

УДК 681.511, 517.935

doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-3-426-434

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ БЭКСТЕППИНГА ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ МНОГОКАНАЛЬНЫМИ ОБЪЕКТАМИ С ПЕРЕКРЕСТНЫМИ СВЯЗЯМИ

Д.Е. Коновалов^a, С.А. Вражевский^{a,b}, И.Б. Фуртат^{a,b}, А.С. Кремлев^a

^a Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация

^b Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, 199178, Российская Федерация

Адрес для переписки: d.e.konovalov@mail.ru

Информация о статье

Поступила в редакцию 29.03.19, принята к печати 25.04.19

Язык статьи — русский

Ссылка для цитирования: Коновалов Д.Е., Вражевский С.А., Фуртат И.Б., Кремлев А.С. Модифицированный алгоритм бэкстеппинга для управления нелинейными многоканальными объектами с перекрестными связями // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2019. Т. 19. № 3. С. 426–434. doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-3-426-434

Аннотация

Предложен алгоритм управления по выходу нелинейными многоканальными динамическими объектами в условиях наличия параметрических неопределенностей, перекрестных связей и внешних возмущающих воздействий. Предложенный метод управления способен обеспечить высокое качество переходных процессов и высокую робастность замкнутой системы без использования сильной обратной связи в законе управления. Для приведения к структурно-определенному виду используется модельное преобразование с использованием одного линейного фильтра по управлению, порядок которого равен значению относительной динамической степени объекта управления. Приведен порядок расчета относительной динамической степени нелинейного многоканального объекта с учетом перекрестных связей. Алгоритм управления основан на совмещении робастного метода вспомогательного контура и итеративной процедуры синтеза закона управления (метод бэкстеппинга). Рассмотренная модификация позволяет производить оценку величины нежелательной динамики в каждом уравнении состояния объекта управления и ее последующую компенсацию путем формирования вспомогательных управляющих воздействий, равных по величине, но противоположных по знаку полученной оценки. Приведены результаты экспериментальной апробации предложенного алгоритма управления на лабораторном стенде «Twin Rotor MIMO System», который регулируется по двум угловым координатам и в упрощенном виде воспроизводит динамику винтокрылого летательного аппарата.

Ключевые слова

бэкстеппинг, метод вспомогательного контура, нелинейные системы, компенсация возмущений, многоканальные системы, децентрализованное управление

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-79-10104) в ИПМаш РАН.

doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-3-426-434

MODIFIED BACKSTEPPING ALGORITHM FOR CONTROL OF NONLINEAR MIMO SYSTEMS WITH CROSS-COUPPLINGS

D.E. Konovalov^a, S.A. Vrazhevsky^{a,b}, I.B. Furtat^{a,b}, A.S. Kremlev^a

^aITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

^bInstitute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences (IPME RAS), Saint Petersburg, 199178, Russian Federation

Corresponding author: d.e.konovalov@mail.ru

Article info

Received 29.03.19, accepted 25.04.19

Article in Russian

For citation: Konovalov D.E., Vrazhevsky S.A., Furtat I.B., Kremlev A.S. Modified backstepping algorithm for control of nonlinear systems with cross-couplings. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2019, vol. 19, no. 3, pp. 426–434 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-3-426-434

Abstract

The paper deals with an output control approach for structural uncertain MIMO systems under parametrical uncertainties, cross-reactions and external disturbances. The proposed technique ensures high quality of transients and high robustness in the steady

state toward the disturbances without using high-gain components in the controller. A model transformation with one linear filter for control signal is used to obtain a structural determined form of the plant (“straight-feedback form”). The dynamical order of the filter is equal to the relative degree of MIMO plant. The procedure of relative dynamic degree estimation for nonlinear MIMO plant with cross-couplings is considered. The control algorithm combines an auxiliary loop method and backstepping method. The first one is a robust approach to unknown bounded disturbances evaluation and compensation. Backstepping is a well-known iterative procedure of control law synthesis by consecutive analysis of the plant state equations. The considered combination allows estimating undesired dynamics in each state equation and compensates it by creation of virtual control laws with equal magnitude toward disturbances and reverse sign. Experimental verification of the considered control algorithm is given with the use of a laboratory platform called “Twin Rotor MIMO System”. The platform can be controlled in two angle positions and represents the simplified helicopter dynamics.

Keywords

backstepping, auxiliary loop method, nonlinear systems, disturbances compensation, MIMO systems, decentralized control

Acknowledgements

The research was supported by the Russian Science Foundation (project No. 18-79-10104) in IPME RAS

Введение

Среди алгоритмов управления сложными нелинейными объектами одним из наиболее широко используемых подходов является метод бэкстеппинга (метод обратного обхода интегратора). Большой интерес к развитию данного класса алгоритмов вызван способностью обеспечить высокое качество переходных процессов для широкого класса динамических объектов, в том числе для объектов со сложной нелинейной динамикой, многоканальных систем, а также для объектов с неизвестной (или неточно известной) математической структурой. В данной статье рассматривается модификация метода бэкстеппинга для управления нелинейными многоканальными объектами по выходу при наличии перекрестных связей и при воздействии на каждую подсистему ограниченных внешних возмущений. Метод бэкстеппинга подробно описан в работах [1, 2] и получил широкое применение в теоретических и прикладных задачах [3–5]. Применяемая в данной работе модификация впервые представлена в [6] и позволяет использовать только один линейный фильтр состояния для представления объекта в структурно-определенном виде, что снижает порядок регулятора по сравнению с другими решениями на базе бэкстеппинга [2]. В работах [7, 8] описаны решения, распространяющие результат [6] для управления линейными объектами с несогласованными возмущениями и для управления нелинейными объектами.

