УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ
март–апрель 2019 Том 19 № 2 ISSN 2226-1494 http://ntv.ifmo.ru/
SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL OF INFORMATION TECHNOLOGIES, MECHANICS AND OPTICS
March–April 2019 Vol. 19 No 2 ISSN 2226-1494 http://ntv.ifmo.ru/en

УДК 004.942;531.391.5; 681.5.03; 681.5.08

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Г.И. Мельников, В.Г. Мельников, Н.А. Дударенко, В.В. Талапов

Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация
Автор для переписки: melnikov@mail.ifmo.ru

Информация о статье
Поступила в редакцию 26.12.18, принята к печати 15.02.19
doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-2-216-221
Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Мельников Г.И., Мельников В.Г., Дударенко Н.А., Талапов В.В. Устойчивость движения нелинейных динамических систем при постоянно действующих возмущениях // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2019. Т. 19. № 2. С. 216–221. doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-2-216-221

Аннотация
Рассматривается движение механической системы с несколькими степенями свободы в окрестности нуля фазового пространства состояний при постоянно действующих малых возмущениях. Обобщенные силы представлены в динамических уравнениях однородными многочленами первой и третьей степени относительно фазовых координат и малыми постоянно действующими возмущениями. Рассматривается случай отсутствия кратных собственных значений матрицы линейной части системы. Для положительно определенной квадратичной функции Ляпунова определяется дифференциальное неравенство с дифференциальным уравнением сравнения вида Риккати, наряду с которым определяется нелинейное экспоненциальное дифференциальное неравенство, интегрируемое в квадратурах. При решении квадратичного дифференциального неравенства Риккати предполагается известным одно частное решение уравнения Риккати. В результате интегрирования в квадратурах экспоненциального дифференциального неравенства получена оценка переходных процессов в конечной области фазовых координат.

Ключевые слова
механическая система, динамическая система, обобщенные и фазовые координаты, устойчивость движения, функции Ляпунова, дифференциальное уравнение сравнения, экспоненциальное дифференциальное неравенство, функциональные оценки переходных процессов

Благодарности
Работа поддержана грантами РФФИ 16-08-00997, 17-01-00672.

STABILITY OF NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEM MOTION UNDER CONSTANTLY ACTING PERTURBATIONS

G.I. Melnikov, V.G. Melnikov, N.A. Dudarenko, V.V. Talapov

ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation
Corresponding author: melnikov@mail.ifmo.ru

Article info
Received 26.12.18, accepted 15.02.19
doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-2-216-221
Article in Russian

For citation: Melnikov G.I., Melnikov V.G., Dudarenko N.A., Talapov V.V. Stability of nonlinear dynamical system motion under constantly acting perturbations. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2019, vol. 19, no. 2, pp. 216–221 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-2-216-221

Abstract
We consider the motion of a mechanical system with several degrees of freedom near zero of the phase space of states under conditions of constantly acting small perturbations. The generalized forces are represented in the dynamic equations by homogeneous forms of the first and the third degree with respect to the phase coordinates and by small time functions characterizing the constantly acting perturbations. It is assumed that there are no multiple eigenvalues of the matrix of the system linear part. For a definitely positive quadratic Lyapunov function, we define a differential inequality with Riccati differential comparison equation, together with an exponential differential inequality that is integrable in quadratures. When solving Riccati quadratic differential inequality, we assume one particular solution of Riccati equation to be known. As a result of integrating in quadratures of the exponential differential inequalities, the estimate of transient processes in the finite domain of the phase coordinates is obtained.

Keywords
mechanical system, dynamical system, generalized and phase coordinates, motion stability, Lyapunov functions, differential equation of comparison, exponential differential inequality, transient process functional estimates

Acknowledgements
This work was supported by the RFBR Grant 16-08-00997, 17-01-00672.

