцент, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Scopus ID: 20733774200, ORCID ID: 0000-0003-2115-2479, irin-a@yandex.ru

Ван-Юн-Сян Яна Михайловна – студент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, ORCID ID: 0000-0002-9899-6285, vysyana@cktv.ru

Попов Игорь Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Scopus ID: 56277722500, ORCID ID: 0000-0002-5251-5327, popov1955@gmail.com

Authors

Irina V. Blinova – PhD, Associate Professor, Associate Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Scopus ID: 20733774200, ORCID ID: 0000-0003-2115-2479, irin-a@yandex.ru

Yana M. Van-Yun-Syan – student, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, ORCID ID: 0000-0002-9899-6285, vysyana@cktv.ru

Igor Yu. Popov – D.Sc., Full Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Scopus ID: 56277722500, ORCID ID: 0000-0002-5251-5327, popov1955@gmail.com