Новизна описанных в данной статье результатов заключается в том, что подход к синтезу системы управления использует результат [9], расширяющий идею из [7] для управления нелинейными объектами, и метод параметризации, предложенный в [6]. В отличие от [9] и [6], в данной работе исследуются нелинейные многоканальные объекты с перекрестными связями. Для этого дополнительно произведен расчет относительной динамической степени нелинейного многоканального объекта. В [7] для модификации алгоритма бэкстеппинга использован метод вспомогательного контура [10], который является робастной вариацией методов управления на основе внутренней (эталонной) модели. В отличие от адаптивных подходов [11, 12] метод вспомогательного контура позволяет решать задачи компенсации немоделируемой либо неучтенной динамики, как, например, в работе [13]. Такое решение в отличие от результата [8] для нелинейных систем, не требует использования сильной обратной связи в контуре управления и существенно повышает устойчивость замкнутой системы по отношению к внешним возмущениям и воздействию перекрестных связей. В статье также предоставлены результаты экспериментальной апробации полученного алгоритма на реальном двухканальном лабораторном стенде, демонстрирующие работоспособность предложенного метода.

Постановка задачи

Рассматривается нелинейный многоканальный объект:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \sum_{j=1}^n f_{j_i}^i(\mathbf{x}_{j_i}, \xi_{j_i}) + b_i(\mathbf{x}_i, \xi_i)(u_i + \varphi_i(\mathbf{x}_i, t)), y_i = h_i(\mathbf{x}_i), i = \overline{1, n}, \mathbf{x}_i(0) = \mathbf{x}_{i0}, \tag{1}$$

где $\dot{\mathbf{x}}_i = f_{j_i}^i(\mathbf{x}_{j_i}, \xi_{j_i}) \Big|_{j_i=i} + b_i(\mathbf{x}_i, \xi_i)(u_i + \varphi_i(\mathbf{x}_i, t))$ — динамика i -й подсистемы без учета перекрестных связей; $\sum_{j=1}^n f_{j_i}^i(\mathbf{x}_{j_i}, \xi_{j_i}), j_i \neq i$ — функции перекрестных связей; $\xi_i = [\xi_{i1}, \dots, \xi_{in}]^T \in \Xi$ — вектор неизвестных параметров i -й подсистемы, а Ξ — известное ограниченное множество; $\mathbf{x}_i \in R^n$ — вектор состояния i -й подсистемы; $u_i \in R$ — сигналы управляющих воздействий; $y_i \in R$ — выходные сигналы подсистем; $h_i(x_i)$ — нелинейные функции, формирующие выходные сигналы; f_i, b_i и h_i — достаточно гладкие функции; φ_i — неизвестные функции, ограниченные по t и липшицевы по x . Цель управления задается в виде:

$$\|\mathbf{e}\| < \delta, t > t_f, \mathbf{e} = [e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1n}]^T, e_{1i} = y_i(t) - y_{ref,i}(t), i = \overline{1, n}, \tag{2}$$

где каждая из переменных e_{1i} является ошибкой слежения i -й подсистемы; $\delta > 0$ — желаемая точность регулирования; $t_f > 0$ — время переходного процесса; $y_{ref,i}$ — эталонные сигналы i -й подсистемы, ограниченные вместе со своими производными.

Относительная динамическая степень многоканального объекта

Для определения относительной динамической степени объекта (1) вычислим производные сигналов y_i в соответствии с [2, 14], но учитывая многоканальность объекта и наличие перекрестных связей:

$$\dot{y}_i = \frac{\partial h_i(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} \left[\sum_{j_1=1}^n f_{j_1}^i(\mathbf{x}_{j_1}, \xi_{j_1}) + b_i(\mathbf{x}_i, \xi_i)(u_i + \varphi_i(\mathbf{x}_i, t)) \right] = \sum_{j_1=1}^n \frac{\partial h_i(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} f_{j_1}^i(\mathbf{x}_{j_1}, \xi_{j_1}) + \frac{\partial h_i(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} b_i(\mathbf{x}_i, \xi_i)(u_i + \varphi_i(\mathbf{x}_i, t)).$$

Переобозначая в терминах производных Ли, получим:

$$L_{f_{j_1}^i} h_i(\mathbf{x}_{j_1}) = \frac{\partial h_i(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} f_{j_1}^i(\mathbf{x}_{j_1}, \xi_{j_1}), L_{b_i} h_i(\mathbf{x}_i) = \frac{\partial h_i(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} b_i(\mathbf{x}_i, \xi_i), \forall i, j_1 = \overline{1, n}. \tag{3}$$

В плане принятых обозначений переход к (3) повторяет аналогичную процедуру для одноканальных нелинейных объектов, изложенную в книгах [2] и [14] с целью упростить громоздкое формульное описание процедуры поиска относительной динамической степени нелинейного многоканального объекта. В случае если $L_{b_i} h_i(x_i) = 0$, то каждый из сигналов \dot{y}_i не зависит от u_i . Тогда первая производная примет вид:

$$\dot{y}_i = \sum_{j_1=1}^n L_{f_{j_1}^i} h_i(x_{j_1}), i = \overline{1, n}.$$

Вторая производная от функций y_i имеет вид:

$$\ddot{y}_i = \sum_{j_1=1}^n \frac{\partial L_{f_{j_1}^i} h_i(\mathbf{x}_{j_1})}{\partial \mathbf{x}_{j_1}} \dot{x}_{j_1} = \sum_{j_1=1}^n \frac{\partial L_{f_{j_1}^i} h_i(\mathbf{x}_{j_1})}{\partial \mathbf{x}_{j_1}} \sum_{j_2=1}^n f_{j_2}^{j_1}(\mathbf{x}_{j_2}, \xi_{j_2}) + \sum_{j_1=1}^n \frac{\partial L_{f_{j_1}^i} h_i(\mathbf{x}_{j_1})}{\partial \mathbf{x}_{j_1}} b_{j_1}(\mathbf{x}_{j_1}, \xi_{j_1})(u_{j_1} + \xi_{j_1}(\mathbf{x}_{j_1}, t)).$$