Введение

Рассматривается механическая система с малыми постоянно действующими возмущениями, математическая модель которых представлена дифференциальными уравнениями многочленной структуры [1–4]. Для исследования линейных систем Н.Н. Красовским [5] и рядом авторов разработан и широко применяется метод линейных дифференциальных неравенств для положительно определенных функций Ляпунова [6–11]. Аналитическое интегрирование этих линейных неравенств позволяет получить оценки фазовых координат через функции времени и начальные условия. Оценки могут уточняться посредством построения и интегрирования более точных дифференциальных неравенств.

В настоящей работе предлагаются нелинейные дифференциальные неравенства, содержащие экспоненциальные функции, зависящие от функции Ляпунова, которые интегрируются с получением количественных и качественных оценок переходных процессов. Эти неравенства характеризуют устойчивость технических систем с нелинейными многочленными характеристиками. Возможно применение данного метода оценок переходных процессов и к уравнениям возмущенного движения, содержащим нелинейные функции в виде степенных рядов.

Постановка задачи

Предполагается, что динамические уравнения рассматриваемой системы приведены к форме Коши вида

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{P}\mathbf{q} + \mathbf{Q}^{(3)}(\mathbf{q}) + \mathbf{F}(t)\,. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{q}$ – вектор-столбец фазовых переменных, $\mathbf{Q}^{(3)}(\mathbf{q})$ – вектор-столбец однородных кубических многочленов со столбцовыми коэффициентами, $\mathbf{F}(t)$ – вектор-столбец малых постоянно действующих возмущений, $\mathbf{P}$ – матрица коэффициентов линейной части системы

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \cdots \\ q_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} = [\,p_{ij}\,]_1^n, \quad \mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ \ldots \\ F_n(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}^{(3)}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} Q_1^{(3)}(q) \\ \cdots \\ Q_n^{(3)}(q) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_s^{(3)}(\mathbf{q}) = \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_n=3} p^s_{\nu_1\ldots\nu_n} q_1^{\nu_1}\ldots q_n^{\nu_n} \equiv \sum_{\|\nu\|=3} p_\nu^s q^\nu \quad \text{или } \mathbf{Q}^{(3)} = \sum_{\|\nu\|=3} p_\nu q^\nu\,.$$

Динамическая система (1) задана в малой окрестности $\bar{D}$ нуля фазового пространства состояний с положительными константами $c_1,\ldots,c_n$:

$$\bar{D} = [(q_1,\ldots,q_n) : |\,q_j\,| \le c_j;\, j = 1,\ldots,n]\,. \qquad (2)$$

Предполагается, что собственные значения $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$, $\alpha_{i+1} \le \alpha_i < \alpha < 0$ матрицы $\mathbf{P}$ имеют отрицательные вещественные части, меньшие некоторой отрицательной константы α, т.е. соответствующая линеаризованная система существенно устойчива:

$$\lambda_s = \alpha_s + i\beta_s, \quad \alpha_{s-1} \le \alpha_s < \alpha < 0, \quad s = 1,\ldots,n\,.$$

Построение нелинейного дифференциального неравенства вида Риккати и исследование практической устойчивости движения системы

Пусть для устойчивой системы (1) выбрана функция Ляпунова $V(q)$ – положительный квадратичный многочлен с постоянной матрицей $\mathbf{A} > 0$:

$$V = \frac{1}{2} q^T \mathbf{A} q\,, \ \mathbf{A} = [a_{ij}]_1^n > 0\,,$$

причем производная от V содержит отрицательный квадратичный многочлен

$$W^{(2)}(q) = q^T \mathbf{B} q\,, \ \mathbf{B} < 0\,.$$

Введем в рассмотрение область $\bar{G}(h)$ в окрестности нуля, задаваемую через функцию V неравенством

$$\bar{G}(h) = \{V(q_1\ldots q_n),\, h : V(q_1\ldots q_n) \le h^2\} \subset \bar{D}\,,$$

где h – назначаемая положительная малая постоянная величина, обеспечивающая выполнение условия $\bar{G}(h) \subset \bar{D}$.

В области $\bar{D}$, а также $\bar{G}(h)$ функция V удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{V} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_j} \dot{q}_j \equiv \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}^T} \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}^{\mathbf{T}}} (\mathbf{Pq} + \mathbf{Q}^{(3)}(\mathbf{q}) + \mathbf{F}(t)) \tag{3}$$

с вектором-строкой частных производных

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = [\frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_n}].$$

В правой части выражения (3) имеем однородный квадратичный многочлен от переменных q_s, однородный многочлен четвертой степени и линейный многочлен с переменными коэффициентами

$$\dot{V} = W^{(2)}(q) + W^{(4)}(q) + W^{(1)}(q,t) \tag{4}$$

при

$$W^{(2)}(q) = \sum_{\nu_1 + \ldots + \nu_n = 2} p^{(2)}_{\nu_1,\ldots,\nu_n} q_1^{\nu_1} \ldots q_n^{\nu_n} \equiv \sum_{\|\nu\|=2} p^{(2)}_{\nu} q^{\nu},$$

$$W^{(4)}(q) = \sum_{\|\nu\|=4} p^{(4)}_{\nu} q^{\nu} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}^T} Q^{(3)}(q), \quad W^{(1)}(q,t) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}^T} F(t).$$

Оценим отрицательный квадратичный многочлен $W^{(2)}(q)$ отрицательным квадратичным многочленом вида $(-aV)$ при $a > 0$ [12]. Линейную функцию $W^{(1)}$ малых возмущений оценим в области (2) малой функцией времени $f(t)$, используя условие вида $|q_j| \le c_j, \ j = 1, \ldots, n$.

Однородный малый многочлен четвертой степени $|W^{(4)}(q)|$ мажорируем однородным многочленом четвертой степени вида (bV^2) при $b \ge 0$. Подставив эти оценки в дифференциальное уравнение (4), получим нелинейное квадратичное дифференциальное неравенство для положительной функции вида

$$\dot{V} \le -aV + bV^2 + f(t) \text{ , при } V \le h \text{ , } a > 0, b > 0, f(t) \ge 0. \tag{5}$$

Оно содержит дифференциальное уравнение сравнения вида Риккати

$$\dot{u} = -au + bu^2 + f(t) \text{ при } u \ge 0, a > 0, b > 0, f(t) \ge 0. \tag{6}$$

Неравенство (5) и уравнение (6) не интегрируется в квадратурах в общем виде. Но если известно одно частное решение $u = y_1$, они интегрируются после замены переменных $V = V_1 + y_1, \ u = y + y_1$. Сопоставим квадратичному неравенству (5) интегрируемое в квадратурах экспоненциальное дифференциальное неравенство. Квадратичную функцию с двумя константами a, b в неравенстве (5) мажорируем с незначительным завышением экспоненциальной функцией с двумя константами α, k:

$$-2aV + bV^2 + f(t) < \alpha \exp(-kV) + f_1(t), \tag{7}$$

здесь α, k – константы, определяемые методом разложения $\exp(-kV)$ по степеням V, функция $f_1(t)$ включает $f(t)$. Константы α, k, определенные условиями $\alpha k = 2a, \ \alpha k^2 = b$, имеют вид $k = b/2a, \quad \alpha = 4a^2/b$.