Соответствующие производные можно записать в форме

$$L_{f_{j_2}^{j_1}} L_{f_{j_1}^i} h_i(\mathbf{x}_{j_2}) = \frac{\partial L_{f_{j_1}^i} h_i(\mathbf{x}_{j_1})}{\partial \mathbf{x}_{j_1}} f_{j_2}^{j_1}(\mathbf{x}_{j_2}, \xi_{j_2}),$$

$$L_{b_{j_1}} L_{f_{j_1}^i} h_i(\mathbf{x}_{j_1}) = \frac{\partial L_{f_{j_1}^i} h_i(\mathbf{x}_{j_1})}{\partial \mathbf{x}_{j_1}} b_{j_1}(\mathbf{x}_{j_1}, \xi_{j_1}), \forall i, j_1, j_2 = \overline{1, n}.$$

Аналогично расчетам первой производной, если выполняется условие $L_{b_{j_1}} L_{f_{j_1}^i} h_i(x_{j_1}) = 0, \forall i, j_1, j_2 = \overline{1, n}$, то сигналы \ddot{y}_i не зависят от u_i и принимают вид:

$$\ddot{y}_i = \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n L_{f_{j_2}^{j_1}} L_{f_{j_1}^i} h_i(x_{j_2}), \forall i, j_1, j_2 = \overline{1, n}.$$

Аналогичные рассуждения справедливы и для старших производных объекта:

$$y_i^{(3)} = \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \sum_{j_3=1}^n L_{f_{j_3}^{j_2}} L_{f_{j_2}^{j_1}} L_{f_{j_1}^i} h_i(\mathbf{x}_{j_3}), \dots, y_i^{(\gamma-1)} = \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_{\gamma-1}=1}^n L_{f_{j_{\gamma-1}}^{j_{\gamma-2}}} \dots L_{f_{j_1}^i} h_i(\mathbf{x}_{j_{\gamma-1}}),$$

до тех пор, пока выполняются условия

$$L_{b_i} h_i(\mathbf{x}_i) = 0, L_{b_{j_1}} L_{f_{j_1}^i} h_i(\mathbf{x}_{j_1}) = 0, \dots, L_{b_{j_{\gamma-2}}} L_{f_{j_{\gamma-2}}^{j_{\gamma-1}}} \dots L_{f_{j_2}^{j_1}} L_{f_{j_1}^i} h_i(\mathbf{x}_{j_{\gamma-1}}) = 0.$$

Допустим, что существует значение $\gamma > 0$ такое, что $L_{b_{j_{\gamma-1}}} L_{f_{j_{\gamma-2}}^{j_{\gamma-1}}} \dots L_{f_{j_2}^{j_1}} L_{f_{j_1}^i} h_i(\mathbf{x}_{j_1}) \neq 0$. Из этого следует, что

объект (1) имеет относительную динамическую степень γ , его производная в этой степени имеет вид:

$$y_i^{(\gamma)} = \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_{\gamma-1}=1}^n L_{f_{j_{\gamma-1}}^{j_{\gamma-2}}} \dots L_{f_{j_1}^i} h_i(\mathbf{x}_{j_{\gamma-1}}) + \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_{\gamma-1}=1}^n \left[L_{b_{j_{\gamma-1}}} L_{f_{j_{\gamma-2}}^{j_{\gamma-1}}} \dots L_{f_{j_2}^{j_1}} L_{f_{j_1}^i} h_i(\mathbf{x}_{j_{\gamma-1}})(u_{j_{\gamma-1}} + \varphi_{j_{\gamma-1}}(\mathbf{x}_{j_{\gamma-1}}, t)) \right]. \tag{4}$$

Данная работа ограничена рассмотрением объектов, в которых для каждой одноканальной подсистемы отсутствуют прямые зависимости, в том числе при вычислении производных, от сигналов управления других подсистем, т. е.

$$y_i^{(\gamma)} : L_{b_{j_{\gamma-1}}} L_{f_{j_{\gamma-2}}^{j_{\gamma-1}}} \dots L_{f_{j_2}^{j_1}} L_{f_{j_1}^i} h_i(\mathbf{x}_{j_1}) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} L_{b_i} L_{f_i^i} h_i(\mathbf{x}_i) \neq 0, \\ \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_{\gamma-1}=1}^n L_{b_{j_{\gamma-1}}} L_{f_{j_{\gamma-2}}^{j_{\gamma-1}}} \dots L_{f_{j_2}^{j_1}} L_{f_{j_1}^i} h_i(\mathbf{x}_{j_1}) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Используя (5), перепишем (4) в форме:

$$y_i^{(\gamma)} = \sum_{m=1}^n \bar{f}_m^i(\mathbf{x}_m) + L_{b_i} L_{f_i}^{\gamma-1} h_i(\mathbf{x}_i)(u_i + \varphi_i(\mathbf{x}_i, t)), \quad (6)$$

$$\bar{f}_m^i(\mathbf{x}_m) = \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_{\gamma-1}=1}^n L_{f_{j_1}^{\gamma-1}} \dots L_{f_{j_{\gamma-1}}^1} h_i(\mathbf{x}_{j_{\gamma}}) \Big|_{j_{\gamma}=m} = \sum_{l=1}^{n^{\gamma-1}} L_{f_{j_{\gamma}}^{\gamma-1}} \dots L_{f_{j_1}^1} h_i(\mathbf{x}_m). \quad (7)$$

Стоит отметить, что функции (7) всегда могут быть сформированы из (4), поскольку выражение $\sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_{\gamma-1}=1}^n L_{f_{j_1}^{\gamma-1}} \dots L_{f_{j_{\gamma-1}}^1} h_i(\mathbf{x}_{j_{\gamma}})$ — это сумма n^γ функций, среди которых ровно $n^{\gamma-1}$ являются функциями, содержащими собственную динамику i -й подсистемы. Также для объекта (1) выполнены следующие предположения.

Предположения.

Каждая подсистема объекта управления (1) имеет одну и ту же динамическую степень γ , причем все функции $c_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, \xi_i) = \sum_{m=1}^n \bar{f}_m^i(\mathbf{x}_m)$ являются ограниченными (или ограниченными на множестве Ξ и липшицевыми по x) и все функции $\beta_i(\mathbf{x}_i, \xi_i) = L_{b_i} L_{f_i}^{\gamma-1} h_i(\mathbf{x}_i) > 0$.

Существует функция $\varphi_i^{-1}(\mathbf{x}_i)$ такая, что

$$\bar{\mathbf{x}}_i(t) = \varphi_i(\mathbf{x}_i(t)) = \begin{bmatrix} y_i(t) \\ \dot{y}_i(t) \\ \vdots \\ y_i^{(\gamma-1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_i(\mathbf{x}) \\ \sum_{j_1=1}^n L_{f_{j_1}^1} h_i(\mathbf{x}_{j_1}) \\ \vdots \\ \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_{\gamma-1}=1}^n L_{f_{j_1}^{\gamma-2}} \dots L_{f_{j_{\gamma-1}}^1} h_i(\mathbf{x}_{j_{\gamma-1}}) \end{bmatrix}, i, j_1, \dots, j_n = \overline{1, n}.$$

Модельные преобразования

Система (1), переписанная в форме (6), позволяет преобразовать уравнения ошибок слежения $e_{li} = y_i(t) - y_{ref,i}(t), i = \overline{1, n}$ к виду:

$$p^\gamma e_{li}(t) = c_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \xi_i) + \beta_i(\mathbf{x}_i, \xi_i)(u_i(t) + \varphi_i(\mathbf{x}_i, t)) - p^\gamma y_{ref,i}(t), i = \overline{1, n}, \quad (8)$$

где $p = d/dt$ — оператор дифференцирования. Рассмотрим операторы $Q_i(p^{\gamma-1}) = \sum_{g=1}^{\gamma} k_{g_i} p^{\gamma-g}$, такие, что $Q_i(p^\gamma) = p^\gamma + Q_i(p^{\gamma-1})$ — гурвицев полином, k_{g_i} — настраиваемые коэффициенты, которые обеспечивают гурвицевость полинома. Перепишем (8) в форме

$$Q_i(p^\gamma) e_{li}(t) = u_i(t) + \psi_i(\mathbf{x}_{1,n}^-, u_i, \xi_i, y_{ref,i}, t), i = \overline{1, n}, \quad (9)$$

где ψ_i — расширенная функция возмущений вида:

$$\psi_i(\mathbf{x}_{1,n}^-, u_i, \xi_i, y_{ref,i}, t) = c_i(\mathbf{x}_{1,n}^-, \xi_i) + \beta_i(\mathbf{x}_i, \xi_i)\varphi_i(\mathbf{x}_i, t) + (\beta_i(\mathbf{x}_i, \xi_i) - 1)u_i(t) - p^\gamma y_{ref,i}(t) + Q_i(p^{\gamma-1})e_{li}(t), i = \overline{1, n}.$$

Из (9) следует, что

$$e_{li}(t) = Q_i(p^\gamma)^{-1} u_i(t) + Q_i(p^\gamma)^{-1} \psi_i(\mathbf{x}_{1,n}^-, u_i, \xi_i, y_{ref,i}, t). \quad (10)$$

Основной результат

Для слагаемого $Q_i(p^\gamma)^{-1} u_i(t)$ в (10) рассмотрим фильтр:

$$\dot{\mathbf{v}}_i(t) = \mathbf{A}_{0i} \mathbf{v}_i(t) + \mathbf{B} u_i(t), i = \overline{1, n},$$

$$\mathbf{v}_i(t) = \begin{bmatrix} v_{1i}(t) \\ v_{2i}(t) \\ \vdots \\ v_{\gamma i}(t) \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{0i} = \begin{bmatrix} -k_{1i} & & & \\ & -k_{2i} & & \mathbf{I}_{\gamma-1} \\ & & \ddots & \\ & & & -k_{\gamma i} & 0 \dots 0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где \mathbf{A}_{0i} — матрица состояний i -й подсистемы, \mathbf{B} — матрица входа, $\mathbf{I}_{\gamma-1}$ — единичная матрица. Перепишем (10) в форме:

$$e_{1i}(t) = v_{1i}(t) + Q_i(p^\gamma)^{-1} \psi_i(\mathbf{x}_{1,n}^-, u_i, \xi_i, y_{ref,i}, t), i = \overline{1, n}. \quad (12)$$

Вычисляя производную (12) с учетом (11), добавим и вычтем слагаемое $-c_{1i}e_{1i}$ с настраиваемым параметром $c_{1i} > 0$, получим

$$\dot{e}_{1i}(t) = -c_{1i}e_{1i} - k_{1i}v_{1i}(t) + v_{2i}(t) + \hat{f}_{1i}, i = \overline{1, n},$$

где $\hat{f}_{1i} = c_{1i}e_{1i} + pQ_i(p^\gamma)^{-1} \psi_i(\mathbf{x}_{1,n}^-, u_i, \xi_i, y_{ref,i}, t), i = \overline{1, n}$ — новая функция возмущений.

Снова, следуя алгоритму бэкстеппинга и вводя в рассмотрение на каждом шаге вспомогательный контур для оценки и компенсации возмущений, проведем последовательно в γ шагов синтез алгоритма управления объектом (1), обеспечивающий выполнение цели управления (2).