Подставив (7) в (5), получим экспоненциальное дифференциальное неравенство

$$\dot{V} \le \alpha e^{-kV} + f_1(t). \tag{8}$$

Неравенство (8) интегрируется методом почленного умножения на $(k \exp(kV))$:

$$k\dot{V}e^{kV} \le k\alpha + kf_1(t)e^{kV},$$

или

$$\dot{z} - kf_1(t)z \le k\alpha \quad \text{при } z = e^{kV}. \tag{9}$$

Умножив линейное неоднородное дифференциальное неравенство (9) на функцию

$$f_2(t) = \exp(-k\int_0^t f_1(t)dt) > 0,$$

получим

$$\frac{d}{dt}(zf_2(t)) \le k\alpha f_2(t), \quad z = e^{kV}. \tag{10}$$

Посредством почленного интегрирования дифференциального неравенства (10) в пределах $[0, t]$

при начальном условии z_0 находим:

$$z \le \frac{1}{f_2(t)}[z_0 + k\alpha\int_0^t f_2(t)dt] \ , \ f_2 = \exp(-k\int_0^t f_1(t)dt) \, ,$$

где $z = e^{kV}$, $z_0 = e^{kV_0}$, $V_0 = V(t)$ при $t = t_0 = 0$. Отсюда

$$e^{kV} \le e^{k\int_0^t f_1(t)dt}[e^{kV_0} + k\alpha\int_0^t e^{-k\int_0^t f_1(t)dt}dt]. \tag{11}$$

Прологарифмируем неравенство (11), имеющее положительные правую и левую части, и поделим на k:

$$V \le \int_0^t f_1(t)dt + \frac{1}{k}\ln(e^{kV_0} + k\alpha\int_0^t e^{-kf_1(t)}dt) \equiv f_2(t, V_0) \, . \tag{12}$$

Неравенство (12) определяет оценку сверху положительного квадратичного многочлена V функцией времени и начальных условий, характеризующую ограниченность решений на интервале времени $(0, t)$, из которой получаем оценки величин $|q_s| \le \varphi_s(t, V_0), s = 1, ..., n$, где $\varphi_s(t, V_0)$ – функции рассматриваемых начальных условий и времени. Оценки верны для множества решений системы (1) с начальными условиями $q = q_0$, принадлежащими области $G(h_0)$, где $0 < h_0 < h$ до такого момента времени t_1, когда правая часть неравенства (12) впервые достигает значения h.

Пример

Рассмотрим нелинейную систему с одной степенью свободы с нелинейной нечетной функцией от фазовых переменных в условиях воздействия на нее малых возмущений $f(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= -2q_1 + 0{,}1q_1(q_1^2 + q_2^2) \\ \dot{q}_2 &= -q_2 + 0{,}2q_2(q_1^2 + q_2^2) + f(t) \end{aligned} \tag{13}$$

при $q_1^2 + q_2^2 \le h, \quad |q_1| \le h, |q_2| \le h$, $|f(t)| \le \varepsilon$, ε – положительная константа, определяющая область, в которой рассматривается движение системы.

Возьмем положительный квадратичный многочлен и найдем его производную для системы (13):

$$V = q_1^2 + q_2^2,$$

$$\dot{V} = 2q_1[-2\dot{q}_1 + 0{,}1q_1(q_1^2 + q_2^2)] + 2q_2[-q_2 + 0{,}2q_2(q_1^2 + q_2^2 + f(t)] \ . \tag{14}$$

Оценив правую часть выражения (14), получим нелинейное квадратичное дифференциальное неравенство для положительной функции $V\,(q_1, q_2)$:

$$\dot{V} \le (-2V + 0{,}4V^2) + 2h\,|\,f(t)\,| \ . \tag{15}$$

Аппроксимируем квадратичную функцию экспоненциальной функцией

$$-2V + 0{,}4V^2 \approx a(e^{-kV} - 1) \, . \tag{16}$$

Константы a, k в (16) определим из приближенного равенства

$$a(e^{-kV} - 1) \approx -akV + \frac{1}{2}ak^2V^2 = -2V + 0{,}4V^2 \ ,$$

погрешность которого включаем в функцию постоянно действующих возмущений. Отсюда $ak = 2, ak^2 = 0{,}8$, окончательно $k = 0{,}4, a = 5$.