Шаг 1. Рассмотрим вспомогательный контур (параллельную эталонную модель)

$$\dot{e}_{1i}^a(t) = -c_{1i}e_{1i}^a(t) - k_{1i}v_{1i}(t) + v_{2i}(t), i = \overline{1, n}, \quad (13)$$

и выделим ошибки рассогласования

$$\xi_{1i}(t) = e_{1i}(t) - e_{1i}^a(t), i = \overline{1, n},$$

вместе с их производными

$$\dot{\xi}_{1i}(t) = \dot{e}_{1i}(t) - \dot{e}_{1i}^a(t) = -c_{1i}\xi_{1i}(t) + \hat{f}_{1i}(t), i = \overline{1, n}. \quad (14)$$

Из (14) следует, что возмущения могут быть оценены в виде

$$\hat{f}_{1i}(t) = \dot{\xi}_{1i} + c_{1i}\xi_{1i}, i = \overline{1, n}.$$

Перепишем (13) в форме

$$\dot{e}_{1i}(t) = -c_{1i}e_{1i}(t) - k_{1i}v_{1i}(t) + v_{2i}(t) + \dot{\xi}_{1i}(t) + c_{1i}\xi_{1i}(t). \quad (15)$$

Пусть функция $v_{2i}(t)$ является вспомогательным управляющим сигналом в (15) [2]. Для каждой из подсистем сформируем закон вспомогательного управления:

$$u_{1i}(t) = k_{1i}v_{1i}(t) - \hat{\xi}_{1i}(t) - c_{1i}\xi_{1i}(t), i = \overline{1, n}, \quad (16)$$

где $\hat{\xi}_{1i}(t)$ — оценки производных $\dot{\xi}_{1i}(t)$, так как последние не измеряются напрямую. Для оценки производных воспользуемся наблюдателем

$$\mu \dot{\hat{\xi}} + \hat{\xi} = \dot{\xi}, \quad (17)$$

где $\mu > 0$ — достаточно малое число, которое является настраиваемым параметром наблюдателя, $\dot{\xi}$ — измеряемый сигнал, $\hat{\xi}$ — оценка производной $\dot{\xi}$. Подставляя $v_{2i}(t) = u_{1i}(t)$, получим

$$\dot{e}_{1i}(t) = -c_{1i}e_{1i}(t) + e_{2i} + \eta_{1i}(t), i = \overline{1, n},$$

где $\eta_{1i}(t) = \hat{\xi}_{1i}(t) - \dot{\xi}_{1i}(t)$ — ошибка наблюдения, $e_{2i}(t)$ — ошибка вспомогательного управления, которая имеет вид

$$e_{2i}(t) = v_{2i}(t) - u_{1i}(t), i = \overline{1, n}.$$

Шаг $r, r = 2, \gamma - 1$. Вычисления, аналогичные проделанным на шаге 1, справедливы для последующего синтеза вспомогательных законов управления и анализа динамики ошибок вспомогательного управления

$$\dot{e}_r(t) = -c_r e_r - k_r v_r(t) + v_{(r+1)i}(t) + \hat{f}_r, i = \overline{1, n}, \quad (18)$$

В результате должны быть сформированы наборы вспомогательных контуров

$$\dot{e}_r^a(t) = -c_r e_r^a(t) - k_r v_r(t) + v_{r+1,i}(t), i = \overline{1, n}, \quad (19)$$

и могут быть получены следующие наборы ошибок рассогласования

$$\xi_r(t) = e_r(t) - e_r^a(t), i = \overline{1, n}.$$

Введем в рассмотрение законы вспомогательного управления

$$u_{ri}(t) = k_{ri}v_{1i}(t) - \hat{\xi}_{ri}(t) - c_{ri}\eta_{ri}(t), i = \overline{1, n}, \quad (20)$$

которые определяют динамику ошибок (18) в форме

$$\begin{aligned} \dot{e}_{ri}(t) &= -c_{ri}e_{ri}(t) + e_{(r+1)i} + \eta_{ri}(t), i = \overline{1, n}, \\ e_{(r+1)i}(t) &= v_{(r+1)i}(t) - u_{ri}(t), i = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

с ошибкой наблюдения $\eta_{ri}(t) = \hat{\xi}_{ri}(t) - \xi_{ri}(t)$.

Шаг γ . Производная ошибки $e_{\gamma i}$, сформированной на предыдущем шаге синтеза алгоритма, имеет вид:

$$\dot{e}_{\gamma i}(t) = -k_{\gamma i}v_{1i}(t) + u_i(t) - \dot{u}_{(\gamma-1)i}(t) \pm c_{\gamma i}e_{\gamma i}, i = \overline{1, n}, \quad (21)$$

Рассмотрим вспомогательный контур

$$\dot{e}_{\gamma i}^a(t) = -c_{\gamma i}e_{2i}^a(t) - k_{\gamma i}v_{1i}(t) + u_i(t), i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

и сформируем набор ошибок рассогласования вместе с их производными

$$\xi_{\gamma i}(t) = e_{\gamma i}(t) - e_{\gamma i}^a(t), i = \overline{1, n},$$

$$\dot{\xi}_{\gamma i}(t) = \dot{e}_{\gamma i}(t) - \dot{e}_{\gamma i}^a(t) = -c_{\gamma i} - \gamma_i(t) + \hat{f}_{\gamma i}, i = \overline{1, n}, \quad (23)$$

где $\hat{f}_{\gamma i}(t) = -\dot{u}_{(\gamma-1)i}(t) + c_{\gamma i}e_{\gamma i}(t)$ — функции возмущений для системы (21). Из (23) следует, что функции возмущений для системы (21) могут быть оценены в виде:

$$\hat{f}_{\gamma i}(t) = \dot{\xi}_{\gamma i} + c_{\gamma i}\xi_{\gamma i}, i = \overline{1, n}, \quad (24)$$