Подставив (16) в правую часть (15), получим нелинейное экспоненциальное дифференциальное неравенство, которое решается методом интегрирующего множителя

$$\dot{V} \le 5\exp(-0{,}4V) + f_1(t) \quad \text{при} \quad f_1(t) = 2h\,|\,f(t)\,| + \delta \ . \tag{17}$$

Здесь $\delta > 0$ – малая погрешность аппроксимации, которую затем включают в функцию возмущений. Умножим неравенство (17) почленно на $0{,}4\exp(0{,}4V)$:

$$0{,}4\dot{V}\exp(0{,}4V) - 0{,}4f_1(t)\exp(0{,}4V) \le 2$$

или

$$\dot{u} - 0{,}4f_1(t)u \le 2 \quad \text{при} \quad u = e^{0{,}4V}, \ u_0 = e^{0{,}4V_0} \, . \tag{18}$$

После почленного умножения линейного неоднородного дифференциального неравенства (18) на функцию $\lambda(t) = \exp(-0{,}4\int_0^t f_1(t)dt)$ получаем

$$\dot{u}_1 \le 2\lambda(t) \quad \text{при} \quad u_1 = u\lambda(t) = \exp(0,4V - 0,4\int_0^t f_1(t)dt), \ u_{10} = u_0\lambda(0) = u_0. \qquad (19)$$

Проинтегрировав неравенство (19) в пределах $[0,t]$, получаем оценку функции $u_1(u_0,t)$

$$u_1 \le u_0 + 2\int_0^t \lambda(t)dt \quad \text{при} \quad u_{10} = u_0$$

или

$$\exp(0,4V - 0,4\int_0^t f_1(t)dt) \le \exp(0,4V_0) + 2\int_0^t \lambda(t)dt. \qquad (20)$$

Логарифмируя почленно неравенство (20), получим оценку функции V

$$V \le \varphi(t,V_0), \ \text{при} \ V = q_1^2 + q_2^2, \quad V_0 = q_{10}^2 + q_{20}^2,$$

где

$$\varphi(t,V_0) = \int_0^t f_1(t)dt + 2,5\ln\left[\exp(0,4V_0 + 2\int_0^t \lambda(t)dt\right],$$

из которой следуют оценки модулей обобщенных координат

$$|q_1| \le \sqrt{\varphi(t,V_0)}, \ |q_2| \le \sqrt{\varphi(t,V_0)}.$$

Заключение

Рассмотрена нелинейная динамическая система, которая движется в условиях постоянно действующих на нее малых силовых возмущений. Предложен метод построения и интегрирования нелинейного экспоненциального дифференциального неравенства для положительной функции Ляпунова, интегрируемого в квадратурах, в результате определяются функциональные оценки переходных процессов динамической системы. Приведенный пример показывает возможности применения метода экспоненциальных дифференциальных неравенств при изучении практической устойчивости движения механических систем с одной степенью свободы, а также несколькими степенями свободы. Эти неравенства существенно расширяют возможности метода нелинейных дифференциальных неравенств теории устойчивости движения [13, 14], а также метода линейных и нелинейных дифференциальных неравенств [15, 16].