и система (21) может быть переписана с учетом (24)

$$\dot{e}_{\gamma i}(t) = -c_{\gamma i}e_{\gamma i}(t) - k_{\gamma i}v_{1i}(t) + u_i(t) + \dot{\xi}_{\gamma i}(t) + c_{\gamma i}\xi_{\gamma i}(t). \quad (25)$$

Сформируем закон управления для каждой подсистемы объекта (1) в виде

$$u_i(t) = k_{\gamma i}v_{1i}(t) - \hat{\xi}_{\gamma i}(t) - c_{\gamma i} - \gamma_i(t), i = \overline{1, n}, \quad (26)$$

где $\hat{\xi}_{\gamma i}(t)$ — оценки производных $\dot{\xi}_{\gamma i}(t)$. Перепишем (25) в виде

$$\dot{e}_{\gamma i}(t) = -c_{\gamma i}e_{\gamma i}(t) + \eta_{\gamma i}(t), i = \overline{1, n},$$

где $\eta_{\gamma i}(t) = \hat{\xi}_{\gamma i}(t) - \dot{\xi}_{\gamma i}(t)$ — ошибки наблюдения.

Утверждение. Пусть выполнены условия предположений. Существуют значения параметров $c_{\gamma i} > 0$, $\mu_{\gamma i0} > 0$, $i = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, n}$ такие, что для любого $\mu_{\gamma i} \in (0; \mu_{\gamma i0})$ система управления, состоящая из фильтров (11), вспомогательных контуров (13), (19), (22), наблюдателей (17), вспомогательных законов управления (16), (20) и законов управления (26), обеспечивает выполнение цели управления (2) для объекта управления (1).

Доказательство алгоритма, подобно приведенному в работе [9], и отличается только многоканальной структурой объекта управления. При вычислении относительной динамической степени объекта (1) полученная модель в ошибках (9) повторяет аналогичную модель в работе [9], но теперь является векторной величиной. Это сводит доказательную часть к той же последовательности действий, что и в [9], расширяя на векторный случай справедливость всех оценок сигналов и полученных ограничений на выбор настраиваемых параметров.

Моделирование

Для апробации алгоритма на практике использован мехатронный стенд «Twin Rotor MIMO System» (TRMS). Данная установка в упрощенном виде воспроизводит динамику винтокрылого летательного аппарата в двух угловых плоскостях путем создания воздушной тяги раскручивающихся лопастных систем. Двигатель, который обеспечивает вращение горизонтально расположенных лопастей и обеспечивает поворот балки в вертикальной плоскости, условно обозначается, как «главный». Второй двигатель обозначается, как «хвостовой» и приводит в движение вертикально расположенные лопасти в «хвосте» установки. Стенд и его структурная схема приведены на рис. 1.

Модель стенда TRMS подробно описана и исследована в ряде работ [9, 13, 15]. В данном разделе статьи для краткости ограничимся только рассмотрением результатов эксперимента. Экспериментальные результаты представлены в виде графиков (рис. 2, 3).

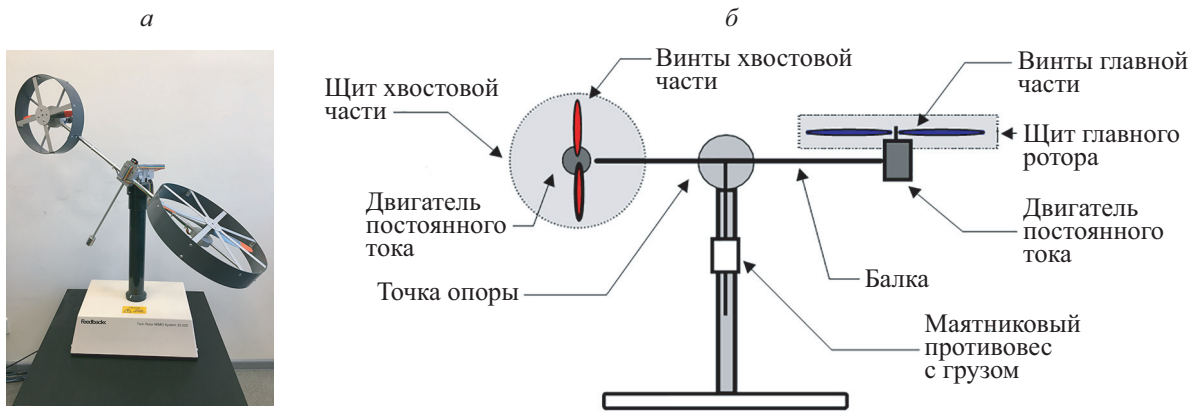


Рис. 1. Лабораторный стенд TRMS (а) и его структурная схема (б)

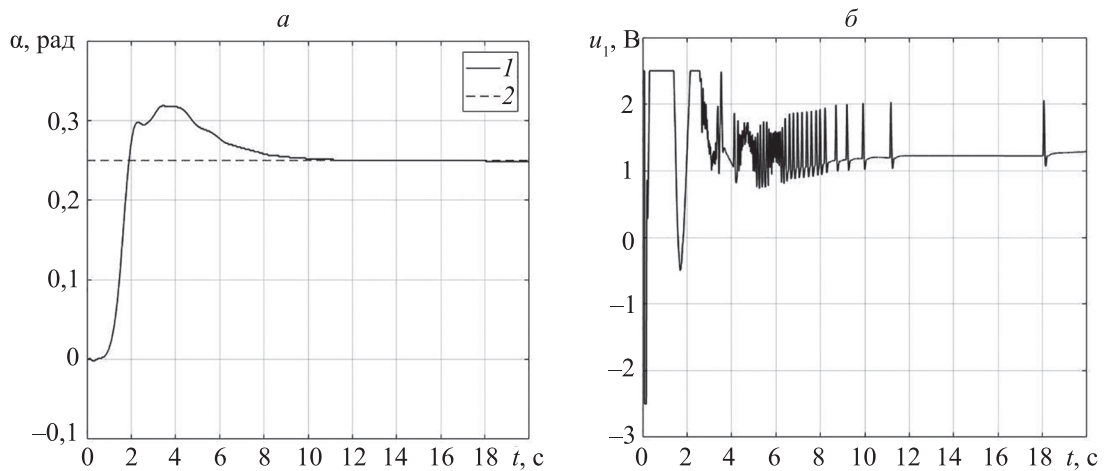


Рис. 2. Переходные процессы по углу тангажа (кривая 1) относительно желаемого положения (кривая 2) (а) и по сигналу управления, подаваемого на главный двигатель (б)

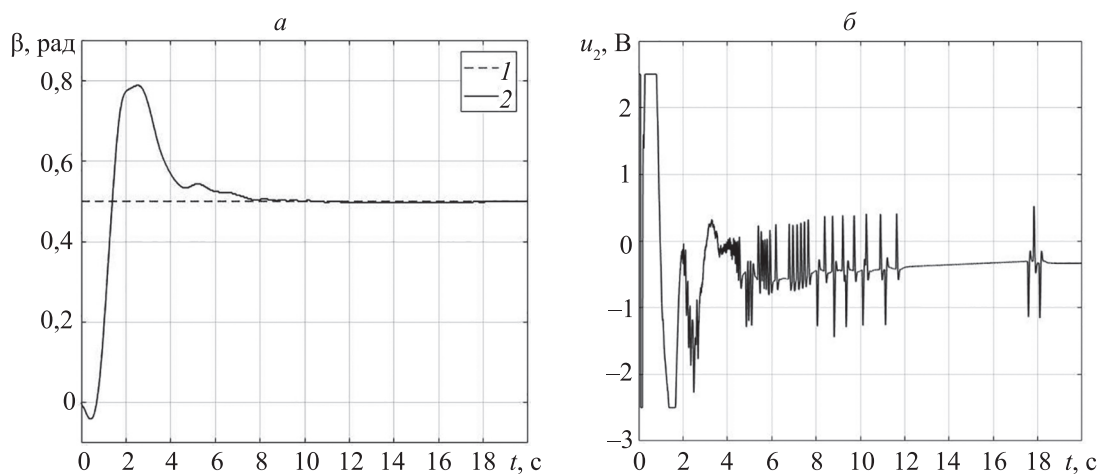


Рис. 3. Переходные процессы по углу рысканья (кривая 2) относительно желаемого положения (кривая 1) (а) и по сигналу управления, подаваемого на хвостовой двигатель (б)

Заключение

В данной статье рассмотрен алгоритм управления нелинейными структурно-неопределенными многоканальными объектами на базе модифицированного метода бэкстеппинга. Использование данного алгоритма обеспечивает оценку и компенсацию нежелательной динамики объекта управления, которая может порождаться влиянием внешних возмущающих воздействий, наличием перекрестных связей и

параметрическими отклонениями в самом объекте. Суммарный порядок системы управления является наименьшим среди аналогичных решений на основе бэкстеппинга за счет использования только одного фильтра состояния, порядок которого равен относительной динамической степени объекта. В данной работе рассмотрена децентрализованная версия метода управления, для получения централизованной системы достаточно заменить все эталонные сигналы одним без дополнительных изменений в структуре алгоритма.

Литература

1. Kokotovic P.V. The joy of feedback: nonlinear and adaptive // *IEEE Control Systems Magazine*. 1992. V. 12. N 3. P. 7–17. doi: 10.1109/37.165507
2. Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб: Наука, 2000. 549 с.
3. Jiang Z., Nijmeijer H. Tracking control of mobile robots: a case study in backstepping // *Automatica*. 1997. V. 33. N 7. P. 1393–1399. doi: 10.1016/S0005-1098(97)00055-1
4. Kokotovic P., Arcak M. Constructive nonlinear control: a historical perspective // *Automatica*. 2001. V. 37. N 5. P. 637–662. doi: 10.1016/S0005-1098(01)00002-4
5. Tong S., Li Y., Li Y., Liu Y. Observer-based adaptive fuzzy backstepping control for a class of stochastic nonlinear strict-feedback systems // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*. 2011. V. 41. N 6. P. 1693–1704. doi: 10.1109/tsmcb.2011.2159264
6. Фуртат И.Б. Модифицированный алгоритм робастного обхода интегратора // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2009. № 10. С. 2–7.
7. Furtat I., Furtat E., Tupichin E.A. Modified backstepping algorithm with disturbances compensation // *IFAC-Papers-OnLine*. 2015. V. 48. N 11. P. 1056–1061. doi: 10.1016/j.ifacol.2015.09.333
8. Furtat I.B., Tupichin E.A. Modified backstepping algorithm for nonlinear systems // *Automation and Remote Control*. 2016. V. 77. N 9. P. 1567–1578. doi: 10.1134/S0005117916090058
9. Вражевский С.А. Модифицированный алгоритм бэкстеппинга с компенсацией возмущений для управления нелинейными объектами по выходу // *Труды СПИИРАН*. 2018. № 3. С. 182–202. doi: 10.15622/sp.58.8
10. Цыкунов А.М. Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // *Автоматика и телемеханика*. 2007. № 7. С. 103–115.
11. Morse A.S. High-order parameter tuners for the adaptive control of linear and nonlinear systems / In: *Systems, models and feedback: Theory and Applications*. Birkhäuser, Boston, 1992. P. 339–364. doi: 10.1007/978-1-4757-2204-8_23
12. Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Схемы адаптивного управления с расширенной ошибкой // *Автоматика и телемеханика*. 1994. № 9. С. 3–22.
13. Vrazhevsky S.A., Chugina J.V., Furtat I.B., Kremlev A.S. Robust suboptimal output stabilization for multi input multi output plants under disturbances // *Proc. 9th Int. Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops*. Munich, Germany, 2017. P. 55–60. doi: 10.1109/icumt.2017.8255163
14. Khalil H.K. *Nonlinear Systems*. Upper Saddle River: Prentice hall, 2002. V. 3.
15. *Twin Rotor MIMO System Advanced Teaching Manual 1 (33-007-4M5)*. Crowborough, UK: Feedback Instruments Ltd, 1998.