Литература

1. Мельников В.Г. Преобразование динамических многочленных систем с применением аппроксимаций Чебышева // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2012. № 4 (80). С. 85–90.
2. Мельников Г.И., Иванов С.Е., Мельников В.Г., Малых К.С. Применение модифицированного метода преобразований к нелинейной динамической системе // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2015. Т. 15. № 1(95). С. 149–154. doi: 10.17586/2226-1494-2015-15-1-149-154
3. Kuleshov A. Mathematical model of a skateboard with one degree of freedom // Doklady Physics. 2007. V. 52. N 5. P. 283–286. doi: 10.1134/s1028335807050102
4. Aleksandrov A., Tikhonov A. Electrodynamic stabilization of earth-orbiting satellites in equatorial orbits // Cosmic Research. 2012. V. 50. N 4. P. 313–318. doi: 10.1134/s001095251203001x
5. Krasovskii N. Problems of control and stabilization in dynamical systems // Journal of Mathematical Sciences. 2000. V. 100. N 5. P. 2458–2469. doi: 10.1007/bf02673836
6. Vassilyev S., Yadykin I., Iskakov A., Kataev D., Grobovoy A., Kiryanova N. Participation factors and sub-Gramians in the selective modal analysis of electric power systems // IFAC-PapersOnLine. 2017. V. 50. N 1. P. 14806–14811. doi: 10.1016/j.ifacol.2017.08.2560
7. Vassilyev S., Kosov A. Common and multiple Lyapunov functions in stability analysis of nonlinear switched systems // AIP Conference Proceedings. 2012. V. 1493. P. 1066–1073. doi: 10.1063/1.4765620
8. Martynyuk A.A., Martynyuk-Chernienko Y.A. Analysis of the set of trajectories of nonlinear dynamics: Stability and boundedness of motions // Differential Equations. 2013. V. 49. N 1. P. 20–31. doi: 10.1134/s0012266113010035
9. Мельников Г.И., Мельников В.Г., Дударенко Н.А.,

References

1. Melnikov V.G. Transformation of dynamic polynomial systems by Chebyshev approximation. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2012, no. 4, pp. 85–90. (in Russian)
2. Melnikov G.I., Ivanov S.E., Melnikov V.G., Malykh K.S. Application of modified conversion method to a nonlinear dynamical system. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2015, vol. 15, no. 1, pp. 149–154. doi: 10.17586/2226-1494-2015-15-1-149-154 (in Russian)
3. Kuleshov A. Mathematical model of a skateboard with one degree of freedom. *Doklady Physics*, 2007, vol. 52, no. 5, pp. 283–286. doi: 10.1134/s1028335807050102
4. Aleksandrov A., Tikhonov A. Electrodynamic stabilization of earth-orbiting satellites in equatorial orbits. *Cosmic Research*, 2012, vol. 50, no. 4, pp. 313–318. doi: 10.1134/s001095251203001x
5. Krasovskii N. Problems of control and stabilization in dynamical systems. *Journal of Mathematical Sciences*, 2000, vol. 100, no. 5, pp. 2458–2469. doi: 10.1007/bf02673836
6. Vassilyev S., Yadykin I., Iskakov A., Kataev D., Grobovoy A., Kiryanova N. Participation factors and sub-Gramians in the selective modal analysis of electric power systems. *IFAC-PapersOnLine*, 2017, vol. 50, no. 1, pp. 14806–14811. doi: 10.1016/j.ifacol.2017.08.2560
7. Vassilyev S., Kosov A. Common and multiple Lyapunov functions in stability analysis of nonlinear switched systems. *AIP Conference Proceedings*, 2012, vol. 1493, pp. 1066–1073. doi: 10.1063/1.4765620
8. Martynyuk A.A., Martynyuk-Chernienko Y.A. Analysis of the set of trajectories of nonlinear dynamics: Stability and boundedness of motions. *Differential Equations*, 2013, vol. 49, no. 1, pp. 20–31. doi: 10.1134/s0012266113010035

Алышев А.С., Иванова Л.Н. Последовательности дифференциальных неравенств для функций Ляпунова в оценках устойчивости нелинейных динамических систем // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2017. Т. 17. № 5. С. 947–951. doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-5-947-951