Авторы

Коновалов Дмитрий Евгеньевич — студент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, ORCID ID: 0000-0002-9973-8202, d.e.konovalev@mail.ru
Вражевский Сергей Александрович — инженер, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация; младший научный сотрудник, Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, 199178, Российская Федерация, Scopus ID: 57188996628, ORCID ID: 0000-0001-9725-5330, vrazhevskij.s@gmail.com

References

1. Kokotovic P.V. The joy of feedback: nonlinear and adaptive. *IEEE Control Systems Magazine*, 1992, vol. 12, no. 3, pp. 7–17. doi: 10.1109/37.165507
2. Miroshnik I.V., Nikiforov V.O., Fradkov A.L. *Nonlinear and Adaptive Control of Complex Dynamic Systems*. St. Petersburg, Nauka Publ., 2000, 549 p. (in Russian)
3. Jiang Z., Nijmeijer H. Tracking control of mobile robots: a case study in backstepping. *Automatica*, 1997, vol. 33, no. 7, pp. 1393–1399. doi: 10.1016/S0005-1098(97)00055-1
4. Kokotovic P., Arcak M. Constructive nonlinear control: a historical perspective. *Automatica*, 2001, vol. 37, no. 5, pp. 637–662. doi: 10.1016/S0005-1098(01)00002-4
5. Tong S., Li Y., Li Y., Liu Y. Observer-based adaptive fuzzy backstepping control for a class of stochastic nonlinear strict-feedback systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 2011, vol. 41, no. 6, pp. 1693–1704. doi: 10.1109/tsmcb.2011.2159264
6. Furtat I.B. Modified algorithm of robust integrator backstepping. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2009, no. 10, pp. 2–7. (in Russian)
7. Furtat I., Furtat E., Tupichin E.A. Modified backstepping algorithm with disturbances compensation. *IFAC-PapersOnLine*, 2015, vol. 48, no. 11, pp. 1056–1061. doi: 10.1016/j.ifacol.2015.09.333
8. Furtat I.B., Tupichin E.A. Modified backstepping algorithm for nonlinear systems. *Automation and Remote Control*, 2016, vol. 77, no. 9, pp. 1567–1578. doi: 10.1134/S0005117916090058
9. Vrazhevsky S.A. Output control of nonlinear systems using modified backstepping algorithm with disturbances compensation. *SPIIRAS Proceedings*, 2018, no. 3, pp. 182–202. (in Russian)
10. Tsykunov A.M. Robust control algorithms with compensation of bounded perturbations. *Automation and Remote Control*, 2007, vol. 68, no. 7, pp. 1213–1224. doi: 10.1134/S0005117907070090
11. Morse A.S. High-order parameter tuners for the adaptive control of linear and nonlinear systems. In *Systems, models and feedback: Theory and Applications*. Birkhäuser, Boston, 1992, pp. 339–364. doi: 10.1007/978-1-4757-2204-8_23
12. Nikiforov V.O., Fradkov A.L. Adaptive control schemes with extended error. *Avtomatika i Telemekhanika*, 1994, no. 9, pp. 3–22. (in Russian)
13. Vrazhevsky S.A., Chugina J.V., Furtat I.B., Kremlev A.S. Robust suboptimal output stabilization for multi input multi output plants under disturbances. *Proc. 9th Int. Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops*. Munich, Germany, 2017, pp. 55–60. doi: 10.1109/icumt.2017.8255163
14. Khalil H.K. *Nonlinear Systems*. Upper Saddle River, Prentice hall, 2002, vol. 3.
15. *Twin Rotor MIMO System Advanced Teaching Manual 1 (33-007-4M5)*. Crowborough, UK, Feedback Instruments Ltd, 1998.

Authors

Dmitry E. Konovalev — student, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, ORCID ID: 0000-0002-9973-8202, d.e.konovalev@mail.ru
Sergey A. Vrazhevsky — engineer, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation; junior scientific researcher, Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences (IPME RAS), Saint Petersburg, 199178, Russian Federation, Scopus ID: 57188996628, ORCID ID: 0000-0001-9725-5330, vrazhevskij.s@gmail.com

Фуртат Игорь Борисович — доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, 199178, Российская Федерация; профессор, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Scopus ID: 36349158600, ORCID ID: 0000-0003-4679-5884, cainenash@mail.ru

Кремлев Артем Сергеевич — кандидат технических наук, доцент, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Scopus ID: 8670923900, ORCID ID: 0000-0002-7024-3126, kremlev_artem@mail.ru

Igor B. Furtat — D.Sc., Professor, Leading scientific researcher, Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences (IPME RAS), Saint Petersburg, 199178, Russian Federation; Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Scopus ID: 36349158600, ORCID ID: 0000-0003-4679-5884, cainenash@mail.ru

Artem S. Kremlev — PhD, Associate Professor, Associate Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Scopus ID: 8670923900, ORCID ID: 0000-0002-7024-3126, kremlev_artem@mail.ru