10. Вундер Н.А., Дударенко Н.А., Захарова П.И., Ушаков А.В. Формирование матриц спектральных плотностей многоканальных непрерывных систем при белошумных воздействиях // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2017. Т. 17. № 5. С. 938–946. doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-5-938-946
11. Рабыш Е.Ю., Григорьев В.В., Быстров С.В., Спорягин А.В. Использование условий качественной экспоненциальной неустойчивости для оценки динамических процессов // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2012. № 1 (77). С. 36–40.
12. Горбунов А.Д. Некоторые вопросы качественной теории обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами // Уч. записки МГУ. Математика. 1954. Т. 165(4). С. 39–78.
13. Мельников Г.И. Некоторые вопросы прямого метода Ляпунова // Доклады академии наук. 1956. Т. 110(3). С. 326–329.
14. Мельников Г.И. Динамика нелинейных механических и электромеханических систем. Л.: Машиностроение, 1975. 198 с.
15. Bellman R. On the Poincare-Lyapunov theorem // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 1980. V. 4. N 2. P. 297–300. doi: 10.1016/0362-546x(80)90055-3
16. Красовский Н.Н., Третьяков В.Е. Управление динамической системой. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. 199 с.

9. Melnikov G.I., Melnikov V.G., Dudarenko N.A., Alyshev A.S., Ivanova L.N. Sequences of differential inequalities for Lyapunov functions in stability estimates of nonlinear dynamical systems. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2017, vol. 17, no. 5, pp. 947–951 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-5-947-951
10. Vunder N.A., Dudarenko N.A., Zaharova P.I., Ushakov A.V. Generation of spectral density matrices for multichannel continuous systems under white noise action. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2017, vol. 17, no. 5, pp. 938–946 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-5-938-946
11. Rabysh E.Y., Grigoriev V.V., Bystrov S.V., Sporyagin A.V. Application of qualitative exponential instability conditions for dynamic processes estimation. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2012, no. 1, pp. 36–40. (in Russian)
12. Gorbunov A.D. Some questions of the qualitative theory of ordinary linear homogeneous differential equations with variable coefficients. *Moskov. Gos. Univ. Uč. Zap. Mat.*, 1954, vol. 165, no. 7, pp. 39–78. (in Russian)
13. Melnikov G.I. Some problems of the direct Lyapunov method. *Doklady Akademii Nauk*, 1956, vol. 110, pp. 326–329. (in Russian)
14. Melnikov G.I. *Nonlinear Dynamics of Mechanical and Electromechanical Systems*. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1975, 198 p. (in Russian)
15. Bellman R. On the Poincare-Lyapunov theorem. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 1980, vol. 4, no. 2, pp. 297–300. doi: 10.1016/0362-546x(80)90055-3
16. Krasovskii N.N., Tret'yakov V.E. *Dynamic System Control*. Sverdlovsk, INTs AS USSR, 1985, 199 p. (in Russian)

Авторы

Мельников Геннадий Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Scopus ID: 56458410600, ORCID ID: 0000-0001-6444-9243, gimelnikov@corp.ifmo.ru

Мельников Виталий Геннадьевич – доктор технических наук, доцент, профессор, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Scopus ID: 9432943200, ORCID ID: 0000-0002-2114-7891, melnikov@mail.ifmo.ru

Дударенко Наталия Александровна – кандидат технических наук, доцент, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Scopus ID: 36662185600, ORCID ID: 0000-0002-3553-0584, dudarenko@mail.ifmo.ru

Талапов Владислав Валерьевич – аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, ORCID ID: 0000-0001-7987-5333, talapov_v_v@mail.ru

Authors

Gennady I. Melnikov – D.Sc., Full Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Scopus ID: 56458410600, ORCID ID: 0000-0001-6444-9243, gimelnikov@corp.ifmo.ru

Vitaly G. Melnikov – D.Sc., Associate Professor, Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Scopus ID: 9432943200, ORCID ID: 0000-0002-2114-7891, melnikov@mail.ifmo.ru

Natalia A. Dudarenko – PhD, Associate Professor, Associate Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Scopus ID: 36662185600, ORCID ID: 0000-0002-3553-0584, dudarenko@mail.ifmo.ru

Vladislav V. Talapov – postgraduate, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, ORCID ID: 0000-0001-7987-5333, talapov_v_v@mail.ru